

# ECUACIONES DIFERENCIALES

LIBRERIAS AGUILAR

Serrano, 24

Copa, 18

Av. Generalísimo, 44

Importador n.º 475/75

Ptas. ....

12.000

Ref. ....

025 - 6-4

Título .....

.....

.....





CURSOS DE ANALISIS MATEMATICO PARA INGENIEROS

Tomo II

CURSO TEORICO PRACTICO DE  
**ECUACIONES  
DIFERENCIALES**  
APLICADO A LA FISICA Y TECNICA

POR

**P. PUIG ADAM**

De la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Doctor en Ciencias. Ingeniero Industrial. Profesor titular de «Extensión de Cálculo» en la Escuela Especial de Ingenieros Industriales de Madrid



15.ª EDICION  
MADRID, 1978

R. 1.116

D. 9244 } D. 9255  
D. 9258

· © Herederos de Pedro Puig Adam. 1951.

Editor: Roberto Puig Alvarez.

Atocha, 10 - Madrid-12 - Teléfono 467 65 98.

ISBN 84-7029-025-8 (Obra completa)

ISBN 84-7029-007-X (Tomo I)

ISBN 84-400-4008-3 (Tomo II)

Depósito legal: M. 38.709-1977

Edición 15.<sup>a</sup>

Impresor: Nuevas Gráficas, S. A. - Andrés Mellado, 18 - Madrid-15 - 1977

Printed in Spain.

## PROLOGO DE LA PRIMERA EDICION

*Como prometí en el tomo anterior de CALCULO INTEGRAL he intensificado en éste los ejemplos de aplicación, con objeto de que el alumno de ingeniería acoja con interés y con fe crecientes la regular dosis de conceptos matemáticos nuevos que un curso de esta índole supone, y, sobre todo, con la finalidad educativa de ejercitar en él, desde un principio, las facultades de abstracción y de concreción fundamentales en la Técnica, que es tanto como decir el arte de plantear e interpretar.*

*Claro está que la doble limitación de espacio-tiempo y de formación técnica del escolar, tan sólo nos ha permitido abrir unos cuantos ventanales a su curiosidad, pocos si se comparan con la infinita multiplicidad de las aplicaciones. Hemos procurado, no obstante, que los panoramas sean variados y que abarquen diversos aspectos de la admirable lucha del ingenio humano para adaptar el mundo de sus observaciones y experiencias al de sus abstracciones.*

*Por lo demás (salvo en algunas cuestiones como la transformación de Laplace recientemente incorporada a la técnica matemática del ingeniero), el contenido del libro no rebasa el instrumental matemático que ya puede llamarse clásico en la Física matemática del siglo XIX y comienzos del XX.*

*Quedan fuera del marco del curso muchos otros instrumentos matemáticos de creación o de utilización más recientes (matrices, espacios abstractos, funcionales, grupos, cuerpos, etc.) que constituyen no sólo el porvenir del Análisis puro y aplicado, sino la realidad presente en el tratamiento de cuestiones físicas de novísimo cuño, como en la mecánica cuántica.*

*En el incesante tráfico de abstracciones y generalizaciones que constituye el desarrollo y la evolución de la Matemática, es difícil pronosticar cuáles serán las fronteras del actual "formalismo" que, iniciado en el movimiento axiomático de comienzos del siglo, ha desembocado en las bellísimas síntesis del Álgebra moderna y del Análisis abstracto: ahora bien, no cabe duda que la escuela formalista cultiva, con intensidad inigualada en la historia de la Matemática el sentido penetrante de lo esencial, pero no de lo esencial metafísico, sino de lo esencial pragmático, buscando las leyes, las estructuras que relacionan los atributos de los conceptos y unificando los reinados conceptuales por la identidad de su "legislación". Este nuevo modo de pensar abstracto ha tenido su natural repercusión en el enfoque de los problemas concretos y al buscar asimismo en ellos los esquemas "legales" esenciales surgen inesperadas analogías que sugieren soluciones por isomorfismo, es decir, por reducción o trasplante de un ámbito conceptual a otro de idéntica estructura "legal", pero de intuición más fácil o de recursos técnicos más conocidos. La citada transformación*

*de Laplace es el ejemplo técnico más sencillo y fecundo que cabe mencionar hoy día en este orden de ideas, y, para no citar más que una de sus múltiples aplicaciones, recordemos la sorprendente sencillez con que se trata hoy la estabilidad de un servomecanismo reduciéndolo a la inocente tarea de averiguar si un punto del plano está dentro o fuera de un determinado recinto, con lo que, de paso, se evidencia el carácter esencialmente topológico de tales cuestiones de estabilidad.*

*La economía y belleza de las soluciones aludidas, así como la revalorización que los modernos recursos de cálculo automático han impreso a las soluciones temidas hasta ahora por impracticables, permiten augurar cambios profundos en el contenido y carácter de los libros futuros de Matemática aplicada. Acaso no alcance a verlos el autor de esta modestísima obra, pero lo cierto es que al contemplar a su humilde hija, nacida en momentos de evolución tan vertiginosa de ideas y métodos, presiente la posible rapidez de su envejecimiento. Si no alcanzara a remozarla le alienta la esperanza de que no falte, entre los lectores presentes o futuros de ella, quienes se encarguen de hacerlo cuando caduque definitivamente. Renovarse es vivir, y cada generación tiene el deber de mejorar el esfuerzo de las precedentes. Los nombres que el tiempo sepulta en el olvido sólo reviven en el germinar de nuevas semillas y éste es el mejor y acaso el único homenaje que esperan.*

*No olvida quien esto escribe la deuda de gratitud contraída con los que fueron sus guías y maestros ni quiere cerrar este prólogo sin rendir asimismo cuenta de otros motivos de agradecimiento en la génesis y desarrollo de esta obrita.*

*Mi primer sentimiento de emocionado recuerdo debe dirigirse al inolvidable maestro, consejero y amigo don Esteban Terradas; a sus indicaciones se debe la inclusión de varios títulos acogidos luego por él mismo con cariñoso alborozo. Fallecido inesperada y prematuramente, el vacío que deja como sabio, como técnico y como amigo es la prenda más segura de memoria imperecedera.*

*Siguen en la lista los ilustres colegas y excelentes amigos Fernando Peña y Ricardo San Juan, el primero por el cariñoso aliento con que ha leído y comentado la casi totalidad del libro, y el segundo por la eficaz crítica a que ha sometido el capítulo dedicado al campo complejo. Por sus atajos me ha guiado, en varias ocasiones, acortando caminos y puliendo conceptos. A mi excelente colaborador en cátedra, don Miguel Jerez, y a su hermano, mi mejor discípulo del pasado curso, debo la paciente ayuda en la corrección de pruebas; y a otros alumnos, Fustel y Sarmiento, y a mi bondadosísimo padre, el eficaz auxilio en la confección de figuras, fe de erratas y descifrado y puesta en limpio de borradores. De justicia es, por último, agradecer asimismo a la imprenta "Nuevas Gráficas" la buena voluntad con que en todo momento ha atendido mis indicaciones, tanto en materia de presentación cuanto en cumplimiento de fechas de entrega.*

*Madrid, septiembre de 1950.*

P. PUIG ADAM

# INDICE

---

	<u>Págs.</u>
Capítulo I.—ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN	
Lección 1. <sup>a</sup> Generalidades. Teorema de existencia ... .. .	1
” 2. <sup>a</sup> Ecuaciones de variables separadas. Ecuaciones homogéneas ... .. .	11
” 3. <sup>a</sup> Diferenciales exactas. Factor integrante ... .. .	23
” 4. <sup>a</sup> Ecuaciones lineales, de Bernouilli y de Ricatti.. ... .. .	29
” 5. <sup>a</sup> Ecuaciones de primer orden no lineales en $y'$ ... .. .	37
<i>Ampliación a este Capítulo: Introducción a la teoría de los grupos continuos de transformaciones...</i> ... .. .	48
Capítulo II.—ECUACIONES DE ORDEN SUPERIOR AL PRIMERO	
Lección 6. <sup>a</sup> Generalidades sobre ecuaciones de 2. <sup>o</sup> orden y de orden $n$ ... .. .	53
” 7. <sup>a</sup> Curvas definidas por condiciones de curvatura. Aplicaciones ... .. .	66
Capítulo III.—ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES	
Lección 8. <sup>a</sup> Propiedades generales de las ecuaciones diferenciales lineales de orden $n$ . ... .. .	75
” 9. <sup>a</sup> Métodos clásicos de integración de las ecuaciones lineales... .. .	84
” 10. Métodos fundados en el manejo algebraico del operador $D$ ... .. .	93
” 11. Vibraciones. Oscilaciones... .. .	101
” 12. Ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes periódicos ... .. .	113
Capítulo IV.—NOCIONES SOBRE PROBLEMAS DE CONTORNO	
Lección 13. Nociones sobre la función de Green ... .. .	122
” 14. Problemas de contorno con valores y funciones propios.. ... .. .	130
Capítulo V.—SOLUCIONES DEFINIDAS POR SERIES	
Lección 15. Integración por series. Funciones de Hermite, Legendre y Bessel.. ... .. .	141
” 16. Propiedades de las funciones de Bessel.. ... .. .	150
Capítulo VI.—SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES	
Lección 17. Generalidades. Sistemas lineales.. ... .. .	165
” 18. La transformación de Laplace. Aplicación a redes eléctricas ... .. .	178
Capítulo VII.—METODOS APROXIMADOS PARA LA INTEGRACION DE ECUACIONES Y SISTEMAS	
Lección 19. Métodos gráficos ... .. .	191
” 20. Integración numérica de ecuaciones diferenciales.. ... .. .	197

Capítulo VIII.—ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES  
DE PRIMER ORDEN

Lección 21.	Ecuaciones de primer orden lineales ... ..	208
" 22.	Ecuaciones en derivadas parciales de primer orden no lineales..	218
" 23.	Método de las características. Problema de Cauchy...	228

Capítulo IX.—ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN  
SUPERIOR AL PRIMERO

Lección 24.	Ecuaciones lineales homogéneas de coeficientes constantes...	237
" 25.	Ecuaciones lineales completas de coeficientes constantes..	247
" 26.	Ecuaciones lineales de coeficientes variables ... ..	253
" 27.	El problema de Cauchy en las ecuaciones de orden superior al primero. Características...	262

Capítulo X.—APLICACIONES DE LAS ECUACIONES EN DERIVADAS  
PARCIALES A LA FISICA

Lección 28.	Problemas de tipo hiperbólico con dos variables. Cuerda vibrante. Ecuación de los telegrafistas..	278
" 29.	Ecuaciones de tipo hiperbólico con más de dos variables. Membrana vibrante. Ecuación de ondas ... ..	290
" 30.	Ecuaciones de tipo parabólico. Transmisión del calor. Difusión ... ..	300
" 31.	Problemas de tipo elíptico.—Ecuación de Laplace-Poisson. Nociones sobre la teoría del potencial ... ..	309

Capítulo XI.—NOCIONES SOBRE CALCULO DE VARIACIONES

Lección 32.	La ecuación de Euler..	321
" 33.	Extremales ligadas. Isoperímetros. Variación de integrales múltiples...	329
" 34.	Algunas aplicaciones técnicas del cálculo de variaciones..	335

Capítulo XII.—NOCIONES SOBRE FUNCIONES DE VARIABLE  
COMPLEJA Y SUS APLICACIONES

Lección 35.	Funciones elementales de variable compleja ... ..	342
" 36.	La derivación en el campo complejo ... ..	350
" 37.	La integración en el campo complejo ... ..	357
" 38.	Residuos. Integral de Cauchy ... ..	365
" 39.	Funciones analíticas. Series de Taylor y de Laurent ... ..	371
" 40.	Funciones meromorfas. Funciones elípticas..	381
" 41.	Aplicaciones a campos planos. Representación conforme..	394
" 42.	Aplicaciones a circuitos, redes y líneas de transmisión. Inversión de la transformación de Laplace ... ..	402

Capítulo XIII.—NOCIONES SOBRE ECUACIONES INTEGRALES  
LINEALES

Lección 43.	Ecuaciones integrales y problemas de contorno ... ..	415
" 44.	Métodos de resolución..	422

## Capítulo I.—ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

### LECCIÓN 1.<sup>a</sup>—GENERALIDADES. TEOREMAS DE EXISTENCIA

**I. Definiciones generales.**— En diversas aplicaciones, desarrolladas en el tomo primero de «Cálculo Integral», hemos obtenido relaciones entre cantidades finitas integrando relaciones de igualdad entre sus diferenciales. Recordemos, como ejemplo, la ecuación del péndulo, el tiempo que tarda en vaciarse un depósito, la teoría del planímetro, etc.

Todos los ejemplos allí resueltos se reducían, de modo inmediato, al cálculo de ciertas funciones primitivas. Esta fácil reducción se debía a la sencillez de las relaciones que ligaban las diferenciales de las cantidades estudiadas, relación llamada en cada caso *ecuación diferencial* del problema. Pero otras cuestiones geométricas y físicas tratadas asimismo en el primer tomo (curvatura de curvas, de superficies, ecuaciones de Laplace, Poisson, propagación del calor, etc.), habrán hecho ver al lector la existencia de ecuaciones de naturaleza más complicada, cuya traducción a relaciones finitas exige métodos especiales con frecuencia llenos de dificultades. Tales métodos constituyen el objeto de la teoría de las ecuaciones diferenciales, que sólo podremos tratar aquí en sus líneas fundamentales y en sus más importantes y frecuentes aplicaciones.

Toda relación de la forma

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0; \text{ abreviadamente, } f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

que ligue una variable independiente  $x$  con una función  $y$  de ella y las  $n$  primeras derivadas  $\frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}$  se llama *ecuación diferencial ordinaria de orden  $n$* .

No hay que confundir el *orden* de una ecuación diferencial, que es el de la derivada de orden mayor contenida en ella, con el *grado*, que se define sólo cuando  $f$  es un polinomio algebraico como el grado de éste en la función y sus derivadas. No importa en la definición de grado la forma en que aparezca la variable  $x$

Ejemplo 1.<sup>o</sup> La ecuación

$$\operatorname{sen} x \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3xy \frac{dy}{dx} + y^2 e^x = 0$$

es una ecuación de primer orden, pero de segundo grado



Ejemplo 2.º La ecuación

$$y''^2 = Kx(1+y'^2)^3$$

es de *segundo orden* y de *segundo grado* en  $y''$ , pero de *sexto grado* en  $y$ .

Toda relación de la forma

$$f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial y^n}\right) = 0$$

que liga *dos o más* variables independientes, con una función  $u$  de ellas, y las derivadas *parciales* hasta el orden  $n$ , se llama *ecuación en (o entre) derivadas parciales* de orden  $n$ .

Así, las ecuaciones halladas en el tomo I,

$$\text{Ecuación de Poisson: } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -4\pi\rho(x, y, z)$$

$$\text{Propagación del calor: } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = k^2 \frac{\partial u}{\partial t}$$

son ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden, con tres y cuatro variables independientes respectivamente.

Finalmente, cuando hay más de una función las ecuaciones diferenciales ordinarias o en derivadas parciales se suelen presentar simultáneamente formando los llamados *sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias o en derivadas parciales*.

Ejemplos:

1.º Las ecuaciones del movimiento de un punto material constituyen (en el caso más general de campo variable y resistencia de medio) sistemas de la forma

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = f\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \varphi(\dots) \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = \psi(\dots)$$

en las que  $t$  es la variable independiente, y  $x, y, z$  son las funciones incógnitas.

2.º La diferencia de potencial  $u$  entre los hilos de una línea bifilar, y la intensidad  $i$  que por ella circula están ligadas por las relaciones (lord Kelvin)

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = l \frac{\partial i}{\partial t} + ri \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = c \frac{\partial u}{\partial t} + gu$$

en las que las variables independientes son el tiempo  $t$  y la distancia  $x$  a un extremo de la línea, mientras  $u$  e  $i$  son funciones incógnitas de ellas. Los coeficientes  $l, r, c, g$  son constantes de la línea que no interesa especificar aquí.

Empecemos estudiando las ecuaciones más sencillas, es decir, las diferenciales ordinarias de primer orden.

## 2. Ecuación diferencial de un haz de curvas planas.

Consideremos el haz de parábolas

$$y = Cx^2$$

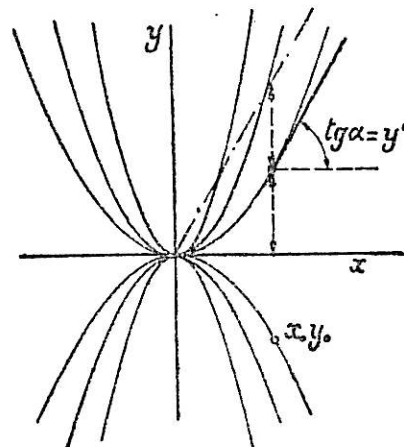
Por cada punto  $x_0, y_0$  del plano (no situado en el eje  $y$ ) pasa una curva de dicho haz correspondiente al valor  $C$  que cumple la condición  $y_0 = Cx_0^2$ , es decir,  $C = y_0 : x_0^2$ . En cada una de estas curvas se verifica

$$y' = 2Cx$$

que resulta de derivar la ecuación del haz. Eliminando  $C$  entre ambas ecuaciones, resulta la ecuación diferencial de primer orden

$$y' = \frac{2y}{x}$$

que, por ser independiente de  $C$ , expresa una propiedad de la tangente, que es común a todas las curvas del haz, a saber: «La pendiente de la tangente en todo punto es doble de la de la recta que une dicho punto con el origen.»



De un modo general: Sea, en una cierta región  $R$  del plano  $xy$ , un haz de curvas dado por la ecuación

$$y = F(x, C) \quad [1]$$

tal que a cada par de valores  $x, y$  en  $R$  corresponda un valor  $C$ , es decir, por cada punto de  $R$  pasa una curva y sólo una del haz. Tal ocurre si  $F_c \neq 0$ . En esta hipótesis, dicha ecuación define

$$C = \varphi(x, y) \quad [2]$$

y derivando [1], podremos eliminar  $C$  sustituyéndola por  $\varphi(x, y)$  en

$$y' = F_x(x, C) \quad \dots \quad \text{obteniéndose} \quad y' = f(x, y) \quad [3]$$

La misma eliminación se consigue directamente derivando [2], supuesto  $\varphi$  derivable, con lo que resulta (si  $\varphi_y \neq 0$ )

$$\varphi_x + \varphi_y y' = 0 \quad y' = - \frac{\varphi_x(x, y)}{\varphi_y(x, y)} \quad [4]$$

Es fácil comprobar la equivalencia de [3] y [4] derivando la identidad  $F(x, \varphi(x, y)) = y$ , pues de ella resulta

$$\left. \begin{aligned} F_x + F_\varphi \varphi_x &= 0 \\ F_\varphi \varphi_y &= 1 \end{aligned} \right\} \quad \text{de donde} \quad F_x = - \frac{\varphi_x}{\varphi_y}$$

La ecuación [3] o su equivalente [4] es, pues, una ecuación que, por ser independiente de  $C$ , queda satisfecha para todas las curvas del haz, representa una propiedad de todas ellas referente a la tangente, y se llama *ecuación diferencial del haz*.

Más general aún: Si la ecuación implícita

$$F(x, y, C) = 0 \quad [5]$$

define, en una cierta región  $R$  del plano, un haz  $y = \Phi(x, C)$ , y al mismo

tiempo por cada punto de  $R$  pasa una curva y solo una del haz, es decir si [5] define igualmente

$$C = \varphi(x, y) \quad [6]$$

podemos obtener la ecuación diferencial del haz eliminando  $C$  entre esta relación y la que resulta de derivar [5]

$$F_x + F_y y' = 0 \quad [7]$$

o, directamente, por derivación de [6] supuesta  $\varphi$  derivable

$$\varphi_x + \varphi_y y' = 0 \quad [8]$$

Ambas ecuaciones [7] y [8] son equivalentes como se comprueba derivando la identidad  $F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ .

Cuando la ecuación diferencial del haz se presenta con la  $y'$  despejada, es decir

$$y' = f(x, y)$$

se dice que está en la *forma normal*.

**3. Haz integral de una ecuación diferencial de primer orden. Teorema de existencia.**—La obtención de la ecuación diferencial de un haz de curvas planas es, pues, problema de derivación y eliminación. Interesa ahora resolver el problema inverso:

Dada una ecuación *normal* de primer orden

$$y' = f(x, y) \quad [1]$$

hallar el haz de curvas que la satisface. Este haz se llamará *haz integral* de [1]. Pero ¿existe tal haz?, ¿es único? Más concretamente: dada la ecuación [1], ¿existe una región de plano tal que, para cada punto  $x_0, y_0$  de la misma, sea posible hallar una curva y sólo una que pase por él y satisfaga la ecuación diferencial dada? Digamos de paso que cada una de estas curvas se llamará *integral particular* de la ecuación diferencial correspondiente a la condición inicial  $x_0, y_0$ , mientras el haz integral se llamará también *integral general* de [1].

La pregunta planteada tiene contestación afirmativa si  $f(x, y)$  cumple ciertas condiciones, por ejemplo, la de ser *analítica*, es decir desarrollable en serie de Taylor y, por tanto, derivable cuantas veces se quiera. Tal es el *teorema de existencia*, en la forma de Cauchy, que puede enunciarse brevemente así:

*Si  $f(x, y)$  es analítica en un cierto dominio al que pertenece  $x_0, y_0$ , en un cierto entorno de  $x_0, y_0$  existe una función analítica y sólo una  $y(x)$  que verifica la ecuación diferencial y tal que  $y(x_0) = y_0$ .*

Sin entrar en el detalle de la demostración, que puede verse desarrollada en los tratados especiales (\*) demos idea de la construcción de dicha

(\*) V. Goussat: «Cours d'Analyse Mathématique», Tomo II, Cap. XIX.

solución. Tal solución analítica, si existe, se podrá desarrollar en serie de Taylor en un entorno del punto  $x_0, y_0$ .

$$y = y_0 + y'_0(x - x_0) + y''_0 \frac{(x - x_0)^2}{2!} + y'''_0 \frac{(x - x_0)^3}{3!} + \dots \quad [2]$$

desarrollo en el que  $x_0$  es dado y los coeficientes  $y_0, y'_0, y''_0, \dots$  pueden obtenerse unívocamente del siguiente modo:

$y_0$  por ser dado

$y'_0$  sustituyendo  $x, y$  por  $x_0, y_0$  en [1], es decir,  $y'_0 = f(x_0, y_0)$

$y''_0$  derivando [1]  $y'' = f_x + f_y y'$  y sustituyendo  $x, y, y'$  por  $x_0, y_0, y'_0$  en el segundo miembro.

$y'''_0$  derivando nuevamente  $y''' = f_{xx} + 2f_{xy}y' + f_{yy}y'^2 + f_y y''$  y sustituyendo en el segundo miembro  $x, y, y', y''$  por los valores obtenidos  $x_0, y_0, y'_0, y''_0$ ; y así sucesivamente.

Una vez obtenidos los coeficientes de la serie, Cauchy demostró su convergencia uniforme en un entorno de  $x_0$  construyendo otra serie convergente de términos mayores en valor absoluto (serie mayorante); por tanto la serie construída define una función analítica cuyo desarrollo en serie de Taylor (único) coincide con [2], y cuya derivada se demuestra sin dificultad que satisface a la ecuación diferencial.

Fijando ahora  $x_0$  y variando  $y_0$  se obtiene una curva para cada punto de la vertical por  $x_0$ , es decir, se tiene el haz integral (definido al menos en una cierta región alrededor de la referida vertical, región que puede extenderse tomando nuevas verticales).

La demostración del teorema de existencia de Cauchy constituye, pues, un método constructivo de la solución, que más adelante aplicaremos simplificando el cálculo de los coeficientes de la serie (método de los coeficientes indeterminados). En las aplicaciones no se maneja toda la serie, sino solamente los términos precisos para para que el error cometido con ello sea menor que el orden de aproximación con que se opera. La posibilidad de acotar este error (convergencia de la serie) es lo que da a un tiempo *valor teórico* y *valor práctico* al método del desarrollo en serie.

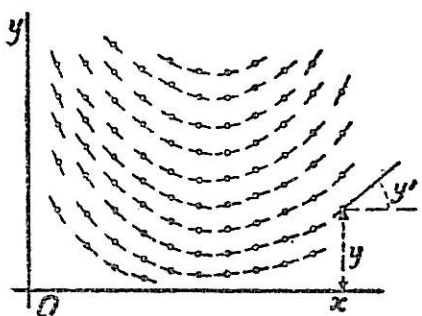
**4. Imagen geométrica de una ecuación diferencial. Polígonos de Euler.**—Pero existen otros métodos de obtención de soluciones aproximadas que mediante un paso al límite dan, asimismo, la solución teórica del problema. Tal es el método de integración por cálculo o diseño de un polígono integral aproximado.

Obsérvese, para ello, que la ecuación diferencial

$$y' = f(x, y) \quad [1]$$

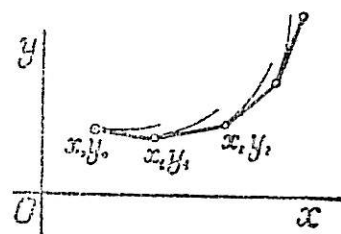
hace corresponder a cada punto del plano  $x, y$  (o de la región de plano en que se supone definida  $f$ ) una pendiente  $y'$  de la curva integral que pasa

por él, es decir la dirección de la tangente en este punto. La ecuación [1] define, pues, lo que llamaremos *un campo de direcciones* que podemos imaginar intuitivamente representado por una serie de segmentitos orientados llenando el plano (o la región antedicha), cada uno con la pendiente  $y' = f(x, y)$  correspondiente a su punto medio  $x, y$ . Las curvas integrales son, pues, curvas que en cada punto tienen por tangente el segmento local correspondiente.



En particular, las líneas de campo de un campo vectorial plano  $X(x, y) Y(x, y)$  se definieron en el tomo primero como las curvas que son tangentes en cada punto al vector que pasa por él, es decir que vendrán definidas por la ecuación diferencial  $y' = Y : X$ . Para la determinación de las líneas de campo no nos interesan, pues, los valores de las dos componentes de cada vector sino tan sólo el valor de su razón.

De esta representación se infiere fácilmente que todo polígono cuyos lados sean segmentitos de la representación geométrica aludida constituirá una aproximación a una curva integral, tanto más aceptable cuanto menores sean los referidos segmentos. En particular, una representación aproximada de la curva integral que pasa por un punto dado  $x_0, y_0$  se obtendrá trazando por  $x_0, y_0$  un trocito de tangente correspondiente a este punto, por el extremo  $x_1, y_1$  del mismo otro trozo de tangente correspondiente a este nuevo punto, repitiendo la construcción por el nuevo extremo  $x_2, y_2$ , y así sucesivamente (\*).



Se comprende en seguida que el procedimiento dará teóricamente tanta mejor aproximación cuanto más cortos sean los segmentos de tangente. Un paso al límite nos dará la curva integral que pasa por  $x_0, y_0$ . En los tratados de Análisis (\*\*) se demuestra la existencia y unicidad de esta curva límite (en una cierta región del plano  $R$ ) con las siguientes condiciones (mucho menos exigentes que las del teorema de Cauchy):

- 1.<sup>a</sup>  $f(x, y)$  es uniformemente continua en  $R$ .
- 2.<sup>a</sup>  $f(x, y)$  verifica la *condición de Lipschitz*; es decir, existe un número positivo  $L$  tal que, para cualquier par de puntos  $(x, y_1)$   $(x, y_2)$  (de una misma vertical) tomados en  $R$ , se verifica  $\left| \frac{f(x, y_2) - f(x, y_1)}{y_2 - y_1} \right| < L$ .

De otro modo: el incremento relativo medio de la función  $f(x, y)$  entre dos puntos cualesquiera de una misma abscisa es *acotado*.

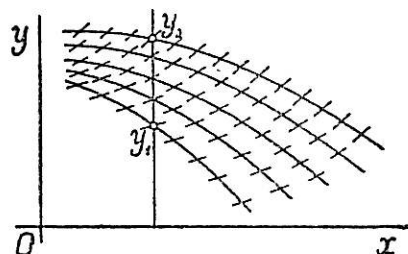
(\*) Si los segmentos de tangente son lo suficientemente pequeños y  $f(x, y)$  es continua podemos asegurar que un pequeño desplazamiento del punto hará variar *poco* la pendiente, lo que resuelve toda duda acerca del *sentido* en que debemos dirigir el nuevo segmento de tangente.

(\*\*) V. por ejemplo Vallée Poussin «Cours d'Analyse», tomo I.



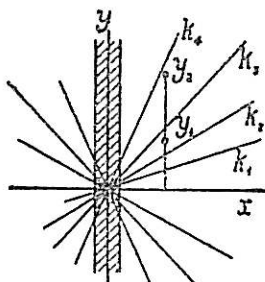
No crea el lector que esta es una condición muy exigente y de rara comprobación. Por ejemplo, si  $f(x, y)$  admite derivada  $f_y$  acotada en un dominio, en él se cumple la condición de Lipschitz, pues aplicando el teorema de los incrementos finitos equivale a  $|f'_y(x, \eta)| < L$ , siendo  $\eta$  comprendido entre  $y_1$  e  $y_2$  (\*).

**5. Curvas isoclinas.**—Podemos dar una representación intuitiva del campo de direcciones  $y' = f(x, y)$  y de la condición de Lipschitz con él relacionada, trazando las curvas  $K = f(x, y)$  llamadas *isoclinas*, por ser *lugares geométricos de puntos de igual pendiente de las curvas integrales*. De otro modo, a lo largo de cada isoclina los segmentitos que dan la dirección del campo son *paralelos* (de pendiente  $K$ ).



Interpretando las isoclinas como curvas de nivel de un terreno cuya cota es igual a la pendiente respectiva, la condición de Lipschitz expresa que la pendiente media de este terreno entre dos puntos *cualesquiera* situados en la dirección  $Oy$  es acotada en toda la región considerada.

Ejemplo: La ecuación diferencial del haz  $y = Cx^2$  es (§ 2)  $y' = 2y/x$ . Las isoclinas  $K = 2y/x$  son rectas que pasan por el origen. No basta con excluir este origen para asegurar que la condición de Lipschitz se cumple en el resto del plano puesto que la pendiente media entre dos puntos situados en la misma vertical es  $2 \frac{y_2 - y_1}{x} (y_2 - y_1) = 2/x$  y tiende a  $\infty$  al



tender  $x \rightarrow 0$ . Es preciso quitar del plano una faja (por estrecha que sea) formada por dos paralelas al eje  $y$  para poder asegurar el cumplimiento de la condición de Lipschitz en el exterior de ella.

Sin embargo, como dado un punto  $x_0, y_0$  cualquiera del plano (no situado en el eje  $y$ ) siempre es posible trazar una tal faja que le excluya y fuera de ella es además  $f(x, y)$  uniformemente continua en todo dominio finito, se cumplen las condiciones que aseguran la existencia y unicidad de la solución que pasa por  $x_0, y_0$  en un cierto entorno de este punto, lo que está de acuerdo con la naturaleza del haz.

**6. Método de aproximaciones sucesivas de Picard.**—Veamos, finalmente, una demostración de la existencia de la integral particular que pasa por un punto  $x_0, y_0$  mediante el proceso de aproximaciones sucesivas ideado por el prof. E. Picard. Como su nombre indica, se trata de un proceso de cálculo aproximado convergente, de gran interés teórico por suministrar demostraciones muy sencillas de existencia y constituir asimismo un método constructivo de la solución de utilidad práctica (\*\*).

(\*) La condición de Lipschitz no es esencial para la demostración de la existencia de la curva límite, bastando la continuidad *uniforme* de  $f$  en un dominio; pero es esencial para demostrar la unicidad de la curva integral por un punto. V. Bieberbach, «Differentialgleichungen».

(\*\*) El método es parecido al que en Algebra se denomina método de *iteración* para resolver ecuaciones algebraicas o trascendentes del tipo  $x = f(x)$  ( $f(x)$  supuesta derivable). Conviene recordarle aquí para poner de relieve la similitud. Se parte de un valor  $x_1$

Dada la ecuación *normal*

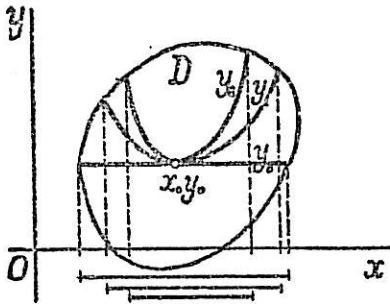
$$y' = f(x, y) \quad [1]$$

en la que supondremos  $f(x, y)$  continua y cumpliendo la condición de Lipschitz en un cierto dominio  $D$ , tratemos de hallar por *iteración* la solución que satisface a la condición inicial  $y_0 = y(x_0)$ . Partamos, para ello, de la función (constante)  $y = y_0$ ; sustituyámosla en el segundo miembro de la ecuación e integrémosla entre  $x_0$  y  $x$  formando la función

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx \quad [2]$$

que verifica  $y'_1 = f(x, y_0)$  y cuya curva representativa pasa por  $x_0, y_0$ , puesto que para  $x = x_0$  es  $y_1 = y_0$ .

Obsérvese que esta función  $y_1$  es continua en el intervalo de  $x$  determinado por el segmento de paralela a  $Ox$  trazado por  $x_0, y_0$ , interior al dominio (v. figura). Sustituída  $y_1$  en lugar de  $y$  en  $f(x, y)$  dará, por tanto, una función de  $x$  integrable en este intervalo o en otro más estrecho determinado por la variación total de  $x$  en el arco de la curva  $y_1$ , interior a  $D$ . Formemos, pues, la nueva función



$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1) dx$$

que será continua en dicho intervalo; y análogamente formemos

$$y_3 = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_2) dx$$

que se sabe o se supone aproximado a la raíz que se busca y se sustituye en el segundo miembro. Si fuese  $x_1 = f(x_1)$  sería  $x_1$  solución; de lo contrario se obtendrá:

$$\begin{aligned} \text{que sustituido nuevamente da} & \quad x_2 = f(x_1) \\ \text{y análogamente} & \quad x_3 = f(x_2) \\ & \quad x_4 = f(x_3) \end{aligned}$$

Veamos en qué condición la sucesión  $x_1, x_2, x_3 \dots$  converge hacia una raíz.

Si es  $|f'(x)| < K < 1$  en el intervalo en que se está calculando, podemos escribir

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| = |x_n - x_{n-1}| |f'(\xi_n)| < |x_n - x_{n-1}| K$$

y, por aplicación reiterada de esta desigualdad  $|x_{n+1} - x_n| < |x_2 - x_1| K^{n-1}$ .

Las diferencias entre dos términos consecutivos de la sucesión  $x_1, x_2, x_3 \dots x_n \dots$  van, pues, decreciendo y son menores en valor absoluto que los términos de una progresión geométrica de razón  $K < 1$ . De donde

$$x_{n+1} = x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \dots + x_{n+1} - x_n$$

tiende a un límite  $X$  al crecer  $n$  infinitamente, el cual es la solución buscada, pues de  $x_{n+1} = f(x_n)$  resulta por la continuidad de  $f$

$$\lim x_{n+1} = f(\lim x_n) \quad \text{es decir} \quad X = f(X)$$

Como se verá, la aplicación de la misma idea a la integración de una ecuación diferencial de primer orden, conduce al método de Picard.

que será continua en el intervalo anterior o en otro más estrecho determinado por la variación de  $x$  en el arco  $y_2$  interior a  $D$ . Y así sucesivamente

$$y_{n+1} = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_n) dx \quad (3)$$

Estudiemos ahora si la sucesión de funciones  $y_n$ , así definidas, tiene un límite al crecer  $n$  infinitamente.

Se tiene

$$y_{n+1} - y_n = \int_{x_0}^x [f(x, y_n) - f(x, y_{n-1})] dx$$

y, por verificarse la condición de Lipschitz, se tendrá para  $x > x_0$

$$|y_{n+1} - y_n| \leq \int_{x_0}^x |f(x, y_n) - f(x, y_{n-1})| dx < L \int_{x_0}^x |y_n - y_{n-1}| dx$$

Por tanto, si  $M$  es el valor máximo de  $|f(x, y)|$  en el dominio considerado, se tendrá

$$|y_1 - y_0| \leq \int_{x_0}^x |f(x, y_0)| dx < M|x - x_0|$$

$$|y_2 - y_1| < L \int_{x_0}^x |y_1 - y_0| dx < LM \frac{|x - x_0|^2}{2!}$$

$$|y_3 - y_2| < L \int_{x_0}^x |y_2 - y_1| dx < L^2 M \frac{|x - x_0|^3}{3!}$$

y análogamente

$$|y_{n+1} - y_n| < L^n M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Para  $x < x_0$  se llega a idénticas consecuencias invirtiendo los límites de las integrales. Ahora bien,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} - y_0 = (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \dots + (y_{n+1} - y_n) + \dots$$

serie *absoluta y uniformemente convergente* en toda porción finita del eje  $x$  por ser sus términos menores *en valor absoluto* que los de la siguiente serie potencial (convergente para todo valor de  $x$ )

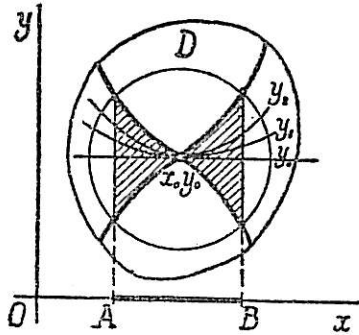
$$\frac{M}{L} \left[ L|x - x_0| + \frac{L^2|x - x_0|^2}{2!} + \frac{L^3|x - x_0|^3}{3!} + \dots \right] = \frac{M}{L} [e^{L|x - x_0|} - 1]$$

Existe, pues, la función  $Y(x) = \lim y_{n+1}$ , en un intervalo *finito* del eje  $x$ , bien sencillo de construir a posteriori geoméricamente (\*).

(\*) Es esencial probar que los intervalos sucesivos de existencia de las  $y_n$  (que como hemos dicho antes pueden estrecharse sucesivamente) no tienden a cero. Esta dificultad se resuelve en las demostraciones usuales efectuando las cuadraturas sucesivas en el interior de cierto rectángulo  $|x - x_0| \leq a$   $|y - y_0| \leq b$  interior al dominio, y elegido de modo que  $a$  y  $b$  cumplan la condición  $Ma < b$ . Pero no parece necesaria esta limitación *a priori*, que suele desconcertar al principiante por lo artificiosa, y preferimos sustituirla por la imagen geométrica indicada, no menos rigurosa pese a su carácter aparentemente intuitivo.



En efecto, la región  $|y - y_0| < \frac{M}{L} \left( e^{L|x-x_0|} - 1 \right)$  en que está situada la curva  $Y$  y todas las  $y_n$ , está limitada por la curva exponencial  $y - y_0 = \frac{M}{L} \left( e^{L(x-x_0)} - 1 \right)$  y sus simétricas



respecto del punto  $x_0, y_0$  y de las rectas  $x = x_0, y = y_0$ ; es decir, por cuatro curvas exponenciales, simétricas dos a dos, que pasan por  $x_0, y_0$ ; estas curvas definen en cualquier entorno circular  $x_0, y_0$ , interior a  $D$ , un intervalo  $AB$  en el eje  $x$  de existencia común de  $Y$  y de todas las  $y_n$  (v. figura).

Por otra parte, la sucesión  $y_n$  es *uniformemente convergente* en dicho intervalo y lo mismo le ocurre a la sucesión  $f(x, y_n)$  (\*) cuya integral será permutable, con el paso al límite; es decir (Tomo I, lecc. 11, § 9)

$$\lim \int_{x_0}^x f(x, y_n) dx = \int_{x_0}^x f(x, \lim y_n) dx$$

La función  $Y$  verifica, pues, la relación que resulta de pasar al límite la relación de recurrencia [3]

$$Y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, Y) dx \quad [4]$$

de donde resulta que  $Y$  cumple la ecuación diferencial

$$Y' = f(x, Y)$$

y la condición inicial de pasar por  $x_0, y_0$ ; es, pues, la solución buscada.

$Y$  no puede haber otra función que cumpla estas condiciones

$$\eta = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, \eta) dx \quad [5]$$

porque restando [4] y [5] resultaría

$$|Y - \eta| \leq \int_{x_0}^x |f(x, Y) - f(x, \eta)| dx < L \int_{x_0}^x |Y - \eta| dx = L\mu(x - x_0)$$

$\mu$ , valor medio de  $|Y - \eta|$  en el intervalo  $[x, x_0]$ ; de donde

$$\frac{|Y - \eta|}{\mu(x - x_0)} < L \quad [6]$$

desigualdad que habría de cumplirse para todos los valores de  $x$  de un cierto entorno de  $x_0$ . Ahora bien, al tender  $x \rightarrow x_0$   $|Y - \eta| : \mu \rightarrow 1$ , mientras  $L : (x - x_0) \rightarrow \infty$ , lo que contradice la acotación [6], a menos que sea idénticamente  $Y = \eta$ , como queríamos demostrar.

(\*) Por la continuidad *uniforme* de  $f(x, y)$  en el dominio  $D$ .

LECCIÓN 2.<sup>a</sup>—ECUACIONES DE VARIABLES SEPARADAS ECUACIONES  
HOMOGÉNEAS

**1. Ecuaciones integrables elementalmente.**—En la lección anterior hemos establecido la existencia de la integral particular de la ecuación diferencial  $y' = f(x, y)$  que pasa por un punto dado  $x_0, y_0$  (en condiciones muy amplias para  $f(x, y)$ ); y, por tanto, variando el punto inicial  $x_0, y_0$  queda probada la existencia del haz integral o integral general en el recinto en que se cumplen dichas condiciones.

Vamos a estudiar ahora algunos casos sencillos en los que es posible expresar la solución mediante las funciones elementales conocidas o cuando menos mediante cuadraturas efectuadas sobre funciones conocidas.

En el primer tomo nos ocupamos de hallar funciones primitivas, es decir, de resolver la más sencilla de las ecuaciones diferenciales  $y' = f(x)$  y vimos que sólo para tipos determinados de funciones  $f(x)$  era posible expresar la solución mediante las funciones elementales conocidas. Se comprende, con ello, cuán reducido será el número de ecuaciones diferenciales integrables mediante tales funciones.

En rigor, los analistas no aspiran a tanto; siguiendo la norma general de todo proceso matemático *reductivo*, consideran la ecuación diferencial integrada en cuanto consiguen expresar la solución, mediante un número finito de cuadraturas, es decir, mediante la determinación de ciertas funciones primitivas. El cálculo (exacto o aproximado) de éstas se efectuará de acuerdo con los métodos estudiados en el tomo I.

Pues bien, aun limitada a esta posibilidad la expresión de la solución, resulta el problema insoluble en la mayor parte de los casos. Sólo para algunos tipos muy contados de ecuaciones es viable la solución en el sentido apuntado y entonces diremos que la ecuación es *integrable elementalmente*. Pasemos rápida revista a los tipos más conocidos (\*).

Pueden seguirse dos criterios para clasificar las ecuaciones de primer orden. Un criterio es despejar  $y'$  en la ecuación, es decir, ponerla en la forma normal  $y' = f(xy)$  y observar la naturaleza del segundo miembro  $f(xy)$ . Otro criterio es poner la ecuación en la forma  $P(xy)dx + Q(xy)dy$  y observar la naturaleza de los coeficientes  $P$  y  $Q$ .

**2. Ecuaciones de variables separadas.**—Llámanse así las ecuaciones que pueden ponerse en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x)}{Q(y)}, \quad \text{es decir,} \quad Q(y)dy = P(x)dx$$

(\*) Toda exposición elemental, como ésta, tiene forzosamente un carácter casuístico. La caracterización teórica de los tipos integrables elementalmente exige recursos más elevados como la teoría de grupos de transformaciones de Lie, de la que damos una ligera iniciación al final de este capítulo

El coeficiente de  $dx$  es sólo función de  $x$ , el de  $dy$  es sólo función  $y$ .

La solución particular  $y=y(x)$  que pasa por  $x_0, y_0$  identificará ambos miembros  $y$ , por tanto, sus integrales tomadas a partir de los valores correspondientes  $x_0, y_0$ .

$$\int_{y_0}^y Q(y) dy = \int_{x_0}^x P(x) dx$$

El haz integral se expresará tomando integrales indefinidas y agregando a uno de los miembros una constante aditiva

$$\int Q(y) dy = \int P(x) dx + C$$

Claro es que a esta clase pertenecen también las ecuaciones del tipo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(y)}{P(x)} = \frac{1/P(x)}{1/Q(y)}$$

cuya integración da análogamente

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int \frac{dx}{P(x)} + C$$

**EJEMPLO: Reacciones bimoleculares.**—Según la ley de Guldberg-Waage, la velocidad de una reacción, es decir la cantidad de substancia obtenida o transformada en ella, es proporcional a las concentraciones de las substancias reaccionantes. Si, pues, dos substancias  $A$  y  $B$  en presencia, con concentraciones iniciales respectivas  $a$  y  $b$  moléculas por litro, reaccionan para formar con cada molécula de  $A$  y de  $B$  una molécula de una tercera substancia  $C$ , la velocidad de reacción, es decir en este caso el aumento de la concentración  $\gamma$  de  $C$  por unidad de tiempo, vendrá dada por la ecuación diferencial

$$\frac{d\gamma}{dt} = k(a - \gamma)(b - \gamma)$$

que, separando variables, da

$$\frac{d\gamma}{(\gamma - a)(\gamma - b)} = k dt$$

e integrada, suponiendo inicialmente nula la cantidad de  $C$  da

$$\frac{1}{a-b} \int_0^\gamma \left( \frac{1}{\gamma-a} - \frac{1}{\gamma-b} \right) d\gamma = k \int_0^\gamma dt, \quad \frac{1}{a-b} \left( l \frac{\gamma-a}{\gamma-b} - l \frac{a}{b} \right) = kt$$

**3. Advertencia acerca de la constante del haz integral.**—Es frecuente expresar en distintas formas el haz integral, variando la expresión de la constante, es decir, sustituyendo  $C$  por  $\varphi(K)$ ,  $K$  nueva constante. Pero para afirmar que el haz es el mismo es preciso asegurarse de que no se han añadido ni quitado curvas integrales en la sustitución: es decir, que a cada valor de  $C$  corresponde uno de  $K$  y viceversa.

Sea, por ejemplo, la ecuación  $\frac{dy}{dx} = y$ , que es de variables separadas  $\frac{dy}{y} = dx$ , y puede integrarse poniendo

$$\left. \begin{aligned} ly &= x + C \\ y &= e^{x+c} \end{aligned} \right\} \text{ o bien } \left\{ \begin{aligned} ly &= x + lK \\ y &= Ke^x \end{aligned} \right.$$

Los dos haces son sólo equivalentes suponiendo en el segundo  $K > 0$ , y, sin embargo, para valores negativos de  $K$  se obtienen asimismo soluciones situadas en el semiplano  $y < 0$ . La validez de estas soluciones no puede atribuirse a una extrapolación injustificada de los valores de  $K$  (como suele admitirse de ordinario) sino que resulta de un análisis más cuidadoso de la integración. Si ponemos, en efecto,  $\frac{dy}{y} = \frac{-dy}{-y}$  observaremos que tiene dos primitivas  $l(+y)$  y  $l(-y)$ , esta última válida para valores negativos de  $y$ . Por lo tanto, el haz integral deberá escribirse

$$\pm y = e^{x+c} \quad \text{o bien} \quad \pm y = Ke^x \quad \text{con} \quad K > 0$$

lo que en definitiva equivale a escribir

$$y = Ke^x \quad \text{admitiendo para } K \text{ valores } \geq 0$$

Este es, pues, el haz integral de  $y' = y$  en todo el plano, incluido el eje  $x$  ( $K = 0$ ), pues para cada par de valores  $x_0, y_0$  se tiene un valor de  $K = y_0 : e^{x_0}$ , y por consiguiente una curva integral particular.

NOTA.—Obsérvese que el valor  $K = 0$  en el segundo haz del ejemplo corresponde al valor límite  $C = -\infty$  del primero. Para no perder la equivalencia de los haces en éste y otros casos análogos *convendremos en considerar como integrales particulares pertenecientes al haz las curvas que resultan de su ecuación al hacer tender la constante a  $+\infty$  o  $-\infty$  si tales curvas existen y satisfacen a la ecuación diferencial.*

Generalizando estas consideraciones: Toda ecuación de la forma ( $\psi$  integrable)  $\frac{d\varphi(y)}{\varphi(y)} = \psi(x)$  se integrará poniendo  $\varphi(y) = Ke^{\int \psi(y) dx}$  con  $K \geq 0$ .

EJEMPLO 1.º Hallar las curvas que forman un ángulo constante  $\mu$  con el radio vector que une cada uno de sus puntos con uno fijo  $O$ .

Tomando coordenadas polares con polo en  $O$ , la ecuación polar  $r = r(\theta)$  de la curva se halla fácilmente porque, según vimos en tomo I (Lecc. 31),

$$\operatorname{tg} \mu = r : \frac{dr}{d\theta} = \frac{rd\theta}{dr}$$

Ecuación diferencial de variables separadas que da

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\theta}{\operatorname{tg} \mu}, \quad r = e^{m(\theta + c)} \quad \text{o bien} \quad r = Ke^{m\theta}$$

habiendo puesto  $m = 1 : \operatorname{tg} \mu$ . (Admitidos sólo valores  $r > 0$  será aquí  $K > 0$ .)

El haz integral está, pues, formado por *espirales logarítmicas*. Las dos formas distintas en que se ha presentado la constante nos indica que de una espiral se puede pasar a otra en dos formas equivalentes

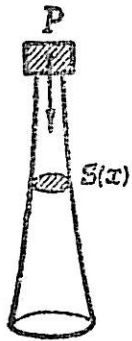
1.<sup>a</sup> Agregando una constante  $C$  al argumento. Dos espirales son congruentes, pudiendo obtenerse una de otra por un simple giro.

2.<sup>a</sup> Multiplicando el radio vector por una constante  $K$ . Dos espirales son homotéticas respecto del origen (\*). Obsérvese además que cada espiral es homotética de sí misma en infinitas homotecias de razón  $e^{2nm\pi}$  siendo  $n$  entero, pues al aumentar el argumento en  $2\pi$  el módulo queda multiplicado por  $e^{2m\pi}$

4. **Perfil de igual resistencia.**—Supongamos una columna sosteniendo un peso  $P$ . Este peso produce una presión en la base superior de  $P/S_0$ , siendo  $S_0$  la superficie de dicha base. A la distancia  $x$  de ésta la sección, de área  $S(x)$ , soporta el peso  $P$  más el de la porción de columna que tiene encima  $\delta \int_0^x S(x) dx$  ( $\delta$  peso específico), sufriendo una presión  $= \left( P + \delta \int_0^x S(x) dx \right) / S(x)$

Si nos dan la forma de la columna podremos averiguar  $S(x)$  (constante en el caso de columna cilíndrica) y, por tanto, la variación de la presión a lo largo de la columna.

Si, recíprocamente, queremos que esta presión obedezca a una ley prefijada, por ejemplo que sea *uniforme*  $=k$ , se habrá de tener



$$kS(x) = P + \delta \int_0^x S(x) dx$$

y derivando  $kS'(x) = \delta S(x) \quad \frac{S'(x)}{S(x)} = \frac{\delta}{k}$

de donde  $S = Ce^{\frac{\delta}{k}x}$

y como para  $x=0$ ,  $S_0=C$  resulta  $S = S_0 e^{\frac{\delta}{k}x}$

que da la variación de la sección para que la columna tenga igual resistencia a la compresión en toda su longitud. Si la columna es de revolución, de la variación de  $S$  deducimos la del radio, pues se tendrá

$$\pi R^2 = \pi R_0^2 e^{\frac{\delta}{k}x} \quad \text{de donde} \quad R = R_0 e^{\frac{\delta}{2k}x}$$

Más general, si queremos que la presión varíe a lo largo de la columna según una ley prefijada  $f(x)$  (con  $f(0)=P/S_0$ ) se tendrá

$$f(x)S(x) = P + \delta \int_0^x S(x) dx$$

Derivando,  $fS' + f'S = \delta S$ , de donde

$$\frac{S'}{S} = \frac{\delta}{f(x)} - \frac{f'(x)}{f(x)}$$

(\*) No debe causar extrañeza al principiante el hecho de que dos curvas se puedan relacionar a un tiempo por dos transformaciones distintas, pues todo depende de la elección de puntos homólogos.

Por integración;

$$S = \frac{C}{f(x)} e^{\delta \int_0^x \frac{dx}{f(x)}}$$

y teniendo en cuenta que  $f(0)=P:S_0$ , resulta  $C=P$ , y por tanto

$$S = \frac{P}{f(x)} e^{\delta \int_0^x \frac{dx}{f(x)}}$$

**5. Ecuaciones homogéneas.**— Son aquéllas en las que  $y'$  = una función homogénea de grado cero de  $x$ ,  $y$ . Pueden presentarse en las dos formas :

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

o bien

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad y' = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

siendo  $P$  y  $Q$  funciones homogéneas del mismo grado en  $x$ ,  $y$ .

*Interpretación geométrica:* Las isoclinas del campo de direcciones  $K=f\left(\frac{y}{x}\right)$  son rectas que pasan por el origen  $\frac{y}{x}=\varphi(K)$  ( $\varphi$  inversa de  $f$ ).

La forma de la ecuación sugiere el cambio de función  $\frac{y}{x}=u$ , es decir,  $y=ux$ , del que resulta la siguiente ecuación en  $u$

$$u + \frac{du}{dx}x = f(u)$$

que es de variables separadas

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{f(u) - u} \quad \text{y da} \quad x = Ce^{\int \frac{du}{f(u) - u}} = C\psi(u)$$

y finalmente  $y=ux=Cu\psi(u)$ , con lo que se obtiene el haz integral en función del parámetro  $u=\frac{y}{x}$

Esto permite expresar fácilmente las curvas integrales en coordenadas polares  $r$ ,  $\theta$ , pues siendo  $u=\text{tg } \theta$ , se tendrá :

$$r \cos \theta = C\psi(\text{tg } \theta), \quad \text{o sea} \quad r = C\Psi(\theta)$$

Al variar  $C$  resulta : *Todas las curvas del haz integral son homotéticas entre sí respecto del origen.* Tal es, pues, la propiedad geométrica de todo haz cuyas curvas tienen tangentes paralelas a lo largo de las rectas concurrentes en el origen.



**EJEMPLO:** Un avión  $P$  vuela horizontalmente a velocidad fija  $v$  en dirección a un punto  $O$ , donde suponemos el origen de coordenadas; pero le desvía un fuerte viento de velocidad  $w < v$  y dirección constante que supondremos coincidente con la del semi-eje  $+x$ . Se trata de hallar la trayectoria del avión.

De la figura se desprende la proporcionalidad

$$\frac{x + (-y/y')}{OP} = \frac{w}{v} = k$$

y, por tanto, la ecuación

$$x - y/y' = k\sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{o sea} \quad -\frac{dy}{dx} = \frac{y}{k\sqrt{x^2 + y^2} - x}$$

que es homogénea y cuya integración efectuaremos más cómodamente invirtiendo las variables y tomando  $\frac{x}{y} = u$   $dx = u dy + y du$ , con lo que resulta

$$u dy + y du = (u - k\sqrt{u^2 + 1}) dy, \quad \text{o sea} \quad \frac{dy}{y} = -\frac{du}{k\sqrt{u^2 + 1}}$$

de donde

$$kC + ly = -\frac{1}{k} \text{Arg Sh } u, \quad u = \text{Sh}[-klCy] = \frac{1}{2} \left[ e^{-klCy} - e^{klCy} \right] = \frac{1}{2} [(Cy)^{-k} - (Cy)^{+k}]$$

y finalmente

$$Cx = \frac{1}{2} [(Cy)^{1-k} - (Cy)^{1+k}]$$

**6. Ecuaciones reducibles a homogéneas.**—Las ecuaciones de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right)$$

son homogéneas si  $c=c'=0$ . Si  $c$  y  $c'$  no son ambos nulos y las rectas  $ax + by + c = 0$ ,  $a'x + b'y + c' = 0$  se cortan en el punto  $\alpha\beta$ , o sea que  $a\alpha + b\beta + c = 0$ ,  $a'\alpha + b'\beta + c' = 0$ , este caso se reduce al anterior efectuando una traslación de ejes  $x = X + \alpha$ ,  $y = Y + \beta$  que lleve el origen al punto  $\alpha\beta$ . Pues entonces la ecuación se transforma en la homogénea

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + bY}{a'X + b'Y}\right)$$

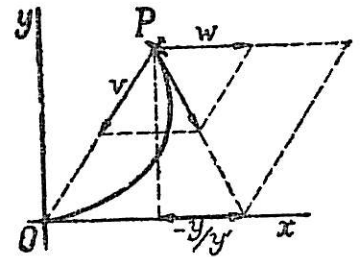
Si  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$  ( $=r$ ) las rectas antedichas son paralelas y la transformación no es válida, pero entonces

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{r(a'x + b'y) + c}{a'x + b'y + c'}\right)$$

y la transformación  $Y = a'x + b'y$  da

$$\frac{dY}{dx} = a' + b'f\left(\frac{rY + c}{Y + c'}\right) = \psi(Y)$$

que es de variables separadas.



EJEMPLO 1.º:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x-1}{x+y-1}$$

El sistema  $y-x-1=0$   $x+y-1=0$  da la solución  $\alpha=0$   $\beta=1$ .La transformación  $x=X$   $y=Y+1$  conduce a la ecuación homogénea

$$\frac{dY}{dX} = \frac{Y-X}{X+Y}$$

ecuación que integrada según § 5, da

$$\text{arc tg } \frac{Y}{X} + \frac{1}{2} \ln(X^2 + Y^2) = C$$

o sea

$$\text{arc tg } \frac{y-1}{x} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2 - 2y + 1) = C$$

EJEMPLO 2.º:  $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x+y-1}$  mediante  $x+y=Y$  se transforma en

$$Y' - 1 = \frac{Y+1}{Y-1}, \quad Y' = \frac{2Y}{Y-1}, \quad dx = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{Y}\right) dY$$

de donde

$$x + C = \frac{1}{2} Y - \frac{1}{2} \ln Y = \frac{1}{2} (x+y) - \frac{1}{2} \ln(x+y)$$

7. Ecuaciones de coeficientes lineales.—Consideremos las ecuaciones generales de la forma

$$(mx + ny + a)dx = (px + qy + b)dy$$

o sea

$$\frac{dy}{dx} = \frac{mx + ny + a}{px + qy + b} \quad [1]$$

y en especial aquellas en que  $a=b=0$ , es decir las homogéneas

$$\frac{dy}{dx} = \frac{mx + ny}{px + qy} \quad [2]$$

Haciendo en ésta el cambio  $y=ux$  resulta

$$\frac{dx}{x} = - \frac{(p + qu) du}{qu^2 + (p - n)u - m} \quad [3]$$

Vamos a estudiar con algún detenimiento el haz integral según la naturaleza del trinomio denominador.

I. Supongamos  $(p-n)^2 + 4mq > 0$ , es decir reales y distintas las raíces  $\alpha$ ,  $\beta$  de dicho trinomio. Se tendrá

$$\frac{dx}{x} = - \frac{(p + qu) du}{q(u - \alpha)(u - \beta)} = \frac{-u - \frac{p}{q}}{(u - \alpha)(u - \beta)} du \quad [4]$$

y descomponiendo el segundo miembro en fracciones simples

$$\frac{dx}{x} = \frac{A}{u - \alpha} du + \frac{B}{u - \beta} du \quad \text{con} \quad \begin{cases} A = - \frac{q\alpha + p}{(\alpha - \beta)q} \\ B = \frac{q\beta + p}{(\alpha - \beta)q} \end{cases} \quad A + B = -1$$



de donde integrando (teniendo en cuenta § 3)

$$Cx = (u-a)^A (u-\beta)^B$$

Multiplicando los dos miembros por  $x^{-1} = x^{A+B}$  y recordando que  $ux = y$

$$C = (y-ax)^A (y-\beta x)^B$$

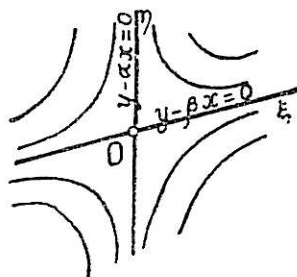
Para representar este haz integral hagamos la transformación homográfica afín

$$\begin{aligned} y - ax &= \xi \\ y - \beta x &= \eta \end{aligned}$$

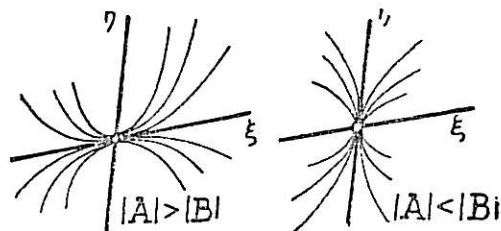
y queda

$$\xi^A \eta^B = C, \text{ que escribiremos } \begin{cases} \eta = C \xi^{-\frac{A}{B}} & \text{si } |A| > |B| \\ \xi = C \eta^{-\frac{B}{A}} & \text{si } |B| > |A| \end{cases} \quad [5]$$

Si  $A$  y  $B$  son del mismo signo se obtienen haces de curvas con ramas de tipo hiperbólico, cuyas asíntotas son los ejes  $\xi$ ,  $\eta$ ; es decir, las rectas  $y=ax$ ,  $y=\beta x$  en el plano  $xy$ . Estas asíntotas son ellas mismas soluciones de la ecuación, como es fácil comprobar.



$A$  y  $B$  de igual signo.



$A$  y  $B$  de signos contrarios.

Si  $A$  y  $B$  son de signos contrarios (\*), las curvas integrales pasan por el origen, siendo tangentes en él al eje  $\xi$  (recta  $y=\beta x$ ) si  $|A| > |B|$  y al eje  $\eta$  (recta  $y=ax$ ) si  $|A| < |B|$ .

II. Si  $(p-n)^2 + 4mq < 0$ ,  $a$ ,  $\beta$  son imaginarias

$$a = \lambda + \mu i \quad \beta = \lambda - \mu i$$

La ecuación [3] se transforma en

$$\frac{dx}{x} = - \frac{(p+qu) du}{q[(u-\lambda)^2 + \mu^2]}$$

que integrada da

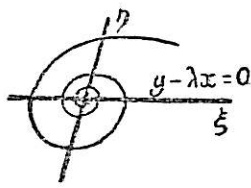
$$lx + \frac{1}{2} l[(u-\lambda)^2 + \mu^2] + \frac{\lambda + \frac{p}{q}}{\mu} \text{arc tg } \frac{u-\lambda}{\mu} = lC$$

o sea, restituyendo la función  $y=ux$ ,

$$lC = \frac{1}{2} l[(y-\lambda x)^2 + \mu^2 x^2] + \frac{q\lambda + p}{q\mu} \text{arc tg } \frac{y-\lambda x}{\mu x}$$

(\*) Es fácil comprobar que  $AB = (mq - np) : (a-\beta)^2 q^2$  y, por tanto, que  $A$ ,  $B$  son de igual o diferente signo según que  $mq \gtrless np$ .

La transformación homográfica afín  $\mu x = \xi$   $y - \lambda x = \eta$  da



$$IC = \frac{1}{2} l(\xi^2 + \eta^2) + k \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\eta}{\xi} \quad \left( k = \frac{q\lambda + p}{2q} \right)$$

en polares

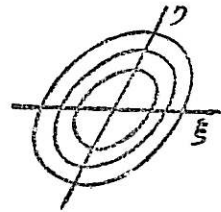
$$lr + k\theta = IC$$

o sea

$$r = Ce^{-k\theta} \quad [6]$$

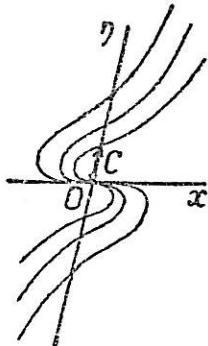
Las soluciones en el plano  $\xi\eta$  son, pues, curvas espirales con un punto asintótico en el origen, y lo mismo ocurre en el plano  $xy$ , pues la transformación afín usada no altera el carácter asintótico del origen. (Las curvas integrales son, pues, transformadas afines de las espirales logarítmicas [6].)

En el caso particular  $k=0$ , las curvas del plano  $\xi\eta$  son circunferencias  $r=C$ , y las del plano  $xy$  serán *elipses*  $(y-\lambda x)^2 + \mu^2 x^2 = C^2$ . La condición  $k=0$  es  $q\lambda + p = 0$ , o sea  $-\frac{p}{q} = \lambda = \frac{n-p}{2q}$  [parte real de las raíces del trinomio (3)] que se reduce a  $p = -n$ .



Esta es, pues, la condición para que, en este caso, las integrales de la ecuación dada [1] sean *curvas cerradas*.

III. Si  $(p-n)^2 + 4mq = 0$  las raíces de [4] son iguales ( $\alpha = \beta$ ) y la ecuación



$$\frac{dx}{x} = - \frac{(p + qu) du}{q(u - \alpha)^2}$$

da integrada

$$lx = -l(u - \alpha) + \frac{\alpha + \frac{p}{q}}{u - \alpha} + IC$$

o sea,

$$\frac{kx}{y - ax} = l(y - ax) - IC \quad \left( k = \alpha + \frac{p}{q} \right)$$

que mediante la transformación afín  $y - ax = \eta$ ,  $kx = \xi$  se reduce a  $\xi = \eta l \frac{\eta}{C}$  y representa un haz de curvas tangentes en el origen al eje  $x$  ( $\xi$ ).

Obsérvese, en resumen, la singularidad del haz en el origen de coordenadas. Por él o pasan infinitas curvas del haz o no pasa ninguna.

8. **Puntos singulares.**—La singularidad del haz en el origen para la ecuación [2] se debe a *anularse en él el numerador y denominador del segundo miembro de la ecuación diferencial*, y por tanto no se le puede aplicar el teorema de existencia, por no estar definido en él dicho miembro.

El estudio efectuado tiene gran interés teórico porque puede ser aplicado a ecuaciones de la forma general

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

en el entorno de los puntos singulares, en que  $y'$  no está determinada por anularse simultáneamente  $P(xy)$  y  $Q(xy)$ . Si  $x_0 y_0$  es uno de tales puntos y suponemos que ninguna de las dos parejas de derivadas parciales  $P_x P_y$ ,  $Q_x Q_y$  se anula simultáneamente en  $x_0 y_0$ , al desarrollar en serie de Taylor  $P$  y  $Q$  en el entorno de  $x_0 y_0$ , quedará (por haber supuesto  $P(x_0 y_0) = Q(x_0 y_0) = 0$ ).


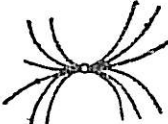


$$y' = \frac{P_x(x_0 y_0)(x - x_0) + P_y(x_0 y_0)(y - y_0) + \dots}{Q_x(x_0 y_0)(x - x_0) + Q_y(x_0 y_0)(y - y_0) + \dots}$$

Los puntos suspensivos designan términos con potencias superiores de  $(x-x_0)$  e  $(y-y_0)$ . Si, en primera aproximación, prescindimos de dichos términos, queda una ecuación diferencial de la forma [1] del párrafo anterior, y trasladando el origen en el punto  $x_0, y_0$ , quedará en la forma [2].

En los tratados especiales (\*) se demuestra rigurosamente lo que la intuición nos dicta, a saber que: En un entorno suficientemente pequeño del punto singular  $x_0, y_0$ , la configuración del haz integral es cualitativamente del mismo carácter que la del haz integral de la ecuación (que resulta de considerar los términos lineales y trasladar el origen al punto  $x_0, y_0$ ).

$$\frac{dY}{dX} = \frac{P_{x_0} X + P_{y_0} Y}{Q_{x_0} X + Q_{y_0} Y} \quad \left( \text{se supone } \begin{vmatrix} P_{x_0} & P_{y_0} \\ Q_{x_0} & Q_{y_0} \end{vmatrix} \neq 0 \right)$$

Por tanto, con las derivadas de  $P$  y  $Q$ , tomadas en el punto singular  $x_0, y_0$ , de acuerdo con la discusión del § 7, podemos clasificar los puntos singulares definidos por el sistema  $P(x, y)=0$   $Q(x, y)=0$  en los siguientes tipos (\*\*)

$(P_y - Q_x)^2 + 4P_x Q_y > 0$	}	$P_x Q_y > P_y Q_x$	<b>Puerto:</b> Haz formado por curvas con dos asíntotas comunes concurrentes en dicho punto.	
		$P_x Q_y < P_y Q_x$	<b>Nodo:</b> Haz formado por curvas concurrentes en dicho punto.	
$(P_y - Q_x)^2 + 4P_x Q_y < 0$	}		<b>Foco:</b> Haz formado por curvas espirales alrededor de dicho punto.	
			<b>Centro:</b> Haz formado por curvas cerradas alrededor del punto.	

La distinción entre centros y focos, es decir el carácter cerrado o no de las curvas integrales, cuando éstas rodean el punto singular no puede ya dilucidarse por la simple consideración de las derivadas primeras (\*\*\*)

*Nota.*—Unas sencillas consideraciones de carácter geométrico permiten intuir la disposición de las curvas integrales en los casos I y II del § 7 sin efectuar la integración. Interpretemos, para ello, la ecuación diferencial como una proyectividad entre dos haces definidos por las pendientes:  $y'$  de la curva integral y  $u = \frac{y}{x}$  del radio vector por el origen. Esta proyectividad  $y' = \frac{m+nu}{p+qu}$  tiene las direcciones dobles dadas por la ecuación  $qu^2 + (p-n)u - m = 0$ .

Si  $(p-n)^2 + 4qm > 0$  existen dos direcciones dobles, pero ello puede ocurrir siendo los haces discordes o acordes. En el primer caso  $y'$  decrece al crecer  $u$  y la curva

(\*) V. por ejemplo: Bieberbach, «Differentialgleichungen».

(\*\*) Recuerdese la nota al pie de la pág. 18.

(\*\*\*) Para un estudio más detallado de la cuestión puede ver el lector la obra citada de Bieberbach, Cap. II, § 6. Las conferencias de Dulac en Madrid 1931-32 «Curvas definidas por una ecuación diferencial de primer orden y primer grado» o las memorias originales de Bendixson, Poincaré, etc., cuya referencia verá en las citadas obras.

es constantemente convexa respecto del origen (*puerto*). En el segundo caso la curva es cóncava, el radio vector coincide con la tangente en el origen, donde existe una raíz doble de la proyectividad mencionada y otra en el punto impropio de la otra dirección doble. (A menos que sean dobles todas las direcciones  $y' = \frac{y}{x}$  que da el haz de rectas  $y=Cx$ ) Es el caso en que el origen es *nodo*.

Si  $(p-n)^2 + 4qm < 0$  no hay direcciones dobles, los haces son acordes y las curvas integrales rodean el origen sin pasar por él. Si la curva integral no cierra después de una vuelta la espira obtenida se repetirá homotéticamente (por la naturaleza homogénea de la ecuación) a cada nueva vuelta, y se engendra la espiral (origen *foco*). Pero si la proyectividad es involutiva ( $p=-n$ ) la simetría de las variaciones de  $y'$  ocasiona la simetría de la curva, que resulta, por tanto, cerrada. El origen es *centro*. Es el caso de la elipse y la involución de direcciones conjugadas.

### EJERCICIOS (Lecc. 1.<sup>a</sup> y 2.<sup>a</sup>)

1. Hallar la ecuación diferencial a la que satisfacen todas las curvas del haz  $y=Cx^f$  en el que se considera  $f$  constante y  $C$  parámetro.
2. Id. suponiendo  $f$  parámetro y  $C$  constante.
3. Ecuación diferencial a la que satisfacen todas las circunferencias de radio 1 y centro en la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.
4. Ecuación diferencial a la que satisfacen todas las parábolas cuya directriz es el eje  $y$  y cuyos focos distan de ella la unidad.
5. Dibujar el campo de direcciones definido por la ecuación diferencial  $y' + x/y = 0$  y deducir de él el haz de isoclinas y el haz integral.
6. Hallar el haz integral y decir la naturaleza del punto singular origen en la ecuación diferencial  $(x+4y)dx - 3x dy = 0$ .
7. Id. en la ecuación  $(-2x+y)dx = (4x+y)dy$ .
8. Id. en la ecuación  $(y-x)dx = (3x+y)dy$ .
9. Id. en la ecuación  $(2x+4y)dx = (2x-y)dy$ .
10. Integrar  $(2x+3y)dx + (y+2)dy = 0$ .
11. Id.  $(2x-y+2)dx + (4x-2y-1)dy = 0$ .
12. Id.  $(x+y)dx + (x+y-2)dy = 0$ .
13. Id.  $(2x+y+9)dx + (2x+y+6)dy = 0$ .
14. Id.  $(x^2+y^2)dx = 2xy dy$ .
15. Id.  $2xy dx = (3x^2-y^2)dy$ .
16. Id.  $x dy - y dx = \sqrt{x^2+y^2} dx$ .
17. Id.  $x dy - y dx = \sqrt{y^2-x^2} dx$ .
18. Id.  $\left(x \operatorname{sen} \frac{y}{x} - y \cos \frac{y}{x}\right) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0$
19. Curvas en las cuales el punto de contacto de cada tangente biseca el segmento de la misma comprendido entre los ejes.
20. Curvas en las cuales cada punto biseca el segmento de normal que pasa por el comprendido entre los ejes.
21. La porción de cada tangente a una curva, comprendida entre ésta y el eje  $y$  queda bisecada por el eje  $x$ . Hallar la ecuación de la curva sabiendo que pasa por el punto (3,2).
22. Curvas en las que el ángulo del radio vector con la tangente es igual al ángulo polar.
23. Curvas en las que el ángulo del radio vector con la tangente es un tercio del que forma ésta con el eje polar.
24. Perfil de unas tijeras cuyas dos hojas formen ángulo constante al cortar.
25. Curvas cuya subnormal es proporcional al cuadrado de la ordenada.
26. Curvas cuya subnormal es proporcional a la  $n^{\text{a}}$  potencia de la abscisa.
27. Curvas cuya subtangente polar es proporcional al radio vector. Id. para la subnormal.
28. Hallar todas las curvas  $y=f(x)$  que cumplen esta condición:  
El volumen engendrado por el trapezoide limitado por la curva entre  $O$  y  $x$  al girar alrededor del eje  $x$  es igual al del cilindro engendrado por el rectángulo de base  $Ox$  y de altura  $f(x)$ : 2.
29. Un punto recorre la curva  $y=x^2$  a la velocidad constante de 10 cm/sg. Obtene.

las ecuaciones del movimiento  $x=f(t)$ ,  $y=\varphi(t)$ , sabiendo que en el instante inicial pasa por el origen.

30. Tiempo que tarda en vaciarse un depósito esférico de 2 m de diámetro por un orificio de sección  $s=2\text{ cm}^2$ , situado en la parte inferior. (Se supondrá que la vena líquida no se contrae al salir.)

31. Forma que tiene que darse a la sección meridiana de un depósito de revolución vertical para que la velocidad de descenso del nivel del agua, al vaciarse por un orificio situado en el fondo, sea constante (reloj de agua).

32. Averiguar la ley de crecimiento de un capital  $C$  supuesto colocado a interés compuesto *continuo* (interés acumulado al capital en cada instante) correspondiente al interés simple del  $r$  por uno anual. Compárese con el interés compuesto ordinario.

33. Tiempo que tardaría un capital  $C$  para ser doblado, triplicado, etc., al interés continuo del  $r$  por uno.

34. Admitiendo que la velocidad de enfriamiento de un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperatura entre dicho cuerpo y el medio que le rodea, y sabiendo que un cuerpo en el aire, de temperatura fija  $20^\circ$ , ha tardado veinte minutos en enfriarse de  $100^\circ$  a  $60^\circ$ ; hallar la ley de enfriamiento y calcular el tiempo que tardará en enfriarse a  $30^\circ$ .

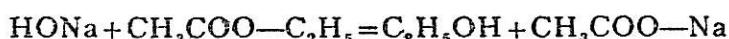
35. Un depósito está lleno inicialmente con  $100\text{ m}^3$  de agua salada de concentración de  $1,5\text{ kg}$  de sal por  $\text{m}^3$ . Una tubería empieza a verter en este depósito un caudal de agua salada de  $2\text{ m}^3$  por minuto con la concentración de  $1\text{ kg}$  por  $\text{m}^3$ , mientras sale simultáneamente por un orificio de desagüe el agua mezclada sobrante. Suponiendo la mezcla homogénea en todo instante, calcular la concentración del agua del depósito al cabo de una hora.

36. El aire de una clase recién vaciada de dimensiones  $12 \times 8 \times 4\text{ m}$  contiene  $0,12\%$  de su volumen de  $\text{CO}_2$ . Se desea renovar en 10 minutos el aire, de modo que llegue a contener solamente el  $0,06\%$  de  $\text{CO}_2$ . Calcular el número de  $\text{m}^3$  por minuto que deben renovarse, suponiendo que el aire exterior contiene  $0,04\%$  de  $\text{CO}_2$ . (También se supondrá en este problema el aire homogéneo en todo instante.)

37. En la saponificación del acetato de etilo por la sosa, Reicher obtuvo las siguientes concentraciones del ester y de la sosa después de distintos tiempos:

$t$ (minutos) ... ..	0	393	669	1010	1265
Sosa (en mols) ... ..	0,5638	0,4866	0,4467	0,4113	0,3879
Acetato de etilo (mols)..	0,3114	0,2342	0,1943	0,1589	0,1354

Sabiendo que se trata de la reacción bimolecular



hallar la variación teórica de la concentración del alcohol formado, deduciendo de ella la de las concentraciones de álcali y ester y compruébese con los valores experimentales.

Se hallará la constante de integración con los datos extremos, y se comprobarán los intermedios.)

38. La población de un cierto país era en un cierto momento histórico de 100 millones de habitantes. Su velocidad de crecimiento era en aquel momento tal que, en la hipótesis de ser en todo instante proporcional a la población existente, hubiera sido capaz de doblar la población del país en 50 años. Investigaciones más profundas hicieron más plausible la hipótesis de ser el referido crecimiento proporcional en cada instante no sólo a la población  $x$  existente, sino también a la diferencia entre esta población y una población tope que se estimó en 300 millones, como máxima admisible en el país. Aceptada esta ley se pregunta cuánto tardaría en doblarse la población.

39. Está nevando con regularidad. A las doce sale una máquina quitanieves que recorre en la primera hora 2 kilómetros y en la segunda uno solo. ¿A qué hora empezó a nevar? (Se admitirá como hipótesis plausible que la cantidad de nieve quitada por la máquina en unidad de tiempo es uniforme, de modo que su velocidad de avance resulta inversamente proporcional a la altura de nieve encontrada en el camino) (\*).

40. Si  $\rho$  es la densidad del aire a la altura  $h$  el incremento de presión al pasar de la altura  $h$  a la  $h-dh$  es el peso una columna de aire de base unidad y altura  $dh$ , es decir,  $d\phi = -\rho dh$ . Combinando esta relación con la ley de expansión isoterma  $p\phi = k$  (de la que resulta  $\phi = C\rho$ ) o con la adiabática  $p\phi^{1,41} = k$  (de la que resulta  $\phi = C\rho^{1,41}$ ) obtener sendas leyes teóricas de variación de la presión con la altura. (Leyes lejanas de la realidad por no tener en cuenta la variación de la densidad por efecto de la temperatura.)

(\*) Este bello problema está tomado de la obra de Agnew «Differential equations» Los demás son variantes de enunciados comunes a muchas colecciones: Phillips, Hitchcock, Kelis, etc.



LECCIÓN 3.<sup>a</sup>—DIFERENCIALES EXACTAS. FACTOR INTEGRANTE

**1. Integración de diferencia es exactas.**—Dijimos en la lección 1.<sup>a</sup> que todo haz de la forma  $C = \varphi(x, y)$  tiene por ecuación diferencial  $d\varphi = 0$ , es decir,  $\varphi_x dx + \varphi_y dy = 0$ .

Recíprocamente, si una ecuación diferencial de primer orden puesta en la forma

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad [1]$$

cumple la condición  $P_y = Q_x$  necesaria y suficiente para que sea su primer miembro diferencial total exacta de una cierta función primitiva  $U(x, y)$  la integración de dicha ecuación se efectuará hallando dicha primitiva (tomo I, lec. 20) e igualándola a una constante

$$U(x, y) = C$$

EJEMPLO: La ecuación estudiada en lec. 2.<sup>a</sup>, § 7, caso  $p = -n$ , se puede escribir en la forma [1]

$$(mx + ny)dx + (nx - qy)dy = 0 \quad \text{siendo} \quad \begin{cases} P = mx + ny \\ Q = nx - qy \end{cases} \quad P_y = Q_x = n$$

Igualando la función primitiva del primer miembro a una constante se obtiene

$$\frac{1}{2}mx^2 + nxy - \frac{1}{2}qy^2 = C \quad \text{haz de cónicas.}$$

Si  $n^2 + mq < 0$ , se trata del haz de elipses obtenido en el caso II del § 7.

He aquí cuatro combinaciones integrables, muy elementales y frecuentes, que conviene recordar.

$$\begin{array}{lll} x dy + y dx = 0 & \text{integral} & xy = C \\ \frac{x dy - y dx}{x^2} = 0 & \text{,} & \frac{y}{x} = C \\ \frac{x dy - y dx}{y^2} = 0 & \text{,} & \frac{x}{y} = C \\ \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0 & \text{,} & \text{arc tg } \frac{y}{x} = C \\ \frac{x dy - y dx}{x^2 - y^2} = 0 & \text{,} & \text{arg Th } \frac{y}{x} = C \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} xy = C \\ \frac{y}{x} = C \\ \frac{x}{y} = C \\ \text{arc tg } \frac{y}{x} = C \\ \text{arg Th } \frac{y}{x} = C \end{array}} \right\} \text{haces equivalentes}$$

Estos cuatro últimos haces integrales son equivalentes, como consecuencia de ser asimismo equivalentes las cuatro ecuaciones diferenciales, que se reducen a una sola  $x dy - y dx = 0$ .

**Z. Factor integrante.**—Acabamos de ver cómo la ecuación diferencial

$$x dy - y dx = 0 \quad (P = -y, Q = x)$$

que no cumple la condición  $P_y = Q_x$ , puede ser integrada de diversas maneras, multiplicando su primer miembro por distintos factores  $\frac{1}{x^2}$ ,  $\frac{1}{y^2}$ ,  $\frac{1}{x^2 + y^2}$ ,  $\frac{1}{x^2 - y^2}$ , que la convierten en diferencial total exacta.

Podemos preguntarnos de un modo general si, dada la ecuación,

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad \text{en la que} \quad P_y \neq Q_x \quad [1]$$

es posible encontrar algún factor  $\mu(xy)$  tal que la ecuación que resulta de multiplicar por  $\mu$

$$\mu P dx + \mu Q dy = 0$$

sea diferencial exacta. La existencia de tal factor es consecuencia misma de la existencia de la integral. ¿Qué quiere decir, en efecto, que existe una solución y sólo una que pase por un punto dado  $x_0, y_0$  en una cierta región del plano? Significa que queda determinada una curva y sólo una del haz integral; de otro modo, que queda definida la constante  $C$  del haz como función de  $x_0, y_0$ . Es decir, el haz integral define una función  $C = \varphi(x, y)$ , de donde resulta la ecuación [1] equivalente a  $\varphi_x dx + \varphi_y dy = 0$ , lo que implicará

$$\frac{\varphi_x}{P} = \frac{\varphi_y}{Q} = \mu(xy) \quad \text{es decir,} \quad \varphi_x = \mu P \quad \varphi_y = \mu Q$$

Tal factor  $\mu$  se llama *factor integrante*.

Demostrada su existencia propongámonos hallarlo. La condición que habrá de cumplir es

$$\frac{\partial \mu P}{\partial y} = \frac{\partial \mu Q}{\partial x}$$

o sea, desarrollando

$$\mu P_y + P \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu Q_x + Q \frac{\partial \mu}{\partial x} \quad [2]$$

ecuación en derivadas parciales lineal y de primer orden que sirve para hallar  $\mu$  y que, según veremos más adelante, admite infinitas soluciones.

La integración de esta ecuación [2] es problema de naturaleza más complicada que la integración directa de [1], pero como no se trata aquí de hallar *todos* los factores integrantes sino que con uno nos basta, no es difícil, en los casos corrientes, hallar condiciones simplificadoras de la ecuación [2] que facilitan la determinación de factores integrantes.

Por ejemplo, propongamos investigar si la ecuación

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

admite un factor integrante que dependa sólo de  $x$ . La ecuación [2] se reduce a

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\mu(P_y - Q_x)}{Q}, \quad \frac{d\mu}{\mu} = \frac{P_y - Q_x}{Q} dx \quad [3]$$

lo que exige que sea  $(P_y - Q_x) : Q = \psi(x)$  (función sólo de  $x$ ). Entonces integrando [3] obtendremos el factor

$$\mu = e^{\int \psi(x) dx}$$

Así, para la ecuación  $x dy - y dx = 0$   $(P_y - Q_x) : Q = -\frac{2}{x} = \psi(x)$  que da  $\int \psi(x) dx = -2 \ln x$ ,  $\mu = \frac{1}{x^2}$  de acuerdo con la forma integral primera del párrafo anterior.

Análogamente hallaríamos factores integrantes que no dependan más que de  $y$  si  $(P_y - Q_x) : P$  es sólo función de  $y$ . La aplicación al mismo ejemplo nos daría fácilmente  $\mu = \frac{1}{y^2}$ .

**3. Multiplicidad de factores integrantes.**—Una vez hallado un factor integrante  $\mu(xy)$  y hallado con su auxilio el haz integral en la forma  $U(xy) = C$  es fácil ver que el producto  $\mu\Phi(U)$ , donde  $\Phi$  es una función integrable cualquiera, es también factor integrante. En efecto,

$$\text{si } \mu(Pdx + Qdy) = dU \quad \text{será } \mu\Phi(U)(Pdx + Qdy) = \Phi(U)dU$$

que es la diferencial  $d\Psi(U)$  de una nueva función de  $U$  y, por tanto, de  $xy$ , con lo que queda probada la existencia de infinitos factores integrantes (dependientes de una función arbitraria).

Recíprocamente: Hallado un factor  $\mu$ , y con él  $U(xy)$  tal que

$$dU = \mu P dx + \mu Q dy$$

Otro factor  $M$  que cumpla

$$dV = MP dx + MQ dy$$

verificará  $\frac{dV}{dU} = \frac{M}{\mu}$ . Pero además el jacobiano

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} MP & MQ \\ \mu P & \mu Q \end{vmatrix} = 0$$

Lo que prueba que entre  $U$  y  $V$  existe una relación  $V = \varphi(U)$  independiente de  $xy$ , y, por tanto, que  $\frac{dV}{dU} = \frac{M}{\mu} = \varphi'(U)$ , o sea  $M = \mu\varphi'(U)$ . Es decir,  $M$  es de la forma  $\mu\Phi(U)$ .



Así, en el ejemplo de la ecuación  $x dy - y dx = 0$  tenemos :

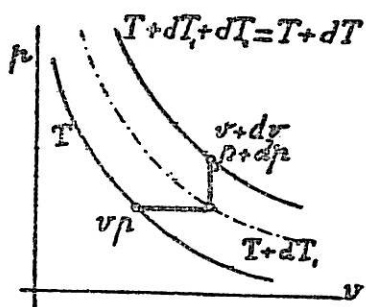
1.<sup>er</sup> factor integrante  $\mu = \frac{1}{x^2}$  Haz integral  $\frac{y}{x} = C$   $U = \frac{y}{x}$

2.<sup>o</sup> factor integrante  $\frac{1}{y^2} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{y^2} = \mu \cdot \frac{1}{U^2}$

3.<sup>er</sup> factor integrante  $\frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x^2} \frac{1}{1 + U^2}$

4.<sup>o</sup> factor integrante  $\frac{1}{x^2 - y^2} = \frac{1}{x^2} \frac{1}{1 - U^2}$

4. **Ejemplo físico. Concepto de entropía.**—Diferenciando la ecuación de los gases perfectos  $RT = pv$  se obtiene  $dT = \frac{1}{R} p dv + \frac{1}{R} v dp$ , cuyo sig-



nificado físico es el siguiente: Al pasar el gas del estado  $v, p$  al  $v + dv, p + dp$  el incremento  $dT$  de temperatura se descompone en dos: el incremento  $dT_1 = \frac{1}{R} p dv$  al aumentar el volumen en  $dv$  manteniendo constante la presión  $p$ , y el incremento  $dT_2 = \frac{1}{R} v dp$  al aumentar la presión en  $dp$  manteniendo constante el volumen. ¿Cuál es la variación  $dQ$  de calor que corresponde a esta variación de temperatura? Llamando  $C$  y  $c$  los calores específicos a presión constante y a volumen constante será:

$$dQ = CdT_1 + cdT_2 = \frac{C}{R} p dv + \frac{c}{R} v dp$$

Esta expresión no es diferencial exacta, puesto que no se verifica la igualdad de derivadas cruzadas  $\left(\frac{C}{R} \mp \frac{c}{R}\right)$  debido a la desigualdad de ambos ca-

lores específicos. La variación de calor  $dQ$  al pasar el gas de un estado a otro *depende*, pues, *de la sucesión de estados intermedios*. Gracias a eso se realizan en las máquinas térmicas ciclos cerrados de gases en los cuales hay cesión de energía al exterior que se aprovecha en forma de trabajo. Pero interesa a los técnicos disponer de magnitudes físicas ligadas al estado del gas, cuyas variaciones dependan *exclusivamente de los estados inicial y final*.

Una de tales magnitudes se obtiene fácilmente afectando a la  $dQ$  de un factor integrante. Si suponemos  $C$  y  $c$  constantes el más sencillo es  $\frac{1}{T} = \frac{R}{pv}$ , que da la diferencial exacta

$$\frac{dQ}{T} = C \frac{dv}{v} + c \frac{dp}{p} = dl(v^c p^c)$$

La función de estado

$$S = \int \frac{dQ}{T} = l(v^c p^c) + K$$

cumple la condición apetecida, se llama *entropía* del gas y desempeña un papel importante en *Termodinámica*.

En las obras de Termodinámica se suele expresar la entropía en función de  $Tv$  o de  $Tp$  y de la razón  $\gamma = \frac{C}{c}$ , bastando para ello poner  $v^c p^c = (pv)^c v^{c-c}$ , o bien  $= (pv)^c : p^{c-c}$ , con lo que

$$S = l(RT)^c + lv^{c-c} + K = c[lT + (\gamma - 1)lv] + K_1$$

$$S = l(RT)^c - lp^{c-c} + K = C \left[ lT - \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) lv \right] + K_2$$

en las constantes  $K_1$  y  $K_2$  se suponen absorbidos los términos constantes  $lR^c$  y  $lR^0$ , respectivamente.

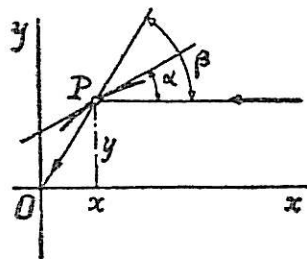
Transformaciones *adiabáticas* son aquellas que se realizan sin absorción ni cesión de calor al medio, por tanto  $dQ=0$ ,  $dS=0$ . Las transformaciones *adiabáticas* son, pues, también *isoentrópicas*, lo que permite escribir la ecuación general de tales transformaciones, que sería

$$v^c p^c = \text{const.}^e \quad \text{o bien} \quad v^\gamma p = \text{const.}^e$$

NOTA.—Los cálculos anteriores se han desarrollado en el supuesto de ser  $C$  y  $c$  constantes, hipótesis sólo aproximada, pues en rigor son funciones de la temperatura. Modernamente se definen simultáneamente  $T$  y  $S$  así: La temperatura absoluta  $T$  como una función positiva de la temperatura observable tal que sea diferencial total exacta la expresión  $dQ : T$ , denominándose entropía  $S$  a la integral de dicha expresión (\*).

**5. Descomposición en suma de diferenciales exactas.**— Otro recurso bastante usado para la integración de las ecuaciones de la forma  $M dx + N dy = 0$  es ver si es posible descomponer su primer miembro en suma o resta de diferenciales exactas, es decir, de combinaciones integrables, teniendo en cuenta las indicadas en el § 1

EJEMPLO: ¿Qué curvas planas tienen la propiedad de concentrar en un punto un sistema de rayos paralelos reflejados en ellas? Tomemos el origen en el punto de concentración de los rayos reflejados en la curva y el eje  $+x$  en la dirección de donde proceden. Expresemos la igualdad del ángulo  $\alpha$  formado por el rayo incidente y la tangente con el  $\beta - \alpha$  que forma ésta con la prolongación del radio vector (v figura).



$$\text{tg } \alpha = \text{tg } (\beta - \alpha) = \frac{\text{tg } \beta - \text{tg } \alpha}{1 + \text{tg } \beta \text{ tg } \alpha} \quad \text{o sea} \quad y' = \frac{\frac{y}{x} - y'}{1 + \frac{yy'}{x}}$$

que equivale a

$$(x = \sqrt{x^2 + y^2}) dx + y dy = 0$$

(\*) Para más detalles v Lucini, «Termodinámica aplicada».

En lugar de tratarla como homogénea resulta más rápido escribirla así:

$$\pm \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - dx = 0$$

que es suma de combinaciones integrables y da  $\pm \sqrt{x^2 + y^2} = x + c$ , o sea  $x^2 + y^2 = (x + c)^2$

Haz de parábolas  $y^2 = 2c \left( x + \frac{c}{2} \right)$ , que tienen su foco en el origen y cuyo parámetro es precisamente  $c$ . Ya es conocida esta propiedad de la parábola por Física y Geometría elemental, pero ahora probamos que *sólo las parábolas la tienen*.

### EJERCICIOS

Integrar las ecuaciones diferenciales.

1.  $\left( 2x + \frac{1}{y} \right) dx + \left( \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} \right) dy = 0.$

2.  $\frac{y^2 - 2x^2}{xy^2 - x^3} dx + \frac{2y^2 - x^2}{y^3 - x^2y} dy = 0.$

3.  $\frac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \left( \frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dy = 0.$

4.  $(3x^2 + 2y \operatorname{sen} 2x) dx + 2(\operatorname{sen}^2 x + 3y^2) dy = 0.$

5.  $\operatorname{sen} 2x \cos^2 y dx + \cos^2 x \operatorname{sen} 2y dy = 0.$

6. Integrar la ecuación  $(xy^2 + x^2y^2 + 3) dx + x^2y dy = 0$ , hallando un factor integrante función de  $x$ .

7. Idem con  $(x^3y + y + 3) dy + x^2y^2 dx = 0$ , mediante un factor integrante que depende de  $y$ .

8. Integrar  $2xy dx = (3x^2 - y^2) dy$ . Solución particular pasando por el punto  $x=1, y=1$ . Efectúese la integración buscando un factor integrante y compruébese tratando la ecuación como homogénea.

9. Demostrar que la solución de  $P dx + Q dy = 0$  en el supuesto de ser  $P_y = Q_x$  puede escribirse:

$$\int P dx + \int \left[ Q - \frac{\partial}{\partial y} \int P dx \right] dy = C$$

10. ¿Qué condición deben cumplir  $P$  y  $Q$  para que  $P dx + Q dy = 0$  tenga un factor integrante  $= ax^k$ ?

11. Demostrar que si  $P dx + Q dy = 0$  es homogénea admite el factor integrante  $1 : (Px + Qy)$ .

12. Aplicar lo anterior a la integración de  $(y^2 - xy) dx + x^2 dy = 0$ .

13. Idem  $(x^3 - y^3) dx + xy^2 dy = 0$ .

14. Idem  $(x^2 - xy + y^2) dx + (x^2 - xy) dy = 0$ .

15. Condición que tienen que cumplir  $P$  y  $Q$  para que  $P dx + Q dy = 0$  tenga un factor integrante que sea función del producto  $xy$ .

16. Aplicación a la integración de  $(y + xy^2) dx + (x - x^2y) dy = 0$ .

17. Aplicación de lo anterior a  $x dy + y dx = x^n y^n dy$  e integrarla.

18. Probar que si  $Px + Qy \equiv 0$ , es factor integrante  $1 : (Px - Qy)$ .

19. Probar que si  $Px - Qy \equiv 0$ , es factor integrante  $1 : (Px + Qy)$ .

20. Probar que toda ecuación de la forma  $y f(xy) dx + x \varphi(xy) dy = 0$ , en la que  $f$  y  $\varphi$  son funciones del producto  $xy$ , admite como factor integrante  $1 : xy(f - \varphi)$ .

21. Aplicación a  $(1 + x^2y^2)x dy + (x^2y^2 - 1)y dx = 0$ .

22. Idem  $x^3y^4 dx - (x^2y - x^4y^3) dy = 0$ .

LECCIÓN 4.<sup>a</sup>.—ECUACIONES LINEALES, DE BERNOULLI Y DE RICCATI

**1. Ecuación lineal.**—Se llama así la ecuación de primer grado en  $y$  e  $y'$ , es decir

$$y' + X(x)y = F(x) \quad [1]$$

Consideremos primero la ecuación homogénea en  $y$ ,  $y'$ , es decir con el segundo miembro nulo

$$y' + X(x)y = 0 \quad [2]$$

o sea

$$\frac{dy}{y} = -X(x) dx$$

que es de variables separadas y da, integrada

$$y = Ce^{-\int X(x) dx} = C\eta \quad \eta = e^{-\int X(x) dx}$$

Si se conociera ahora una integral particular  $y_1$  de [1] se podría la integral general en la forma

$$y = C\eta + y_1$$

En efecto, sustituyendo en [1], se verifica

$$C(\eta' + X\eta) + y_1' + X(x)y_1 = F(x)$$

por satisfacer  $\eta$  a [2], e  $y_1$  a [1]. *La integral general de la ecuación lineal [1] se puede, pues, obtener sumando a una integral particular cualquiera la integral de la homogénea [2].* Más adelante veremos cómo esta propiedad se generaliza a ecuaciones de orden más elevado y estudiaremos métodos para hallar fácilmente integrales particulares en los casos más frecuentes. Veamos ahora un método general llamado de *variación de las constantes*, que también tendrá más adelante su adecuada generalización.

Tratemos de hallar una solución  $y_1$  de [1] sustituyendo la constante  $C$  en  $y = C\eta$  por una función  $u(x)$  conveniente  $y_1 = u\eta$ .

Al derivar  $y_1 = u\eta' + u'\eta$  y sustituir en [1] teniendo en cuenta que  $\eta = e^{-\int X dx}$  satisface a la ecuación [2], resulta

$$u(\eta' + X\eta) + \eta u' = F(x) \quad \text{reducida a} \quad \eta \frac{du}{dx} = F(x)$$

de donde

$$u = \int F(x) \frac{1}{\eta} dx = \int F(x) e^{\int X dx} dx$$

y por tanto

$$y_1 = e^{-\int X dx} \int F(x) e^{\int X dx} dx$$

de donde la integral general será

$$y = e^{-\int X dx} \left[ \int E(x) e^{\int X dx} dx + K \right]$$

Ejemplo:  $y'x + y = x \operatorname{sen} x$  puesta en la forma [1] da

$$X = \frac{1}{x} \quad F(x) = \operatorname{sen} x \quad \int X dx = \ln x$$

$$y = e^{-\ln x} \left[ \int \operatorname{sen} x e^{\ln x} dx + K \right] = \frac{1}{x} \left[ K + \int x \operatorname{sen} x dx \right] = \frac{1}{x} [K - x \cos x + \operatorname{sen} x]$$

**2. Aplicación electrotécnica.**—*Variaciones de la intensidad en un circuito con resistencia óhmica y autoinducción. Régimen permanente y transitorio.* Es sabido que las variaciones de intensidad en un circuito con autoinducción apreciable (circuito con arrollamientos) originan variaciones del campo magnético creado por él, las cuales, a su vez, engendran una f. e. m. inducida que *se opone* a la variación de intensidad y que es proporcional a dicha variación. Esta f. e. m. inducida tiene pues una expresión de la forma  $-L \frac{di}{dt}$ , en que  $L$  es el llamado *coeficiente de autoinducción*.

Por tanto la f. e. m. exterior  $e(t)$  aplicada en cada instante al circuito combinada con la citada f. e. m. de autoinducción deben equilibrar la pérdida  $Ri$  debida a la resistencia óhmica. El régimen general de intensidad variable en un circuito con resistencia óhmica y autoinducción viene, pues, definido por la ecuación diferencial lineal

$$Ri = e(t) - L \frac{di}{dt} \quad \text{o sea} \quad L \frac{di}{dt} + Ri = e(t)$$

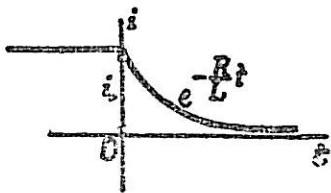
y por las condiciones iniciales del problema, intensidad  $i_0$  en el instante inicial  $t=0$ .  $L$  y  $R$  son coeficientes constantes conocidos y  $e(t)$ , f. e. m. exterior aplicada, es asimismo conocida.

Veamos los casos más frecuentes:

1.º  $e(t) \equiv 0$ . Por ejemplo: En un instante dado en que circula la corriente  $i=i_0$  se desconecta el circuito del generador (apertura de circuito). La f. e. m. exterior pasa súbitamente a *cero*. ¿Cómo varía la intensidad?

La ecuación

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0$$



es de variables separadas y da

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt, \quad i = Ke^{-\frac{R}{L} t}$$

y tomando el instante de apertura del circuito como inicial  $i=i_0$  para  $t=0$  resulta  $i_0=K$ . Por tanto  $i=i_0 e^{-\frac{R}{L} t}$ , variación representada en la figura.

2.º  $e(t) \equiv E$  constante. Por ejemplo: Cierre de circuito con un generador de corriente continua.

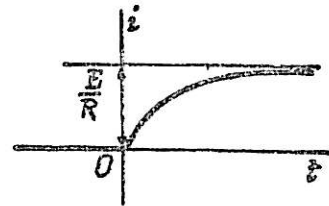
Ecuación 
$$L \frac{di}{dt} + Ri = E.$$

Habrá que agregar a la integral general de la ecuaci3n anterior una particular de 3sta, que se obtiene fácilmente sin más que poner  $i = \frac{E}{R}$ . Por tanto, la corriente tendrá por expresi3n

$$i = Ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$$

Tomando el instante de cierre como inicial para  $t=0$  es  $i=0$ , y resulta  $K = -\frac{E}{R}$ , y por tanto

$$i = \frac{E}{R} \left[ 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right]$$



que se representa en la figura (\*).

3.º  $e(t) = E \sin \omega t$ . Por ejemplo: Cierre de circuito con un generador de corriente alterna. Hemos de agregar ahora a  $i = Ke^{-\frac{R}{L}t}$  una integral particular de

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E \sin \omega t$$

que, obtenida como se indica en el § 1, da (V Tomo I, lec. 6, § 7)

$$i_1 = e^{-\frac{R}{L}t} \int \frac{E}{L} \sin \omega t e^{\frac{R}{L}t} dt = \frac{E/L}{\omega^2 + \frac{R^2}{L^2}} \left( \frac{R}{L} \sin \omega t - \omega \cos \omega t \right)$$

Poniendo  $\omega = A \sin \varphi$ ,  $\frac{R}{L} = A \cos \varphi$ , de donde  $A = \sqrt{\omega^2 + \frac{R^2}{L^2}}$ ;  $\text{tg } \varphi = \frac{\omega L}{R}$

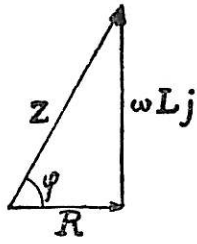
se puede escribir  $i_1$  en la forma

$$i_1 = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \varphi)$$

(\*) Los regímenes de apertura y cierre de circuitos son en realidad de naturaleza bastante más complicada por la variaci3n de  $R$  durante la conexi3n o desconexi3n. Pero la esquematizaci3n matemática de la realidad s3lo se logra por aproximaciones sucesivas, y lo dicho constituye una primera aproximaci3n al fen3meno estudiado.

La expresión general de la intensidad será, pues, de la forma

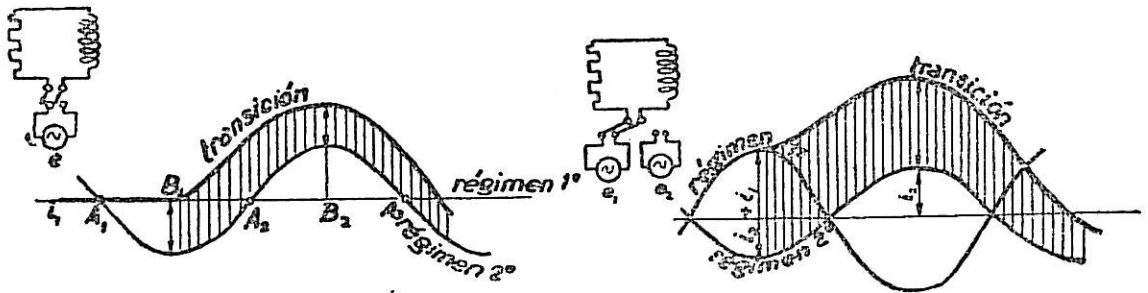
$$i = Ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \text{sen}(\omega t - \varphi)$$



determinándose  $K$  en función de la intensidad inicial  $i_0$ . El término  $Ke^{-\frac{R}{L}t}$  tiende, en general, rápidamente a cero, por lo que se le llama *término transitorio* y aunque teóricamente no se anula nunca, prácticamente se hace pronto despreciable, y queda la variación de la intensidad determinada por el segundo sumando, llamado *permanente*, el cual representa una intensidad senoidal *defasada*, en retraso respecto de la f. e. m.  $E$  de un ángulo  $\varphi$  (argumento de un vector  $\vec{Z} = R + \omega Lj$  (\*) llamado *impedancia*) y cuyo valor máximo es  $\frac{E}{|\vec{Z}|}$ . De modo que la intensidad permanente  $i_1$  es en definitiva

$$i_1 = \frac{E}{|\vec{Z}|} \text{sen}(\omega t - \varphi)$$

Si dibujamos esta función senoidal representativa del término o *régimen permanente*, el sumando transitorio  $Ke^{-\frac{R}{L}t}$  que hemos de agregar a sus ordenadas determinará una curva de adaptación que quedará inicialmente tanto más apartada de la curva de régimen cuanto mayor sea en valor absoluto la ordenada de esta curva en el momento de



cerrar el circuito. Así, si el circuito se cierra en alguno de los instantes  $A_1, A_2, \dots$  en los que la intensidad permanente ha de tener el valor nulo (puntos defasados de los ceros de la tensión en  $\varphi = \text{arc tg} \frac{L\omega}{R}$ ) la intensidad en el circuito se adapta instantánea-

mente a la de régimen permanente  $i_1$ ; pero si se cierra el circuito en alguno de los instantes  $B_1, B_2, \dots$  en los que la intensidad de régimen permanente pasa por un máximo o mínimo, y la anulación del sumando transitorio tarda unos períodos (tiempo breve a pesar de todo, pues, por ejemplo, 5 períodos de frecuencia industrial duran sólo 1/10 de segundo) la ordenada de la intensidad después del primer semiperíodo alcanza casi el doble de la intensidad de régimen, como muestra la figura de la izquierda.

Si se efectúa el paso de una tensión alterna a otra de la misma frecuencia, la intensidad transitoria puede llegar a ser, si las fases se oponen, igual a la máxima del primer régimen más casi el doble de la máxima del segundo, como muestra la figura de la derecha.

(\*) En Electrotecnia es costumbre representar por  $j$  la unidad imaginaria  $i$  para no confundirla con la intensidad.



De estos ejemplos se desprende la gran importancia que tiene el estudio del régimen transitorio, a pesar de su corta duración, por los considerables efectos de sobreintensidad que puede llegar a ocasionar en los momentos de apertura, cierre o cambio de régimen.

**3. Propiedades geométricas de la ecuación lineal.**— Observando la forma [3] de la integral general del § 1 se ve que es *lineal* en la constante  $K$ , es decir, de la forma

$$y = K\varphi(x) + \psi(x) \quad [4]$$

Por tanto si  $y_1 = K_1\varphi(x) + \psi(x)$  es una solución particular se verificará

$$y - y_1 = (K - K_1)\varphi(x)$$

y, si  $y_2$  es otra solución correspondiente al valor  $K_2$  de la constante, verificará

$$y_2 - y_1 = (K_2 - K_1)\varphi(x)$$

de donde

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = C, \quad \left( = \frac{K - K_1}{K_2 - K_1} \right) \quad [5]$$

Expresión muy cómoda del haz integral, y que puede escribirse por tanto, *sin efectuar ninguna cuadratura cuando se conocen dos integrales particulares  $y_1, y_2$* . La interpretación geométrica no puede ser más sencilla:

La razón simple de las ordenadas de tres curvas integrales (correspondientes las tres a una misma abscisa) es un valor constante, es decir independiente de dicha abscisa. De otro modo:

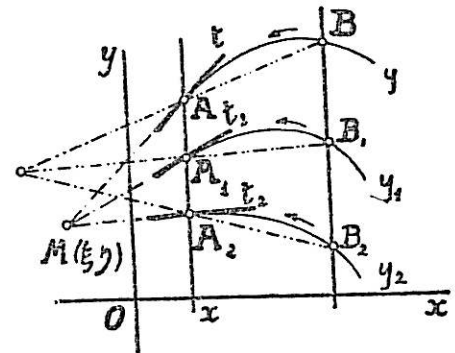
Las series cortadas en dos paralelas cualesquiera al eje  $Oy$  por el haz de curvas integrales, son semejantes. Tendrán, pues, su centro de semejanza (propio o impropio)

donde concurrirán las rectas que unen los pares de puntos homólogos  $AB, A_1B_1, A_2B_2, \dots$  intersecciones en las dos paralelas por cada curva integral. Pasando al límite, al tender a confundirse ambas paralelas resulta:

Las tangentes  $t, t_1, t_2, \dots$ , a todas las curvas integrales en los puntos de intersección  $A, A_1, A_2, \dots$ , de las mismas con cada paralela al eje concurren en un punto. A cada paralela de abscisa  $x$  corresponde un punto  $M$  en el que concurren todas las tangentes del enunciado y cuyas coordenadas  $\xi\eta$  son sólo funciones de la abscisa  $x$  de dicha paralela

Se comprueba, en efecto, que las tangentes en los puntos de ordenadas  $y_1, y_2$  correspondientes a una misma abscisa  $x$ , cuyas ecuaciones son  $(\xi, \eta)$  coordenadas generales de dichas tangentes; recuérdese la ecuación diferencial [1])

$$\begin{aligned} \eta - y_1 &= y'_1(\xi - x) = [F(x) - X(x)y_1](\xi - x) \\ \eta - y_2 &= y'_2(\xi - x) = [F(x) - X(x)y_2](\xi - x) \end{aligned}$$

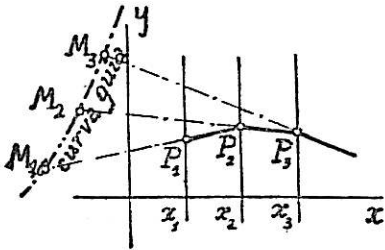


se cortan en el punto

$$\xi = x + \frac{1}{X(x)} \quad \eta = \frac{F(x)}{X(x)}$$

que sólo depende de  $x$ .

El lugar geométrico de dichos puntos, cuyas ecuaciones paramétricas en función de  $x$  vienen dadas por [6] se llama *curva guía* de la ecuación diferencial lineal, y su conocimiento y trazado (graduado con los valores del parámetro) simplifica notablemente el trazado de los polígonos integrales de que hablábamos en el § 4 de la lección 1.<sup>a</sup>



En efecto, si queremos trazar el polígono de Euler aproximado a la curva integral que pasa por el punto  $P_1$  de abscisa  $x_1$  bastará unirle con el punto  $M_1$  correspondiente a  $x_1$  en la curva guía y tendremos el primer trozo de polígono hasta  $P_2$ , que unido al punto correspondiente a la nueva abscisa  $x_2$ , dará el segundo lado del polígono integral, y así sucesivamente.

**4. Ecuación de Bernouilli.**—La ecuación llamada de *Bernouilli*,

$$y' + X(x)y = F(x)y^n$$

se integra observando que su equivalente

$$\frac{y'}{y^n} + X(x) \frac{1}{y^{n-1}} = F(x)$$

puede reducirse a la forma lineal mediante el cambio de función  $\frac{1}{y^{n-1}} = u$ , que da

$$u' - (n-1)X(x)u = -(n-1)F(x)$$

Hallada  $u$ , será  $y = \frac{1}{\sqrt[n-1]{u}}$ .

Ejemplo: Sea la ecuación

$$y' + \frac{y}{x} = y^2 \cdot \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x}$$

Mediante el cambio  $y = \frac{1}{u}$  se transforma en la ecuación lineal

$$u' - \frac{u}{x} = \frac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{x}$$

que integrada de acuerdo con el § 1 da

$$u = Kx - \operatorname{sen} x$$

por tanto

$$y = \frac{1}{Kx - \operatorname{sen} x}$$

**5. Ecuación de Riccati.**—Se llama así toda ecuación de la forma

$$y' = X(x) + X_1(x)y + X_2(x)y^2 \quad [1]$$

En general ya no se puede reducir a cuadraturas (\*); pero si se conoce una integral particular de ella  $y_1$  tal reducción es posible, Basta, en efecto, hacer

$$y = y_1 + \frac{1}{u}, \quad y' = y'_1 - \frac{u'}{u^2} \quad [2]$$

y queda, teniendo en cuenta que  $y_1$  es solución de [1],

$$u' + (X_1 + 2X_2y_1)u + X_2 = 0 \quad [3]$$

que es lineal. Integrada ésta y hallada  $u$ , basta sustituir en [2].

Si además de la solución  $y_1$  conocemos otra  $y_2$ , a ésta corresponderá una solución particular  $u_2$  en [3] y ya hemos visto (§ 1) que el conocimiento de una solución particular de una ecuación lineal reduce su integración a la homogénea  $u' + (X_1 + 2X_2y_1)u = 0$ , es decir a una cuadratura. Por tanto, resumiendo:

El conocimiento de una integral particular de la ecuación de Riccati reduce su integración a la de una ecuación lineal y, por tanto, a dos cuadraturas.

El conocimiento de dos integrales particulares reduce la integración a la de una lineal homogénea, y por tanto a una sola cuadratura

Finalmente, si se conocen tres integrales particulares  $y_1, y_2, y_3$  y por tanto dos  $u_2, u_3$  de la ecuación lineal [3], no hace falta efectuar ninguna integración para hallar el haz integral. En efecto, la integral general de [3] será (§ 3):

$$\frac{u - u_2}{u_3 - u_2} = C, \quad \text{y sustituyendo [2]} \quad u = \frac{1}{y - y_1}$$

y sus análogas  $u_2, u_3$  queda

$$\frac{\frac{1}{y - y_1} - \frac{1}{y_2 - y_1}}{\frac{1}{y_3 - y_1} - \frac{1}{y_2 - y_1}} = \frac{y_2 - y}{y - y_1} = C$$

que se puede enunciar diciendo:

*La razón doble de cuatro integrales particulares de la integral de Riccati es constante. De otro modo: Las series que resultan de cortar el haz integral por dos paralelas al eje y cualesquiera, son proyectivas.*

(\*) Liouville probó esta imposibilidad general, lo cual no contradice la posibilidad en casos especiales; por ejemplo, si  $X(x) \equiv 0$ , en cuyo caso se reduce a una de Bernoulli, y se integra como hemos visto en el párrafo y en el ejemplo anterior. En esto se funda precisamente la sustitución  $y = \eta + y_1$  cuando se conoce una integral particular  $y_1$  pues la ecuación en  $\eta$  carecerá del término  $X(x)$  y se reduce a una de Bernoulli; integrable mediante  $\eta = \frac{1}{u}$ . Por ello se preconiza directamente el cambio  $v = v_1 + \frac{1}{u}$ .

Ejemplo: La ecuación  $y' = \cos x - y - y^2 \operatorname{tg} x \sec x$  se satisface para  $y_1 = \cos x$  como es fácil comprobar.

Con el cambio  $y = \cos x + \frac{1}{u}$  se transforma en  $u' - (1 + 2 \operatorname{tg} x) u = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$

Ecuación lineal del tipo § 1 en la que  $X = -1 - 2 \operatorname{tg} x$   $F(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$

$$\int X dx = -x + 2 \operatorname{tg} x, \quad e^{\int X dx} = e^{-x} \cos^2 x, \quad e^{-\int X dx} = e^x \cos^{-2} x$$

obteniéndose como integral general de la misma

$$u = \frac{e^x}{\cos^2 x} \left[ \int e^{-x} \operatorname{sen} x + K \right] = -\frac{\operatorname{sen} x}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{2 \cos x} + \frac{K e^x}{\cos^2 x}$$

y finalmente

$$y = \cos x + \frac{1}{u}$$

*Nota.*—Si suponemos desarrollable según las potencias de  $y$  el segundo miembro de la ecuación normal de primer orden

$$y' = f(x, y) = f(x, 0) + f_y(x, 0)y + f_{y^2}(x, 0) \frac{y^2}{2!} + \dots$$

y sustituimos, en una banda suficientemente estrecha alrededor del eje  $x$ , la ecuación por  $y' = f(x, 0) + f_y(x, 0)y$  que es de la forma lineal, el haz de curvas integrales de ésta representará, en primera aproximación en dicha banda, el haz integral (\*). Si con objeto de mejorar la aproximación consideramos otro término de la serie nos vemos conducidos a una ecuación del tipo Riccati.

## EJERCICIOS

Integrar las ecuaciones:

1.  $y' - y \operatorname{tg} x = 3e^{-\operatorname{sen} x}$ .
2.  $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$ .
3.  $y' = 1 + x + x^2 + y$ .
4.  $dy + xy dx = x^3 dx$ .
5.  $y' + y/x^2 = a e^{\frac{1}{x}}$ .
6.  $x^2 dy - \operatorname{sen} 2x dy + 3xy dx = 0$ .
7.  $(\operatorname{sen} 2\theta - 2\rho \cos \theta) d\theta = 2 d\rho$ .
8.  $\theta(1 - \theta^2) d\rho = (\rho + a\theta^3 - 2\rho\theta^2) d\theta$ .

9. A un circuito de resistencia 3,43 ohmios y autoinducción 0,0858 henrios se aplica una f. e. m. alterna de 50 períodos por segundo y valor máximo 500 voltios. Calcular la intensidad máxima, su defasado respecto de la f. e. m. Ecuación que da las variaciones de dicha intensidad suponiendo una intensidad inicial nula y que en este instante la f. e. m. aplicada pasa por un máximo.

10. Los puntos medios de los segmentos de tangente a una curva comprendidos entre el punto de contacto y el eje  $x$  describen la parábola  $y^2 = 2x$ . Hallar la curva sabiendo que pasa por el punto (1, 2).

11. Hallar un factor integrante de la ecuación lineal general, que dependa sólo de  $x$ , e integrarla con el uso de dicho factor.

12. Integrar  $y' + y^2 = y/x$ . Sol. particular que pasa por  $x=1$ ,  $y=1$ .

13. Idem  $xy' + y = y^2 x \operatorname{tg} x$  con  $y=2$  para  $x=1$ .

14. Idem  $y - \cos xy' = y^2 \cos x(1 - \operatorname{sen} x)$  con  $y=2$  para  $x=0$ .

15. Idem  $y' = 5x^2 y^5 + y/2x$  con  $y=1$  para  $x=1$ .

16. Idem  $x(x-1)y' - (1-2x)y + y^2 = 2x$  comprobando la sol. particular  $y=1$ .

17. Idem  $(1+x^3)y' + 2xy^2 + x^2y + 1 = 0$  comprobando la sol. particular  $y=-x$ .

18. Idem  $(ax^2 + bx + c)(xy' - y) = y^2 - ax^2$  sabiendo que tiene una sol. indep. de  $a, b, c$ .

(\*) En los tratados especiales se estudia la relación de continuidad entre el haz integral y la ecuación.

LECCIÓN 5.<sup>a</sup>—ECUACIONES DE PRIMER ORDEN NO LINEALES EN  $y'$ 

**1. Ecuaciones resolubles en  $y'$ .**— Toda ecuación diferencial algebraica resoluble en  $y'$

$$P_0 + P_1 y' + P_2 y'^2 + \dots + P_n y'^n = 0$$

donde  $P_0, P_1, \dots, P_n$  son funciones de  $x$  e  $y$ , se puede descomponer, despejando  $y'$ , en ecuaciones lineales (tantas como raíces)

$$y' = f_1(x, y) \quad y' = f_2(x, y) \quad \dots \quad y' = f_n(x, y)$$

cada una de las cuales tiene su haz integral  $y = \varphi_i(x, C)$  supuesta  $f_i$  real y cumpliendo las condiciones de existencia.

Por cada punto  $x_0, y_0$  del plano pasa, en general, una curva de cada haz  $y$ , por tanto,  $n$  curvas integrales, si todas las  $f_i$  son reales, número que puede reducirse si la ecuación dada en  $y'$  tiene raíces múltiples en el punto  $x_0, y_0$ .

El procedimiento es aplicable asimismo a ecuaciones trascendentes resolubles en  $y'$ .

Entre las ecuaciones de tipo algebraico de segundo grado en  $y'$  figuran las ecuaciones diferenciales de las líneas asintóticas y de curvatura estudiadas en el tomo 1.<sup>o</sup>, lecciones 33 y 34.

Ejemplo: La ecuación diferencial cartesiana de la proyección sobre el plano  $xy$  de las líneas asintóticas

$$r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2 = 0 \quad \text{o bien} \quad r + 2s y' + t y'^2 = 0$$

aplicada a la superficie  $z = k \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}$  (helicoides de plano director) da

$$xy y'^2 - (y^2 - x^2) y' - xy = 0$$

que se desdobra en

$$y' = \frac{y^2 - x^2 \pm \sqrt{(y^2 - x^2)^2 + 4x^2 y^2}}{2xy} = \begin{cases} \frac{y}{x} \\ -\frac{x}{y} \end{cases}$$

La primera da el haz integral  $y = Cx$  y la segunda  $x^2 + y^2 = C$ .

Los dos sistemas de líneas asintóticas son, pues,

$$\left. \begin{array}{l} y = Cx \\ z = k \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} \end{array} \right\} \text{ generatrices rectilíneas (horizontales) de la superficie.}$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = C \\ z = k \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} \end{array} \right\} \text{ hélices}$$

**2. Ecuaciones resolubles en  $y$  o en  $x$ .**—Dada una ecuación de primer orden no resoluble en  $y'$  pero sí en  $y$

$$y = f(x, y') \quad [1]$$

cabe ensayar la adopción de  $y' = p$  como parámetro de la curva integral. Se tiene por de pronto la ecuación finita

$$y = f(x, p) \quad [2]$$

$y$ , por derivación, supuesto  $f$  derivable,

$$p = f_x + f_p \frac{dp}{dx} \quad \text{de donde} \quad \frac{dp}{dx} = \frac{p - f_x}{f_p} = \varphi(x, p)$$

ecuación diferencial con la  $\frac{dp}{dx}$  despejada, que puede ser, por esta circunstancia, más sencilla de resolver que la propuesta. Si es así y podemos hallar su haz integral

$$\Phi(x, p, C) = 0 \quad [3]$$

esta ecuación, unida a [2], define paramétricamente el haz integral buscado en función del parámetro  $p$ .

Análogamente puede procederse si la ecuación diferencial dada es resoluble en  $x$

$$x = f(y, y') \quad \text{con} \quad y' = p, \quad x = f(y, p) \quad [4]$$

y derivando con relación a  $x$

$$1 = f_y p + f_p \frac{dp}{dy} p \quad \text{de donde} \quad \frac{dp}{dy} = \frac{1 - pf_y}{pf_p} = \psi(y, p)$$

De cuya integración podemos hallar

$$\Psi(y, p, C) = 0 \quad [5]$$

que junto con [4] define el haz integral en función del parámetro  $p$ .

Como se ve, estos tipos *se integran mediante el recurso previo de una derivación.*

Ejemplo: Sea la ecuación  $4y = x^2 + y'^2$  es decir  $4y = x^2 + p^2$ . Derivando, resulta  $2p = x + p \frac{dp}{dx}$ . que es del tipo homogéneo (Lec. 2.ª, § 2)  $\frac{dp}{dx} = \frac{2p - x}{p}$  y mediante  $\frac{p}{x} = u$  se transforma en

$$x \frac{du}{dx} = \frac{2u - 1}{u} - u = -\frac{(u - 1)^2}{u}$$

de variables separadas.

La integración de esta última proporciona

$$\frac{u \, du}{(u - 1)^2} = -\frac{dx}{x} \quad \text{o sea} \quad \frac{du}{u - 1} + \frac{du}{(u - 1)^2} = -\frac{dx}{x}$$



de donde

$$x = \frac{k}{u-1} e^{\frac{1}{u-1}}$$

$$y' = p = ux = \frac{ku}{u-1} e^{\frac{1}{u-1}} \quad y = \frac{1}{4}(x^2 + y'^2) = \frac{k^2(u^2 + 1)}{4(u-1)^2} e^{\frac{2}{u-1}}$$

habiendo obtenido  $xy$  e  $y'$  en función del parámetro  $u$  (en lugar del  $p$ ).

**3. Ecuación de Lagrange.**—Caso particular de las ecuaciones del párrafo anterior son las llamadas *ecuaciones de Lagrange*, que son lineales en  $x$ ,  $y$ , es decir, de la forma

$$y = xf(y') + \varphi(y') \quad \text{o sea} \quad y = xf(p) + \varphi(p) \quad [1]$$

que por derivación respecto de  $x$  da, supuestas  $f$  y  $\varphi$  derivables,

$$p = f(p) + [xf'(p) + \varphi'(p)] \frac{dp}{dx}, \quad \text{o bien} \quad \frac{dx}{dp} [p - f(p)] - xf'(p) = \varphi'(p) \quad [2]$$

que es lineal tomando  $p$  como variable y  $x$  como función. La integral, que se formula de acuerdo con el § 1 de la lección anterior

$$x = e^{\int \frac{f'(p)}{p-f(p)} dp} \left[ \int \frac{\varphi'(p)}{p-f(p)} e^{-\int \frac{f'(p)}{p-f(p)} dp} dp + K \right] \quad [3]$$

da  $x$  en función del parámetro  $p$ , pendiente de la curva integral. La ordenada  $y$  se obtendrá análogamente en función de  $p$  substituyendo simplemente la expresión obtenida en [1]

$$y = xf(p) + \varphi(p) \quad [4]$$

El procedimiento supone  $p - f(p) \neq 0$  por lo cual no es válido en los siguientes casos:

1.º Para las ecuaciones de la forma  $y = xy' + \varphi(y')$  llamadas de Clairaut, en que  $f(p) \equiv p$ , que resolveremos en el párrafo siguiente.

2.º Para las soluciones lineales de la ecuación dada [1] (supuesto  $f(p) \neq p$ ) de la forma

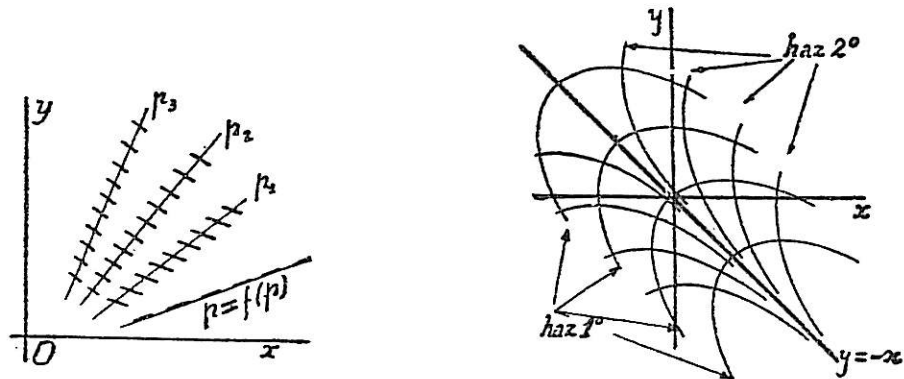
$$y = p_i x + \varphi(p_i)$$

cuya pendiente  $p_i$  sea raíz de la ecuación numérica  $p = f(p)$ .

Se comprueba fácilmente que estas rectas, si existen, satisfacen la ecuación dada [1]. Ahora bien, puede ocurrir que  $\varphi(p_i)$  adquiera un valor ilusorio, en cuyo caso no existe tal recta, y si existe puede ocurrir que pertenezca o no al haz integral. En este último caso se llama una *solución singular* de la ecuación.

*Interpretación geométrica.*—Las *isoclinas* del campo de direcciones que define la ecuación diferencial son rectas dadas por la propia ecuación [1] considerando  $p$  parámetro.

Toda isoclina excepcional cuya pendiente  $f(p)$  coincida con el valor  $p$  del parámetro correspondiente a dicha isoclina será, evidentemente (si existe) solución de la ecuación, por estar constituida por elementos tangenciales del campo.



EJEMPLO 1.º La ecuación  $y = -x + \frac{1 - y'}{1 + y'}$  da, con  $y' = p$ ,

$$x = (1 + p)^{-2} + C \quad y = -p^2(1 + p)^{-2} - C \quad [2]$$

Eliminando  $p$  resulta el haz de parábolas congruentes

$$4(x - C) = (x + y + 1)^2$$

que tienen por eje común la recta  $y = -x$ .

En este caso no existe integral excepcional rectilínea. El valor que satisface a  $p = f(p) \equiv -1$  anula el denominador de  $\xi(p) = \frac{1 - p}{1 + p}$

EJEMPLO 2.º La ecuación del haz ortogonal al anterior  $y = -x - \frac{1 + y'}{1 - y'}$  [3] da en cambio

$$\left. \begin{aligned} [2] \quad -x &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+p}{1-p} + \frac{1}{1-p} + C \\ [3] \quad y &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+p}{1-p} + \frac{1}{1-p} - \frac{1+p}{1-p} + C \end{aligned} \right\} \begin{aligned} y + x &= Ke^{y-x} \\ (K &= -e^{2C-1}) \end{aligned} \quad [4]$$

Para  $p = -1$  la recta  $y = -x$  que resulta en [3] satisface evidentemente la ecuación diferencial; y como también resulta de [4] para  $K = 0$  (correspondiente a  $C \rightarrow \infty$  en [2] [3]) parece natural considerarla solución particular (y no singular). Es el eje de las parábolas anteriores y como tal es trayectoria ortogonal de las mismas.

EJEMPLO 3.º En cambio la ecuación

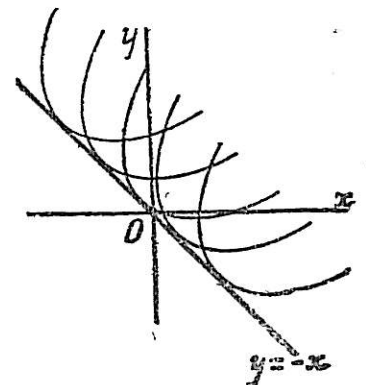
$$y = -x + \left( \frac{1 + y'}{1 - y'} \right)^2$$

conduce a

$$x = \frac{2}{(1 - p)^2} + C \quad y = \frac{(1 + p)^2 - 2}{(1 - p)^2} - C$$

Eliminando  $p$  resulta el haz de parábolas tangentes a la recta  $y = -x$

$$(x - y + K)^2 = 4(x + y)$$



La solución rectilínea  $y = -x$  correspondiente a  $p = -1$  no pertenece, en este caso, al haz integral, sino que es precisamente su envolvente.

Esta es, propiamente, una *integral singular* (\*).

**4. Ecuación de Clairaut.**—Es del tipo anterior en que  $f(y') \equiv y'$

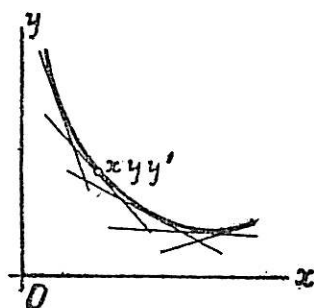
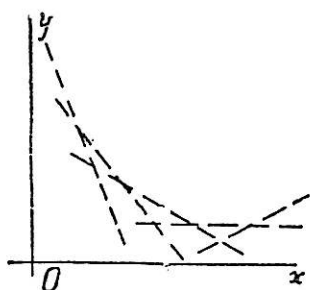
$$y = xy' + \varphi(y') \quad [1]$$

El procedimiento seguido en el párrafo anterior no le es aplicable por la razón allí indicada; pero salta a la vista el haz integral que es

$$y = xC + \varphi(C) \quad [2]$$

pues derivando da  $y' = C$  y por eliminación de  $C$  resulta la ecuación [1].

El haz integral de toda ecuación de Clairaut es, pues, un haz de rectas que se obtiene sustituyendo  $y'$  por la constante  $C$  del haz. Si este haz tiene una curva envolvente ésta será una solución singular de la ecuación, puesto que en cada uno de sus puntos será tangente a una recta involuta y tendrá en él los mismos valores  $x$ ,  $y$ ,  $y'$  que los de dicha recta, verificando, por



tanto, igualmente la ecuación [1]. Esta envolvente se halla, según se sabe, por eliminación de  $C$  entre la ecuación del haz y su derivada respecto de  $C$

$$\begin{cases} y = Cx + \varphi(C) \\ 0 = x + \varphi'(C) \end{cases}$$

*Interpretación geométrica.*—Las isoclinas de esta ecuación son rectas como en la anterior, pero aquí la pendiente de los elementos de dirección del campo a lo largo de cada isoclina es la pendiente de la propia isoclina, es decir, son al propio tiempo isoclinas y curvas integrales, a diferencia de la ecuación de Lagrange en que este hecho sólo ocurre eventualmente en isoclinas excepcionales.

(\*) Las tres ecuaciones tratadas en estos ejemplos pueden también integrarse despejando  $y'$  y reduciéndolas a homogéneas; pero hemos preferido tratarlas en esta forma para ilustrar lo relativo a las soluciones lineales; pues no nos parece correcta la afirmación (contenida en obras de Análisis que tenemos a nuestro alcance) de que las soluciones de la ecuación numérica  $p = f(p)$  dan invariablemente soluciones singulares.

EJEMPLO: Curvas cuyas tangentes interceptan un segmento constante  $=a$  entre los ejes. La ecuación de la tangente ( $X, Y$  coordenadas generales de la tangente,  $xy$  coordenadas del punto de contacto) es:

$$Y - y = y'(X - x) \left\{ \begin{array}{l} \text{Intercepta en el eje } x \text{ el segmento } X = x - \frac{y}{y'} \\ \text{Intercepta en el eje } y \text{ el segmento } Y = y - y'x \end{array} \right.$$

El enunciado exige que  $\left(x - \frac{y}{y'}\right)^2 + (y - y'x)^2 = a^2$  o sea

$$(y - y'x)^2 \left(\frac{1}{y'^2} + 1\right) = a^2 \quad (y - y'x)^2 = \frac{a^2 y'^2}{1 + y'^2}$$

de donde  $y = y'x \pm \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}}$ , ecuación de Clairaut, que da el haz de rectas

$$y = Cx \pm \frac{aC}{\sqrt{1 + C^2}}$$

La envolvente de este haz es la astroide hallada en el tomo I, lecc. 31 de ecuación

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

### 5. Generalidades sobre integrales singulares.

1. *Integrales singulares obtenidas mediante el haz integral.*—Las ecuaciones de Lagrange y de Clairaut nos han hecho ver la existencia de soluciones de la ecuación diferencial, que hemos llamado *singulares* por no quedar incluidas dentro de la integral general.

En general, si el haz integral  $\varphi(xy, C) = 0$  de una ecuación diferencial  $f(xyy') = 0$  admite una curva *envolvente* que, como recordará el lector (tomo I, lecc. 31), se puede obtener por eliminación del parámetro  $C$  entre



$$\left. \begin{array}{l} \varphi(x, y, C) = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial C} = 0 \end{array} \right\} \quad [1]$$

Esta curva envolvente también satisface a la ecuación diferencial  $f(xyy') = 0$  puesto que en cada uno de sus puntos tiene las mismas coordenadas  $xy$  y la misma pendiente  $y'$  que la involuta que pasa por él (supuesto no singular).

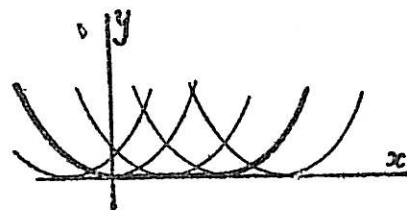
Sea, por ejemplo, la ecuación diferencial

$$y = y'^2 \quad \text{o sea} \quad y' = \pm \sqrt{y} \quad [2]$$

cuya integración da

$$\pm \frac{dy}{\sqrt{y}} = dx, \quad \pm 2\sqrt{y} = x + C$$

$$4y = (x + C)^2 \quad [3]$$

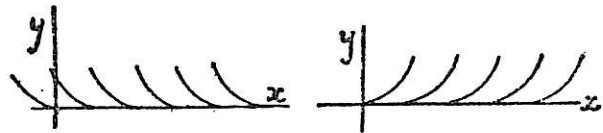


haz de parábolas tangentes al eje  $x$ . Este eje es, pues, una *solución singular*, por no obtenerse su ecuación  $y=0$  para ningún valor particular de  $C$  en [3].

Es curioso observar el hecho de que la solución singular  $y=0$  es analítica como las del haz integral. Si no imponemos la condición de analiticidad a las soluciones, podemos construir infinitas soluciones singulares enlazando, por ejemplo, dos integrales particulares cualesquiera mediante el arco de envolvente comprendido entre los puntos de contacto, como indica la figura.

El hecho no está en contradicción con el teorema de existencia y unicidad, por cuanto, en este caso, la ecuación  $f(xyy')=0$  no define  $y'$  como función uniforme de  $xy$ .

Si quisiéramos aplicar a la ecuación diferencial [2] el teorema de existencia, habríamos de desdoblarla en dos, para cada una de las cuales el teorema se cumple (en el semiplano  $y$  positivo) y mejor aún considerar aparte la ecuación a lo largo del eje  $x$ , como sigue:



- 1.<sup>a</sup>  $y' = +\sqrt{y}$  válida para las semiparábolas crecientes.
- 2.<sup>a</sup>  $y' = -\sqrt{y}$  válida en las semiparábolas decrecientes.
- 3.<sup>a</sup>  $y' = 0$  en los puntos del eje  $x$ .

Por cada punto del semiplano  $y > 0$  pasa una curva de la ecuación primera y otra de la ecuación segunda; en total dos curvas integrales de [2]. Por cada punto del eje  $x$  pasa una sola curva del haz [3] y además el eje  $x$  solución singular.

II. *Integrales singulares obtenidas directamente de la ecuación diferencial.*—No siempre es necesario el conocimiento previo del haz integral para obtener integrales singulares envolventes. Así en el ejemplo de la ecuación

$$y = y'^2 \quad [1]$$

se observa que a lo largo de la solución singular  $y=0$  los dos valores de  $y' = \pm\sqrt{y}$  coinciden, es decir, esta solución es lugar de raíces dobles de  $y'$  en [1]. Pero, en general, para que la ecuación en  $y'$

$$f(x, y, y') = 0 \quad [2]$$

tenga una raíz doble es necesario que sea

$$f_{y'}(x, y, y') = 0 \quad [3]$$

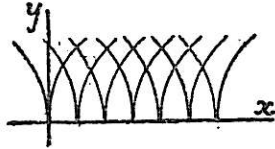
Eliminando  $y'$  entre [2] y [3] tendremos, pues, lugares de raíces dobles en  $y'$  y, por tanto, posibles soluciones singulares. Así en el ejemplo anterior es  $f_{y'} = 2y'$  y el sistema  $y = y'^2$   $y' = 0$  da efectivamente la solución singular  $y = 0$ .

Ahora bien, no siempre la curva así obtenida (supuesta factible la eliminación de  $y'$ ) es solución singular, pues puede ocurrir que las curvas integrales tengan puntos de retroceso, es decir, de tangente doble (\*), en

(\*) Véase el estudio de puntos singulares de las curvas en cualquier tratado de Analítica o de Cálculo diferencial.

cada uno de los cuales la pendiente  $y'$  será asimismo raíz doble de la ecuación [2] y entonces al eliminar  $y$  entre [2] y [3] lo que se obtiene es la *curva lugar de los puntos de retroceso de las curvas integrales*, que no tiene por qué ser solución de la ecuación.

Ejemplo: La ecuación  $yy'^2=1$ , derivada respecto de  $y'$  da  $2yy'=0$  y eliminando  $y'$  se obtiene, como antes, el eje  $x, y=0$ ;



pero ahora esta recta no es solución de la ecuación diferencial, como se comprueba inmediatamente; es simplemente el lugar de los puntos de retroceso de las curvas del haz integral  $\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}=x+C$ .

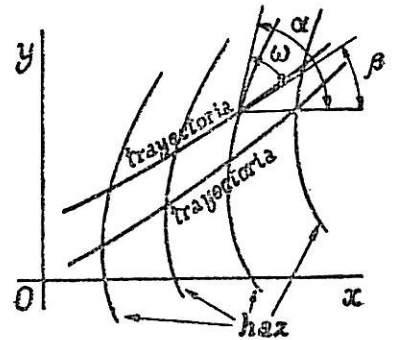
La curva obtenida por eliminación de  $y'$  entre [2] y [3] se llama *curva discriminante* de la ecuación diferencial. Para ver si esta curva es o no solución, bastará sustituir en la ecuación diferencial.

A poco que profundice el lector se dará cuenta de que lo general es que la curva discriminante, si existe, sea *lugar de puntos de retroceso* y lo *excepcional que sea solución singular*. En efecto, si tal curva (supongamos  $y=\varphi(x)$ ) verifica idénticamente la ecuación diferencial [2], verificará asimismo el resultado de derivarla con respecto a  $x$ , o sea,  $f_x+f_yy'+f_{y'}y''=0$ , y como  $f_{y'}=0$ , es preciso, en resumen, que la curva discriminante verifique simultáneamente las *tres* ecuaciones

$$f(x, y, y')=0 \quad f_{y'}(x, y, y')=0 \quad f_x+f_yy'=0$$

De otro modo: Este sistema debe ser compatible en  $y, y'$  (\*).

**6. Trayectorias de un haz de curvas planas.**— Llámense *trayectorias* de un haz  $F(x, y, k)=0$  las curvas que cortan a las del haz según un ángulo constante. Sea  $\omega$  dicho ángulo y sea  $\alpha$  el ángulo que forma en un punto  $xy$  cualquiera de una curva del haz su tangente con el eje  $x$ ; es decir,  $y'=\text{tg } \alpha$ . La pendiente de la trayectoria buscada por este punto será  $Y'=\text{tg } \beta$  siendo  $\beta=\alpha \pm \omega$  tomándose el signo  $+$  o el  $-$  según el sentido del ángulo  $\omega$ , y se tendrá, según que  $\omega$  sea de signo positivo o negativo (en la figura es negativo)



$$y = \text{tg } \alpha = \text{tg } (\beta \mp \omega) = \frac{\text{tg } \beta \mp \text{tg } \omega}{1 \pm \text{tg } \beta \text{tg } \omega} = \frac{Y' \mp \text{tg } \omega}{1 \pm Y' \text{tg } \omega}$$

Por tanto, si  $f(x, y, y')=0$  es la ecuación diferencial del haz dado, la de sus trayectorias, será:

$$f\left(x, Y, \frac{Y' \mp \text{tg } \omega}{1 \pm Y' \text{tg } \omega}\right) = 0$$

(\*) Para más detalles puede consultar el lector: BIEBERBACH, «Differentialgleichungen».



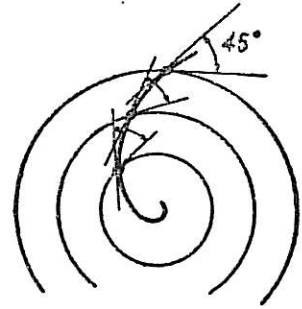
EJEMPLO. Las curvas que cortan bajo un ángulo de  $+45^\circ$  las circunferencias del haz  $x^2 + y^2 = k^2$  se obtendrán.

1.º Hallando la ecuación diferencial del haz

$$x + yy' = 0$$

2.º Sustituyendo en ella  $y'$  por  $\frac{y' - 1}{1 + y'}$

$$x + y \frac{y' - 1}{1 + y'} = 0 \quad \text{de donde} \quad y' = \frac{y - x}{y + x}$$



del tipo integrado en la lección 2.<sup>a</sup> y que da un haz de espirales logarítmicas.

**7. Trayectorias ortogonales.**—El problema se simplifica si  $\omega = 90^\circ$ , pues la relación entre  $y'$  e  $Y'$  es simplemente  $y' = -\frac{1}{Y'}$ . Por tanto, se hallará la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales de un haz  $F(x, y, k) = 0$  hallando la ecuación diferencial  $f(x, y, y') = 0$  del haz y cambiando en ella  $y'$  por  $-\frac{1}{y'}$ ; es decir,

$$f\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$$

EJEMPLO 1.º: El haz ortogonal de  $y = kx^n$  ( $n$  fijo,  $k$  parámetro) se obtendrá, pues, sustituyendo en la ecuación diferencial  $y' = n \frac{y}{x}$  la pendiente  $y'$  por  $-\frac{1}{y'}$ , o sea  $y' = -\frac{x}{ny}$   $ny \, dy + x \, dx = 0$  de donde  $ny^2 + x^2 = C$  haz de elipses si  $n > 0$  (circunferencias si  $n = 1$ ), hipérbolas si  $n < 0$ .

EJEMPLO 2.º: Para hallar el haz ortogonal de

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1 \tag{1}$$

obtenemos primeramente la ecuación diferencial de éste por eliminación del parámetro  $\lambda$  entre esta ecuación y su derivada respecto de  $x$

$$\frac{x}{a^2 + \lambda} + \frac{yy'}{b^2 + \lambda} = 0 \quad \text{de donde} \quad \frac{x}{a^2 + \lambda} = \frac{-yy'}{b^2 + \lambda} = \frac{x + yy'}{a^2 - b^2} = \eta$$

y, por tanto,

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2 + \lambda} &= x\eta \\ \frac{y^2}{b^2 + \lambda} &= -\frac{y}{y'}\eta \end{aligned} \right\} \text{ y sustituyendo en [1] } \left(x - \frac{y}{y'}\right) \frac{x + yy'}{a^2 - b^2} = 1$$

es decir,

$$\left(x - \frac{y}{y'}\right) (x + yy') = a^2 - b^2 \tag{2}$$

Si ahora sustituimos  $y'$  por  $-\frac{1}{y'}$  para obtener el haz ortogonal, resulta la misma ecuación, es decir, se obtiene el mismo haz. Resultado conocido ya por geometría ana-

ítica, puesto que se trata de un haz de cónicas homofocales. Los valores de  $\lambda$  que hacen  $\frac{a^2 + \lambda}{b^2 + \lambda} > 0$  son elipses y los que hacen  $\frac{a^2 + \lambda}{b^2 + \lambda} < 0$  son hipérbolas. Cada elipse (hipérbola) es normal en cada punto (excepto los vértices) a una hipérbola (elipse) del haz (\*).

**8. Determinación de evolventes.**—Dijimos en el tomo I (lec 31) que existen infinitas curvas que tienen una misma *evoluta*  $\gamma$ , curvas llamadas *evolventes* de  $\gamma$ , y de las que dimos una generación geométrica mediante un hilo arrollado a la curva. Ahora estamos en condiciones de obtener dichas evolventes analíticamente, dada la ecuación de la curva  $\gamma$ . En efecto, las tangentes a  $\gamma$  han de ser normales a toda evolvente, de donde:

*Las evolventes de una curva  $\gamma$  son las trayectorias ortogonales de sus tangentes*

Dada, pues, la ecuación de la curva  $\gamma$ , hallaremos la ecuación diferencial de sus tangentes, que será una ecuación de la forma Clairaut

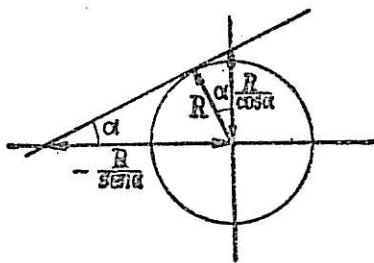
$$y = y'x + \varphi(y')$$

Cambiaremos en ella  $y'$  por  $-\frac{1}{y'}$ , obteniendo una ecuación de la forma Lagrange

$$y = -\frac{x}{y'} + \varphi\left(-\frac{1}{y'}\right)$$

y el haz integral de esta ecuación dará las evolventes pedidas.

**EJEMPLO:** Hallemos las evolventes de una circunferencia de radio  $R$ . La ecuación de una tangente de inclinación  $\alpha$  es



$$\frac{x}{-R/\sin \alpha} + \frac{y}{R/\cos \alpha} = 1$$

o sea en función de la pendiente  $y' = \operatorname{tg} \alpha$

$$-\frac{xy'}{R\sqrt{1+y'^2}} + \frac{y}{R\sqrt{1+y'^2}} = 1$$

o sea  $(y - xy')^2 = R^2(1 + y'^2)$

ecuación diferencial que, mediante la sustitución de  $y'$  por  $-\frac{1}{y'}$  se transforma en

$$(y'y + x)^2 = R^2(y'^2 + 1) \quad \text{o sea} \quad (y dy + x dx)^2 = R^2(dy^2 + dx^2)$$

es decir,

$$\left[ d \frac{x^2 + y^2}{2} \right]^2 = R^2 ds^2$$

(\*) De acuerdo con el concepto de *haz* manejado en la lección 1.<sup>a</sup> sería más propio en este ejemplo decir que se trata de *dos haces ortogonales* entre sí correspondientes a las dos ecuaciones lineales en  $y'$ , en que se desdobra la ecuación [2] de segundo grado en  $y'$ .

LECCION 5.<sup>a</sup>—EJERCICIOS

En coordenadas polares  $(r dr)^2 = R^2 ds^2$  o sea  $r^2 dr^2 = R^2 (dr^2 + r^2 d\theta^2)$

y, finalmente,  $(r^2 - R^2) dr^2 = R^2 r^2 d\theta^2$ ,  $d\theta = \frac{1}{R} \sqrt{1 - \frac{R^2}{r^2}} dr$

de donde  $0 + C = \frac{1}{R} \sqrt{r^2 - R^2} + \text{arc sen } \frac{R}{r}$

EJERCICIOS

Integrar:

1.  $y'^2 + 2 \frac{x}{y} y' - y = 0$ . 2.  $y = -x + y' - y'^2$  3.  $4y = x^2 + y'^2$  4.  $x = 5y'^4 + 3y$   
 5.  $x^2 y'^2 + y^2 = y'(1 + 2xy)$ . 6.  $y' = (x + y)^2$ . 7.  $(y - xy')^2 = b^2 + a^2 y'^2$ . 8.  $y = x(1 + y') + y'^2$ .

9. Naturaleza de las soluciones de la ecuación  $P(y') = 0$ , donde  $P$  indica un polinomio entero de coeficientes constantes.

10. Supongamos un medio transparente cuyo índice de refracción  $n$  sea una función conocida de la altura. Expresar la ecuación de la trayectoria de un rayo luminoso sabiendo el ángulo  $\alpha$  que forma con la vertical a una altura  $h$  conocida.

11. Hallar todas las curvas tales que los segmentos de tangentes interceptados por dos ejes rectangulares es constante  $= a$ .

12. Curvas que tienen esta propiedad: Las circunferencias cuyo diámetro es el segmento de tangente comprendido entre una recta fija y el punto de contacto pasan por un punto fijo (no situado en aquella recta).

13. Curvas tales que el producto de distancias de sus tangentes a dos puntos fijos sea una cantidad constante.

14. Hallar una curva que pase por el punto  $(1, 1)$  y cuya ecuación plückeriana  $v = \varphi(u)$  verifique la ecuación diferencial  $u dv - 2v du = 0$ .

15. Dar una regla que permita escribir inmediatamente el haz ortogonal al definido por la ecuación diferencial  $P dx + Q dy = 0$ , en forma análoga.

16. Trayectoria ortogonal al haz de hipérbolas  $x^2 - y^2 = k$  que pasa por el punto  $-1, -2$ .

17. Demostrar la siguiente regla para hallar el haz ortogonal a uno dado en coordenadas polares: Póngase la ecuación diferencial del haz dado en la forma  $\frac{r'}{r} = f(r, \theta)$  y sustitúyase por  $-\frac{r'}{r} = f(r, \theta)$ , integrando esta ecuación. Aplíquese para hallar los haces ortogonales a las ecuaciones siguientes:

18.  $r = C \text{ sen } \theta$  (¿qué clases de haces son?).

19.  $2r^2 = \theta^2 + C$ .

20.  $r = C(1 - \cos \theta)$ .

21. *Líneas de máxima pendiente.*—Una de las aplicaciones de las trayectorias ortogonales consiste en la determinación de las líneas de máxima pendiente de una superficie dada por su ecuación  $z = f(x, y)$  referida al plano  $x, y$  horizontal.

En efecto, estas líneas son perpendiculares a las horizontales de la superficie y se proyectarán sobre el plano  $x, y$  según las trayectorias ortogonales al haz  $f(x, y) = C$ , proyección de dichas curvas de nivel.

22. Aplicar lo anterior para hallar las curvas que describen las gotas de agua al resbalar (despreciando la inercia, es decir, con pequeña velocidad) sobre tejas cilíndricas inclinadas de  $30^\circ$ .

23. ¿Cuáles son las ecuaciones diferenciales cuyas curvas integrales son paralelas entre sí? (Significa que tienen un mismo haz de normales.)

24. Hallar las evolventes de la parábola  $y = x^2$ .

25. Integral general y singular de  $yy'^2 - 2xy' + y = 0$ .

26. Si se parte del haz  $(y - C)^2 + (x + C)^2 = 0$  y se elimina la constante  $C$  entre esta ecuación y su derivada respecto de  $C$  se obtiene por eliminación previa de  $y - C$  una ecuación que se satisface para  $C = -x$  y para  $C = \frac{4}{9} - x$ . Al sustituir en la ecuación dada se obtienen dos rectas  $y = -x$ ,  $y + x = 4/27$ . ¿Qué significación geométrica tienen?

AMPLIACION AL CAPITULO I

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LOS GRUPOS CONTÍNUOS DE TRANSFORMACIONES

Una de las más bellas aplicaciones de la teoría de grupos continuos de transformaciones, obra fundamental de Sophus Lie (\*), estriba en la sistematización y unificación de los artificios de integración de las ecuaciones diferenciales, aparentemente tan inconexos y casuísticos en todas las exposiciones elementales, como la que precede.

Tan sólo con objeto de dar una muy ligera idea de la posibilidad de una tal sistematización y de situar por unos momentos al lector en un punto de vista un poco más elevado, cerramos el capítulo con estas breves notas reducidas a un mínimo indispensable para tal fin.

**I. Transformaciones con un parámetro.**—Las homotecias de centro en el origen se formulan en el plano mediante dos ecuaciones de transformación

$$X = kx, \quad Y = ky \quad [1]$$

dependientes del parámetro  $k$  (razón de homotecia) y tienen la propiedad de formar grupo, es decir:

I. El producto de dos homotecias [1] es otra del mismo tipo, pues de

$$\left. \begin{array}{l} X = k_1 x \\ Y = k_1 y \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \xi = k_2 X \\ \eta = k_2 Y \end{array} \right\} \quad \text{resulta} \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = k_1 k_2 x \\ \eta = k_1 k_2 y \end{array} \right.$$

II. La transformación inversa de una homotecia [1]  $x = \frac{1}{k} X \quad y = \frac{1}{k} Y$

pertenece al mismo grupo. Puesto que corresponde al valor recíproco  $\frac{1}{k}$  de la razón de homotecia primera.

Propiedades análogas podemos probar para los giros del plano de centro en un punto (origen)

$$\left. \begin{array}{l} X = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ Y = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{array} \right\} \quad (\text{parámetro } \alpha) \quad [2]$$

En general, sea en un plano  $x, y$  el conjunto de las transformaciones continuas dependientes del parámetro  $\alpha$  ( $f$  y  $\varphi$  continuas)

$$X = f(x, y, \alpha), \quad Y = \varphi(x, y, \alpha) \quad [3]$$

Diremos que forman grupo si:

I. El producto de dos de ellas pertenece al conjunto

$$\left. \begin{array}{l} f[f(x, y, \alpha), \varphi(x, y, \alpha), \beta] \equiv f(x, y, \gamma) \\ \varphi[f(x, y, \alpha), \varphi(x, y, \alpha), \beta] \equiv \varphi(x, y, \gamma) \end{array} \right\} \quad [4]$$

II. La transformación inversa de una cualquiera pertenece asimismo al conjunto.

$$\text{Es decir, si} \quad \left\{ \begin{array}{l} X = f(x, y, \alpha) \\ Y = \varphi(x, y, \alpha) \end{array} \right\} \quad \text{se verifica} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = f(X, Y, \beta) \\ y = \varphi(X, Y, \beta) \end{array} \right\} \quad [5]$$

(\*) Matemático noruego de fines del siglo pasado.

Aplicando la propiedad I al producto de una transformación por su inversa resulta: *La identidad pertenece al grupo*, o sea, existe un cierto valor  $\alpha_0$  del parámetro  $\alpha$  para el cual se verificarán las identidades

$$\left. \begin{aligned} x &\equiv f(x, y, \alpha_0) \\ y &\equiv \varphi(x, y, \alpha_0) \end{aligned} \right\} \quad [6]$$

**2. Trayectorias de un grupo de transformaciones.**—Llámase *trayectoria* de un grupo de transformaciones el lugar geométrico de los homólogos de un mismo punto en todas las transformaciones del grupo.

Como cada punto de una trayectoria se transforma a su vez sin salirse de la misma (propiedad I del grupo), resulta:

1.º Las trayectorias forman un haz de curvas tal que por cada punto del plano pasa una trayectoria y sólo una.

2.º Las trayectorias se transforman en sí mismas en toda transformación del grupo, es decir, son *invariantes* respecto del mismo. Y recíprocamente, toda curva invariante es trayectoria, puesto que contiene los homólogos de uno cualquiera de sus puntos.

Vamos a ver cómo puede obtenerse la ecuación diferencial del haz de trayectorias.

**3. Transformación infinitesimal de un grupo.**—Si es  $\alpha_0$  el valor del parámetro que da la identidad, y damos al parámetro el valor  $\alpha_0 + \delta\alpha$  resultará una transformación infinitesimal que podemos escribir así:

$$\begin{aligned} x + \delta x &= f(x, y, \alpha_0 + \delta\alpha) = f(x, y, \alpha_0) + f_\alpha(x, y, \alpha_0) \delta\alpha \\ y + \delta y &= \varphi(x, y, \alpha_0 + \delta\alpha) = \varphi(x, y, \alpha_0) + \varphi_\alpha(x, y, \alpha_0) \delta\alpha \end{aligned}$$

de donde

$$\delta x = f_\alpha(x, y, \alpha_0) \delta\alpha \quad \delta y = \varphi_\alpha(x, y, \alpha_0) \delta\alpha$$

y, por tanto, la transformación infinitesimal del grupo vendrá expresada por

$$\frac{\delta x}{f_\alpha(x, y, \alpha_0)} = \frac{\delta y}{\varphi_\alpha(x, y, \alpha_0)} = \delta\alpha \quad [7]$$

Cada punto del plano (o región en que se opera) se desplaza en una transformación infinitesimal siguiendo la dirección del elemento de componentes  $\delta x$ ,  $\delta y$  dados por [7]. La primera igualdad constituye, por consiguiente, la *ecuación diferencial del haz de trayectorias del grupo*, y como este haz es invariante respecto del grupo, también lo será dicha ecuación diferencial.

Así, las trayectorias del grupo de homotecias [1] en el que  $\alpha_0 = 1$  (parámetro que da la identidad) es el haz integral de

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \quad \text{o sea} \quad y = Cx \quad (\text{rectas por el origen})$$

mientras las del grupo de giros [2] en el que  $\alpha_0 = 0$  vienen dadas por

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} \quad \text{o sea} \quad x dx + y dy = 0 \quad \text{que da} \quad x^2 + y^2 = C \quad (\text{circunferencias})$$

**4. Grupo definido por un sistema de primer orden.**—Dado un grupo, hemos visto que su transformación infinitesimal era de la forma [7].

Recíprocamente. Todo sistema diferencial de la forma

$$\frac{\delta x}{M(x, y)} = \frac{\delta y}{N(x, y)} = \delta\alpha \quad [8]$$

que verifique dentro de una región de plano las condiciones exigidas en los teoremas de existencia, definirá en ella, con las condiciones iniciales  $x_0, y_0$  para  $a=a_0$  dos funciones

$$\begin{aligned}x &= \xi(x_0, y_0, a) \\ y &= \eta(x_0, y_0, a)\end{aligned}$$

que pueden interpretarse:

1.º Fijando  $x_0, y_0$ , como las ecuaciones paramétricas de una curva en función del parámetro  $a$ .

2.º Fijando  $y_0$  pero variando  $x_0$  (o al revés, o variando  $x_0, y_0$  en función de un nuevo parámetro  $t$ ) como la ecuación de un haz de curvas dependientes de  $a$  y de  $x_0$  (de  $y_0$  o de aquel parámetro  $t$ ).

3.º Variando  $x_0, y_0$  y fijando  $a$  como una transformación en el plano entre los pares de puntos  $x_0, y_0$  y  $x, y$ , de tal modo que cada par de puntos homólogos están en una curva del haz anterior.

4.º Variando  $x_0, y_0, a$  como un grupo de transformaciones dependientes del parámetro  $a$  cuyas trayectorias son las curvas del referido haz integral, trayectorias cuya ecuación diferencial es la primera igualdad [8].

Si en lugar del parámetro  $a$  tomamos otro  $\beta$  relacionado con  $a$  por  $a=F(\beta)$  el sistema

$$\frac{\delta x}{M(x, y)} = \frac{\delta y}{N(x, y)} = \psi(\beta) d\beta \quad \psi = F' \quad [9]$$

definirá un grupo de transformaciones, dependiendo del parámetro  $\beta$ , con las mismas trayectorias, pero con una ley de corrimiento de puntos a lo largo de ellas distinta de la anterior. Dado un sistema de la forma [9] podemos ponerlo en la forma canónica [8] sin más que tomar como nuevo parámetro

$$a = \int_{\beta_0}^{\beta} \psi(\beta) d\beta$$

**5. Haces invariantes respecto de un grupo de transformaciones.**—Hemos dicho que las trayectorias de un grupo son curvas invariantes respecto de las transformaciones del grupo, y por tanto lo es también su ecuación diferencial. Pero podemos construir otras ecuaciones diferenciales invariantes respecto de las transformaciones del grupo si formamos haces de curvas  $\Phi(x, y, C)=0$  que sean invariantes respecto del referido grupo (sin serlo necesariamente cada una de las curvas), y hallamos su ecuación diferencial. Para construir un tal haz, basta partir de una curva cualquiera  $F(X, Y)=0$ , no trayectoria, y formar el haz de sus transformadas

$$F[f(x, y, a), \varphi(x, y, a)]=0$$

Este haz se transforma en sí mismo mediante la transformación del grupo, es decir, unas curvas en otras del mismo.

Derivando con respecto a  $x$  a lo largo de cada curva de este haz

$$F_f(f_x + f_y y') + F_\varphi(\varphi_x + \varphi_y y') = 0$$

y eliminando del parámetro  $a$  entre esta ecuación y la anterior se obtendrá la ecuación diferencial del haz que será asimismo invariante respecto de las transformaciones del grupo, puesto que se cumplirá independientemente del valor del parámetro  $a$ .

**6. Condición para que una ecuación diferencial de primer orden sea invariante respecto de un grupo dado por su transformación infinitesimal.**—Dada la ecuación diferencial de primer orden

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad [1]$$



y la transformación infinitesimal, definidora de un grupo,

$$\frac{\delta x}{M(x, y)} = \frac{\delta y}{N(x, y)} = \delta a \quad [2]$$

¿qué condición tienen que cumplir las funciones  $P, Q, M, N$  para que la ecuación [1] sea invariante respecto del grupo definido por [2]?

Será la misma para que sea invariante el haz integral de [1] que podemos suponer obtenido mediante la multiplicación de [1] por un factor integrante  $\mu$

$$\mu P dx + \mu Q dy = dU = 0 \quad U_x = \mu P \quad U_y = \mu Q \quad [3]$$

El haz integral  $U(x, y) = k$  puede ser invariante:

1.º Por serlo individualmente, cada curva en toda transformación.

2.º Por cambiar toda transformación una curva en otra del mismo haz.

Aplicando a la ecuación del haz la transformación infinitesimal [2] se deberá tener:

$$U(x + \delta x, y + \delta y) = \begin{cases} k & \text{en el primer caso} \\ k + \delta k & \text{en el segundo} \end{cases}$$

de donde, respectivamente,

$$U_x \delta x + U_y \delta y = \begin{cases} 0 \\ \delta k \end{cases} \quad [4]$$

y sustituyendo, según [2],

$$U_x M + U_y N = \begin{cases} 0 \\ \frac{\delta k}{\delta a} \end{cases} \quad \text{es decir,} \quad \mu (MP + NQ) = \begin{cases} 0 \\ \frac{\delta k}{\delta a} = C \text{ (indep. de } x, y) \end{cases} \quad [5]$$

En el primer caso  $MP + NQ = 0$ ,  $\frac{M}{N} = -\frac{Q}{P}$  y la ecuación [1] coincide con la de las trayectorias del grupo, como era de esperar, puesto que al ser invariante cada curva integral de [1] es trayectoria de [2].

En el segundo caso resulta  $\mu = C : (MP + NQ)$  y la ecuación diferencial admite el factor integrante 1.  $(MP + NQ)$ .

Para que la ecuación diferencial  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  sea invariante respecto del grupo definido por la transformación infinitesimal  $\frac{\delta x}{M(x, y)} = \frac{\delta y}{N(x, y)} = \delta a$  es condición

necesaria y suficiente que admita un factor integrante de la forma 1:  $(MP + NQ)$  o que coincida con la ecuación diferencial (en  $x, y$ ) del grupo, es decir, que sea  $MP + NQ = 0$ .

La suficiencia de la condición resulta de invertir paso a paso el razonamiento, o más brevemente de combinar [2] para obtener (en el caso  $MP + NQ \neq 0$ )

$$\delta a = \frac{\delta x}{M} = \frac{\delta y}{N} = \frac{P\delta x + Q\delta y}{PM + QN} = \delta U(x, y)$$

que da las curvas integrales  $U = a$  y sumando

$$a + \delta a = U + \delta U = U(x + \delta x, y + \delta y)$$

que nos dice que la transformada de la curva  $U = a$ , mediante la transformación infinitesimal [2], pertenece asimismo al haz integral, de donde resulta la invariancia del haz y, por tanto, de la ecuación.

La suficiencia en el caso de coincidencia de las ecuaciones diferenciales  $(PM + QN = 0)$  es trivial.

**7. Integribilidad elemental de las ecuaciones de primer orden.**—Como toda ecuación diferencial de primer orden  $P dx + Q dy = 0$  de la que se conoce un factor integrante  $\mu$  es integrable mediante cuadraturas, resulta:

*El conocimiento de un grupo de transformaciones que deje invariante la ecuación diferencial conducirá a un proceso de integración mediante cuadraturas*

En el fondo los cambios de variable utilizados en los casos elementales tratados equivalen a aplicar tales transformaciones.

Por ejemplo, las ecuaciones homogéneas

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

( $P$  y  $Q$  homogéneas del mismo grado) son invariantes respecto al grupo de homotecias con centro en el origen  $X=kx$ ,  $Y=ky$ , cuya transformación infinitesimal correspondiente es (§ 1)  $\delta x/x = \delta y/y$ , es decir,  $M \equiv x$ ,  $N \equiv y$ .

Estas ecuaciones admiten, pues, el factor integrante  $1/(Px + Qy)$ . Se comprueba fácilmente *a posteriori* que

$$\frac{P dx + Q dy}{Px + Qy} = \frac{1}{2} \left[ d \log_e xy + \frac{Px - Qy}{Px + Qy} d \log_e \frac{x}{y} \right]$$

es una diferencial exacta por ser  $\frac{Px - Qy}{Px + Qy}$  una 'función homogénea de grado cero, es

decir,  $= f\left(\frac{x}{y}\right)$ , o lo que es lo mismo  $= \varphi\left(\log_e \frac{x}{y}\right)$ , de donde resulta el haz integral:

$$\frac{1}{2} \log_e(xy) + \frac{1}{2} \int \varphi\left(\log_e \frac{x}{y}\right) d \log_e \frac{x}{y} = C$$

expresión con la que podríamos reconstruir fácilmente la discusión del haz integral obtenido en el párrafo 7, lec. 2.<sup>a</sup>, para las ecuaciones de coeficientes  $P$ ,  $Q$ , lineales.

Otro ejemplo: La ecuación lineal homogénea  $y' + f(x)y = 0$ ,  $dy + f(x)y dx = 0$  es invariante en el grupo de afinidades respecto del eje  $x$ ,  $X=x$ ,  $Y=ky$ , que tiene una transformación diferencial de la forma  $\delta x = 0$ ,  $\frac{dy}{y} = \delta k$  y, por tanto, admite el factor integrante  $1/y$  que da  $\frac{y'}{y} + f(x) = 0$  integrable por una cuadratura

$$\log_e y + \int f(x) dx = C$$

He aquí, pues, como una teoría esencialmente geométrica puede proporcionar la caracterización de la integribilidad elemental de las ecuaciones diferenciales estudiadas.



## Capítulo II.—ECUACIONES DE ORDEN SUPERIOR AL PRIMERO

### LECCIÓN 6.<sup>a</sup>—GENERALIDADES SOBRE ECUACIONES DE 2.<sup>o</sup> ORDEN Y DE ORDEN $n$

**1. Génesis de las ecuaciones de segundo orden. Familias de curvas con dos parámetros.**—Sea  $y = F(x, C_1, C_2)$  la ecuación explícita de una familia de curvas dependientes de dos constantes o parámetros  $C_1, C_2$ . Supongamos  $F$  derivable y consideremos el sistema

$$[1] \quad y = F(x, C_1, C_2) \quad y' = F'(x, C_1, C_2) \quad [2]$$

Si este sistema define  $C_1, C_2$  como funciones implícitas de  $y, y'$  y de la variable  $x$ , podremos escribir

$$C_1 = \varphi(x, y, y') \quad C_2 = \psi(x, y, y') \quad [3]$$

lo que indica que *cada curva de la familia vendrá determinada por un punto  $x$ , y de ella y por la pendiente  $y'$  de la tangente en él.*

Volviendo a derivar

$$y'' = F''(x, C_1, C_2) \quad [4]$$

y sustituyendo en esta derivada  $C_1, C_2$  por sus expresiones [3] obtendremos:

$$y'' = f(x, y, y') \quad [5]$$

ecuación diferencial de segundo orden a la que satisfacen *todas las curvas de la familia* [1] y que se llama *ecuación diferencial de ésta*, mientras [1] se llama *familia integral* o *integral general* de [5].

Lo hecho equivale a eliminar  $C_1, C_2$  entre la ecuación [1] y sus derivadas primera y segunda [2] y [4].

Análogamente si la ecuación de una familia de curvas, dada en forma implícita por

$$F(x, y, C_1, C_2) = 0, \quad [6]$$

define  $y$  como función uniforme implícita y derivable de  $x, C_1, C_2$ , podemos hallar  $y$  e  $y'$  como nos enseña el Cálculo diferencial, es decir, derivando dos veces [6] con respecto a  $x$

$$F = 0 \quad F_x + F_y y' = 0 \quad F_{x^2} + 2F_{xy} y' + F_{y^2} y'^2 + F_{yy} y'' = 0$$

y eliminando directamente  $C_1, C_2$  entre estas tres ecuaciones, obtendremos en general una ecuación de segundo orden de la forma

$$f(x, y, y', y'')=0 \quad [7]$$

que llamaremos igualmente *ecuación diferencial* de la familia [6], y ésta se llamará *familia integral* o *integral general* de la ecuación [7]. Cada una de las curvas de la familia se llama *integral particular* de la ecuación diferencial [7].

Cuando la ecuación diferencial viene dada en la forma [5], es decir, con la  $y''$  despejada, la llamaremos *normal*.

La ecuación diferencial de una familia de curvas dependiente de dos parámetros es, pues, una ecuación que cumplen todas las curvas de ella, y que se traduce en una propiedad geométrica común relativa a sus puntos y a los elementos diferenciales de primero y segundo orden, es decir, relativa a la tangente y a la curvatura.

EJEMPLO 1.º. Todas las circunferencias de radio fijo  $R$  del plano tienen por ecuación

$$(x-a)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \quad [8]$$

dependiente de las constantes o parámetros  $a$  y  $\beta$ , coordenadas del centro.

Derivando dos veces con relación a  $x$  resulta

$$x-a + (y-\beta) y' = 0 \quad 1 + y'^2 + (y-\beta) y'' = 0 \quad [9]$$

Eliminando  $a$  y  $\beta$  entre [8] y [9] resulta la ecuación diferencial de la familia de circunferencias de radio  $R$

$$Ry'' = [1 + y'^2]^{3/2}$$

que hubiésemos podido escribir directamente, expresando que el radio de curvatura es constante e igual a  $R$ .

EJEMPLO 2.º: Si eliminamos las constantes  $C_1, C_2$  entre la ecuación  $y = C_1 e^{2x+C_2}$  y las que resultan de derivarla  $y' = 2C_1 e^{2x+C_2}$ ,  $y'' = 4C_1 e^{2x+C_2}$  obtenemos dos ecuaciones de segundo orden,  $y'' = 2y'$ ,  $y'' = 4y$  (y la de primero  $y' = 2y$ , consecuencia de ellas). Esta aparente anomalía se debe a que las ecuaciones  $y = C_1 e^{2x+C_2}$ ,  $y' = 2C_1 e^{2x+C_2}$  no definen ahora  $C_1, C_2$  como funciones de  $y$  e  $y'$ . El jacobiano  $\frac{D(yy')}{D(C_1 C_2)}$  es idéntica-

mente nulo (como puede comprobar fácilmente el lector), lo que prueba la existencia de  $y' = \varphi(y, x)$ , y al quedar determinada la pendiente de la curva en cada punto, las curvas constituyen un haz (lección 1.ª) y no una familia, es decir, no existe más que un parámetro esencial. Fácil hubiese sido darnos cuenta de ello si hubiésemos puesto la ecuación en la forma  $y = C_1 e^{C_2 e^{2x}} = K e^{2x}$

En general, toda ecuación de la forma  $y = F(x, \varphi(C_1, C_2))$  no depende esencialmente más que del parámetro  $K = \varphi$  y define un haz. Más general: diremos que la familia de curvas  $y = F(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$  depende de  $n$  constantes o parámetros *esenciales* o *independientes*  $C_1, C_2, \dots, C_n$  si no existe una familia de menor número de parámetros  $y = \Phi(x, K_1, K_2, \dots, K_\nu)$  ( $\nu < n$ ) que las comprenda a todas.

**2. Teorema de existencia.**—Vamos a ocuparnos ahora del problema de integrar una ecuación diferencial de segundo orden, es decir, de hallar la

ecuación de la familia que la satisface, o lo que es equivalente, hallar cada curva que pasa por un punto dado  $x_0, y_0$  y tiene en él una pendiente dada  $y'_0$ .

Ante todo hemos de plantearnos la cuestión de existencia de la solución buscada. Se resuelve esta cuestión de modo parecido a lo hecho para ecuaciones diferenciales de primer orden.

Supongamos la ecuación dada en forma normal

$$y'' = f(x, y, y') \quad [1]$$

y sea  $f$  analítica y, por tanto, derivable cuantas veces deseemos en un cierto dominio de  $x, y, y'$  y sean dados en él los valores  $y_0, y'_0$  correspondientes a un valor  $x_0$  de la variable. En el desarrollo en serie de Taylor de  $y$  en el entorno de  $x_0$  (supuesto existente tal desarrollo)

$$y = y_0 + y'_0(x - x_0) + \frac{y''_0}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''_0}{3!}(x - x_0)^3 + \dots$$

podemos calcular los coeficientes  $y''_0, y'''_0, \dots$  en función de  $y_0, y'_0$  deduciéndolos de [1] y de sus derivadas sucesivas para  $x_0$ , de modo análogo al indicado en la lec. 1.<sup>a</sup>, § 3.

Se puede demostrar (Cauchy) la convergencia de la serie obtenida en un cierto entorno y, por tanto, la existencia en él de una solución analítica de la ecuación diferencial en las condiciones indicadas. La unicidad del desarrollo en serie prueba además la unicidad de la solución con estos datos. Si suponemos variables los datos iniciales  $y_0, y'_0$  dentro del dominio considerado, se obtiene la familia de curvas integrales o *integral general* en función de estas dos constantes arbitrarias.

No es corriente que las constantes mediante las cuales se expresa la familia de curvas integrales tengan la significación de *condiciones iniciales*  $y_0, y'_0$ , para una cierta  $x_0$ , pero cualesquiera que sean las constantes elegidas, la existencia y unicidad de la solución indica que *han de quedar unívocamente determinadas al dar tales condiciones iniciales*. Es decir, al dar el valor de la función incógnita y de su derivada en un punto, la solución de [1] queda unívocamente determinada y es analítica si  $f$  lo es.

**3. Sistema de primer orden equivalente a una ecuación de segundo. Método de Picard.**— Otro modo de demostrar la existencia de la solución es *transformar la ecuación en un sistema equivalente* poniendo  $y' = z$ . En efecto

$$y'' = f(x, y, y') \quad \text{es equivalente a} \quad \begin{cases} y' = z \\ z' = f(x, y, z) \end{cases}$$

y las condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0 \quad y'(x_0) = y'_0 \quad \text{equivalen a} \quad y(x_0) = y_0 \quad z(x_0) = z_0$$

Este sistema de primer orden se puede tratar por el método de aproximaciones sucesivas como se hizo para las ecuaciones de primer orden. Es decir, formando las dos sucesiones de funciones siguientes :

1. <sup>a</sup> aproximación	2. <sup>a</sup> aproximación	3. <sup>a</sup> aproximación...
$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^x z_0 dx$	$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^x z_1 dx$	$y_3 = y_0 + \int_{x_0}^x z_2 dx \dots$
$z_1 = z_0 + \int_{x_0}^x f(xy_0z_0) dx$	$z_2 = z_0 + \int_{x_0}^x f(xy_1z_1) dx$	$z_3 = z_0 + \int_{x_0}^x f(xy_2z_2) dx \dots$

Si suponemos que  $f(xyz)$  es uniforme y continua en un cierto dominio, y que verifica en él la condición de Lipschitz con relación a las dos funciones  $yz$ , o sea que existe un número positivo  $M$  tal que

$$\frac{|f(x, y_1, z) - f(x, y_2, z)|}{|y_1 - y_2|} < M, \quad \frac{|f(x, y, z_1) - f(x, y, z_2)|}{|z_1 - z_2|} < M$$

para todo par de puntos  $\left\{ \begin{matrix} (xy_1z) & (xy_2z) \\ (xy_1z_1) & (xy_2z_2) \end{matrix} \right\}$  de una misma paralela al eje  $\left\{ \begin{matrix} y \\ z \end{matrix} \right\}$ , podemos asegurar la existencia de un par de funciones límites para las sucesiones  $y_n, z_n$  en un cierto entorno del punto  $x_0$ .

Estas funciones límites

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \quad z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$$

son soluciones del sistema y, además, son *las únicas* soluciones que cumplen las condiciones iniciales dadas.

Omitimos la demostración, que es similar a la desarrollada para una sola función incógnita en la lección 1.<sup>a</sup> Sólo diremos que la condición de Lipschitz se cumple cuando  $f$  admite derivada acotada respecto de  $y$  e  $y'$ .

**4. Ecuaciones de orden  $n$ . Sistema equivalente.**—Todo lo dicho para ecuaciones de segundo orden se generaliza fácilmente para ecuaciones de orden  $n$ .

Dada una ecuación finita

$$F(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0 \quad [1]$$

dependiente de  $n$  constantes arbitrarias, esenciales o independientes, si es posible eliminarlas entre esta ecuación y la que resulta de derivarla  $n$  veces con relación a la variable independiente, se obtiene una ecuación diferencial de la forma

$$f(x, y, y', y'' \dots y^{(n)}) = 0 \quad [2]$$

a la que satisfacen todas las curvas de la familia, llamándose la ecuación finita [1] de esta familia, *integral general* de [2].

Dada la ecuación de orden  $n$  en forma normal, es decir, con la derivada  $n$ -sima despejada

$$y^{(n)} = f(x, y, y' \dots y^{(n-1)}) \quad [3]$$

en la que  $f$  es analítica, se demuestra la existencia de una solución analí-



tica única dados los valores  $y_0, y'_0, \dots, y_0^{n-1}$  de la función  $y$  y de sus  $n-1$  primeras derivadas, correspondientes a un valor  $x_0$  de la variable independiente. Al variar estos  $n$  datos iniciales se obtiene la integral general.

También existe solución única con estos datos aunque  $f$  no sea analítica pero sí uniforme y continua y cumpla la condición de Lipschitz respecto de las funciones  $y, y', \dots, y^{n-1}$ , en particular cuando  $f$  sea derivable respecto de  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ .

La ecuación [3] es equivalente a un sistema de  $n$  ecuaciones de primer orden que se obtiene simplemente considerando como funciones incógnitas nuevas las  $n-1$  primeras derivadas  $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ . Designándolas, para mayor claridad, con letras distintas

$$y' = z \quad y'' = s \dots y^{(n-2)} = u \quad y^{(n-1)} = v$$

se obtiene como equivalente a la ecuación [3] el sistema de  $n$  ecuaciones de primer orden

$$y' = z \quad z' = s \dots \dots \quad u' = v \quad v' = f(x, y, z, s \dots u, v)$$

**5. Ecuaciones cuyo orden puede rebajarse.**—Si pocos eran los tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden integrables por cuadraturas, menos serán aún los de segundo orden y los de orden  $n$  en general. Por ello, sólo serán objeto de estudio detenido los tipos más frecuentes en las aplicaciones, y en particular las ecuaciones llamadas *lineales* que trataremos en lecciones sucesivas.

Conviene, no obstante, decir antes dos palabras acerca de algunos casos sencillos en los que puede rebajarse el orden de una ecuación, es decir, reducirse su integración a la de otra de orden menos elevado, en particular los casos en que una ecuación de segundo orden se reduce a una de primero. Consideraremos los, más interesantes, que son:

1.º *Ecuaciones en las que falta la  $y$*

$$f(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad [1]$$

Se comprende que basta tomar como nueva función incógnita la derivada  $y' = p$  para que la ecuación quede reducida a la de orden  $n-1$

$$f(x, p, p', \dots, p^{(n-1)}) = 0 \quad [2]$$

Si sabemos integrar esta ecuación obteniendo  $p = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})$  una nueva integración dará  $y$  con una nueva constante aditiva. Si es más fácil obtener  $x = \psi(p, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})$  e integrar  $dy = p dx = p d\psi$ , tendremos las curvas integrales en ecuaciones paramétricas:



EJEMPLO: Sea la ecuación  $y = y'' x + y'^2$  [3]

Mediante  $y' = p$  se transforma en  $p = p'x + p^2$  ecuación de Clairaut cuya integral general es  $p = C_1 x + C_1^2$ ; por tanto la integral general de la ecuación dada es

$$y = \frac{C_1}{2} x^2 + C_1^2 x + C_2 \quad [4]$$

En cuanto a la integral singular de la transformada  $p = -\frac{x^2}{4}$  (obtenida como se indicó en la lec. 5.<sup>a</sup>, § 4) da origen a un haz de integrales singulares de la ecuación propuesta

$$y = -\frac{x^3}{12} + K \quad [5]$$

denominándose *singulares* por cuanto son curvas (cúbicas) que no pertenecen a la familia integral [4] (parábolas) y que, sin embargo, verifican la ecuación diferencial dada [3], como es fácil comprobar.

## 2.º Ecuaciones en las que falta $x$

$$f(y, y' \dots y^{(n)}) = 0 \quad [1]$$

Tomaremos como nueva función  $y' = p$  y como nueva variable  $y$ . Se tendrá:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p \quad y''' = \frac{dy''}{dy} p = \frac{d^2 p}{dy^2} p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p \quad \text{etc}$$

Se ve que podemos expresar las derivadas de  $y$  mediante las de  $p$  con órdenes de derivación rebajados en una unidad, con lo que la ecuación se transformará en otra del tipo

$$F(y, p, p', \dots, p^{(n-1)}) = 0$$

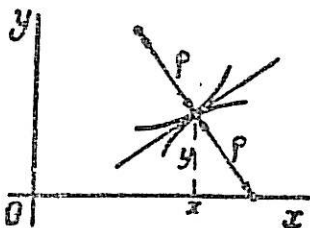
Integrada ésta, es decir hallada

$$p = \varphi(y, C_1 \dots C_{n-1}) \quad \text{o sea} \quad dx = \frac{dy}{\varphi(y, C_1 \dots C_{n-1})}$$

se obtiene  $x = \Phi(y, C_1 \dots C_n)$  por una cuadratura.

Si es más fácil obtener  $y = \psi(p, C_1 \dots C_{n-1})$  integraremos  $dx = \frac{d\psi}{p}$  para hallar  $x$  expresando así la familia integral paraméricamente.

EJEMPLO: Hallar las curvas cuyo radio de curvatura es igual a la longitud de la normal.—Según el lado de la normal en que situemos el centro de curvatura será



$$\frac{[1 + y'^2]^{\frac{3}{2}}}{y''} = \pm y \sqrt{1 + y'^2} \quad \text{o sea} \quad 1 + y'^2 = \pm yy''$$

ecuación sin la  $x$ . Aplicando las transformaciones anteriores, tenemos

$$1 + p^2 = \pm y \frac{dp}{dy} p \quad \text{es decir} \quad \frac{p dp}{1 + p^2} = \pm \frac{dy}{y}$$

$$\frac{1}{2} l(1 + p^2) = \pm ly + lC_1$$

Para el signo + resulta  $1 + p^2 = C_1^2 y^2$   $y' = \sqrt{C_1^2 y^2 - 1}$

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1^2 y^2 - 1}} = dx \quad \frac{1}{C_1} \operatorname{Arg} \operatorname{Ch} C_1 y = x + C_2 \quad y = \frac{1}{C_1} \operatorname{Ch} C_1 (x + C_2)$$

familia de catenarias.

Para el signo - resulta  $1 + p^2 = \frac{C_1^2}{y^2}$   $y' = \frac{1}{y} \sqrt{C_1^2 - y^2}$

$$\frac{y dy}{\sqrt{C_1^2 - y^2}} = dx \quad -\sqrt{C_1^2 - y^2} = x + C_2 \quad (x + C_2)^2 + y^2 = C_1^2$$

circunferencias con centro en el eje  $x$ .

3.º *Ecuaciones en las que faltan la  $y$  y la  $x$ .*—Si se presentan ambas circunstancias simultáneamente, el problema se simplifica notablemente en especial en las ecuaciones de segundo orden, que toman entonces la forma normal siguiente

$$y'' = f(y')$$

y mediante  $y' = p$

$$\frac{dp}{dx} = f(p) \quad dx = \frac{dp}{f(p)} \quad x = \int \frac{dp}{f(p)} + C_1$$

$$dy = p dx = \frac{p dp}{f(p)} \quad y = \int \frac{p dp}{f(p)} + C_2$$

obteniendo así explícitamente las ecuaciones paramétricas de la familia de curvas integrales en función de la pendiente  $p$ .

EJEMPLO: Si nos proponemos hallar las curvas cuyo radio de curvatura es constante, nos vemos conducidos a integrar

$$(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = ky'' \quad \text{o sea} \quad (1 + p^2)^{\frac{3}{2}} = k \frac{dp}{dx}$$

y se obtiene

$$\left. \begin{aligned} x &= k \int \frac{dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} + C_1 = k \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} + C_1 \\ y &= k \int \frac{p dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} + C_2 = -\frac{k}{\sqrt{1 + p^2}} + C_2 \end{aligned} \right\} \text{de donde} \quad (x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = k^2$$

Circunferencias de radio  $k$ . Hemos efectuado aquí un cálculo inverso del desarrollado en el párrafo 1. Allí obteníamos la ecuación diferencial partiendo de la ecuación finita; aquí, por el contrario, construimos la ecuación finita a partir de la ecuación diferencial, demostrando con ello que *sólo las circunferencias* tienen la propiedad de tener radio de curvatura constante.

4.º *Ecuaciones de la forma  $y^{(n)} = f(y^{(n-2)})$ .*—Concretándonos al caso de ecuaciones de segundo orden, son aquéllas que carecen de  $y'$  y de  $x$

$$y'' = f(y) \quad [1]$$

Se expresa la integral directamente mediante el siguiente sencillo artificio (usual en mecánica): multiplicar ambos miembros por  $dy = y' dx$

$$y'' y' dx = f(y) dy \quad [2]$$

e integrando

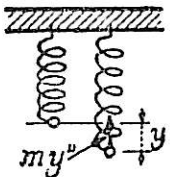
$$\frac{1}{2} y'^2 = \int f(y) dy + K_1 \quad \text{de donde} \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{2 \int f dy + C_1} \quad [3]$$

Ecuación de primer orden de variables separadas llamada *integral primera* o *intermedia* de [1]. Una nueva cuadratura dará

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{2 \int f dy + C_1}} + C_2$$

El caso general  $y^{(n)} = f(y^{(n-2)})$  se reduce al tratado adoptando como nueva incógnita  $\eta = y^{(n-2)}$ .

EJEMPLO: La fuerza que tiende a volver a su posición de equilibrio todo punto de un cuerpo elástico deformado, como un muelle por ejemplo (v. figura) es (dentro de ciertos límites) proporcional a esta deformación. Despreciando pérdidas por resistencias, la ecuación del movimiento del extremo del muelle será, pues, de la forma (masa  $\times$  aceleración = fuerza)



$$m y'' = -ky$$

La integral primera [3] limitada entre dos posiciones  $\frac{1}{2} m(y_2'^2 - y_1'^2) = - \int_{y_1}^{y_2} ky dy$  expresa el conocido teorema que iguala la variación de la energía cinética al trabajo desarrollado. Esta integral primera es, pues, una expresión particular del *teorema de la conservación de la energía*. El lector completará fácilmente la integración, que no detallamos, ya que más adelante estudiaremos detenidamente este problema por otros métodos.

**6. Ecuaciones homogéneas en  $y, y', \dots, y^{(n)}$ .**—Entre las ecuaciones cuyo orden puede rebajarse figuran diversos tipos de ecuaciones homogéneas; el más importante es aquél cuya homogeneidad se refiere a la función  $y$  y a sus derivadas; es decir, ecuaciones del tipo

$$f(x, y, y' \dots y^{(n)}) = 0 \quad \text{tal que} \quad f(\lambda x, \lambda y, \lambda y', \dots, \lambda y^{(n)}) = \lambda^k f(x, y, \dots, y^{(n)})$$

$k$  grado de homogeneidad (que supondremos  $> 0$ ). Por tanto, la ecuación puede escribirse

$$y^k f\left(x, 1, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \dots, \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0 \quad [1]$$

que se satisface para las soluciones de

$$f\left(x, 1, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \dots, \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0 \quad [2]$$

La forma de esta ecuación sugiere el cambio  $\frac{y'}{y} = u$  ( $u$  nueva función), o sea  $y' = uy$ , cuyas derivadas sucesivas dan

$$y'' = u'y + uy' = y(u' + u^2) \qquad \frac{y''}{y} = u' + u^2$$

$$y''' = y(u'' + 2uu') + y'(u' + u^2) = y(u'' + 3uu' + u^3) \qquad \frac{y'''}{y} = u'' + 3uu' + u^3$$

Como cada cociente  $\frac{y^{(k)}}{y}$  se expresa en función de  $u, u', \dots, u^{(k-1)}$  la ecuación [2] se transforma en otra de orden  $n-1$  en  $u$

$$\psi(x, u, u', \dots, u^{n-1}) = 0$$

Integrando esta ecuación obtendremos  $u = \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-1})$  y sustituyendo en la ecuación de transformación  $\frac{y'}{y} = u$  se obtendrá  $y$  por una nueva integración  $y = C_n e^{\int u dx}$

Ejemplo: Apliquemos este cambio a la ecuación lineal de segundo orden homogénea

$$y'' + X_1(x)y' + X_2(x)y = 0$$

Dividiendo por  $y$  y efectuando los cambios anteriores se transforma en

$$u' + u^2 + X_1(x)u + X_2(x) = 0$$

dél tipo de Riccati.

Toda ecuación lineal homogénea de segundo orden se transforma en otra de Riccati tomando como nueva función  $u$  incógnita la derivada logarítmica de la función *y* buscada.

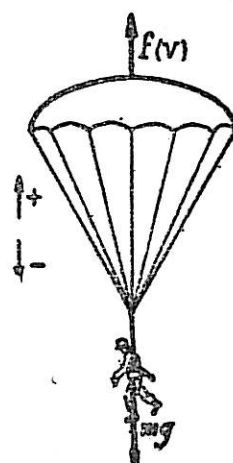
Veamos ahora la aplicación de los tipos estudiados en esta lección a algunos problemas de Mecánica.

**7. Descenso de un paracaidista.**—Admitiendo que la resistencia que el aire opone al paracaidista es una función exclusiva de la velocidad  $f(v)$ , el descenso de un paracaidista (de masa  $m$ ) vendrá regulado por una ecuación de la forma (sentido positivo hacia arriba)

$$m \frac{d^2 h}{dt^2} = -mg + f\left(\frac{dh}{dt}\right)$$

en donde  $h$  es la altura en cada instante  $t$  (tiempo),  $\frac{dh}{dt}$  es la velocidad  $v$ ,  $\frac{d^2 h}{dt^2}$  es la aceleración. La ecuación es la fundamental de la dinámica; masa  $\times$  aceleración = fuerza, que en este caso es = peso - resistencia.

Se suele obtener una aproximación muy aceptable tomando la resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad  $f(v) = kv^2$



La ecuación, en la que no figura  $t$  ni  $h$ , se integrará pues (§ 5) tomando como incógnita la derivada primera  $v = \frac{dh}{dt}$  y se tendrá

$$-m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2 \qquad \frac{-dv}{g - \frac{k}{m} v^2} = dt$$

que puede integrarse tomando como primitiva la función Arg Ch o bien Arg Cth según que  $|v|$  crezca o decrezca con  $t$ . Adoptando esta segunda hipótesis (la más frecuente) resulta

$$-\sqrt{\frac{m}{kg}} \operatorname{Arg} \operatorname{Cth} \sqrt{\frac{k}{mg}} v = t + C_1 \quad \text{es decir} \quad v = -\sqrt{\frac{mg}{k}} \operatorname{Cth} \sqrt{\frac{kg}{m}} (t + C_1)$$

Recordando que Cth  $x$  tiende a 1 al crecer  $x$ , se observa que en valor absoluto la velocidad del paracaidista tiende a un límite  $\sqrt{\frac{mg}{k}}$  que depende de la masa  $m$  y del coeficiente  $k$ , que es función, a su vez, de la superficie del paracaídas.

Si se empieza a contar el tiempo en el instante en que se abre el paracaídas, y llamamos  $v_0$  la velocidad en dicho instante (velocidad adquirida por la caída libre en el tiempo que está sin abrir y que es en general  $> \sqrt{mg/k}$ ) será

$$C_1 = -\sqrt{\frac{m}{kg}} \operatorname{Arg} \operatorname{Cth} \sqrt{\frac{k}{mg}} v_0$$

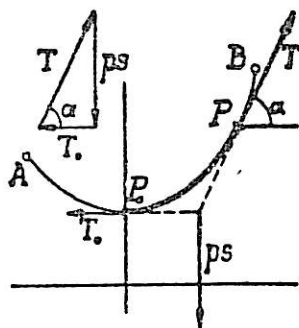
lo que determina  $C_1$ .

Una nueva integración dará la ecuación del movimiento

$$h = h_0 - \frac{m}{k} \operatorname{I} \operatorname{Sh} \sqrt{\frac{kg}{m}} (t + C_1)$$

donde  $h_0$  es la altura en que se ha abierto el paracaídas. Las dos constantes  $C_1$ ,  $h_0$  han quedado así determinadas en función de los datos iniciales. Si el paracaídas se abre antes de adquirir la velocidad límite,  $v$  será creciente y en las fórmulas anteriores habrá que sustituir Cth por Th y I Sh por I Ch. Si el paracaídas se abre en el preciso instante en que la velocidad de caída es  $\sqrt{mg/k}$  esta velocidad permanece invariable ( $dv=0$ ) y el movimiento de caída es uniforme.

**8. Cable colgante, catenaria.**—Un hilo o cable colgante puede asimilarse (suponiendo la reacción elástica despreciable frente al peso) a una cadena de infinitos eslabones articulados (sin rozamiento) y por eso la figura de equilibrio se llama *catenaria*. Vamos a determinar su ecuación.



Supondremos, de momento, un cable con caída suficiente para presentar un punto  $P_0$  de tangente horizontal, en el cual llamaremos  $T_0$  la tensión del cable, es decir, la fuerza que marcaría un dinamómetro intercalado entre los dos trozos de cable, supuesto cortado en este punto. Llamemos análogamente  $T$  la tensión en un punto cualquiera  $P$ , y  $p$

el peso por unidad de longitud del cable. Elijamos, como indica la figura, unos ejes cartesianos horizontal  $x$  y vertical  $y$ , pasando este último por  $P_0$ .

El peso de un trozo cualquiera de cable  $P_0P$  queda equilibrado por las tensiones  $T_0$  y  $T$  en los extremos.

Del equilibrio de estas tres fuerzas se desprende (v. figura)

$$ps = T_0 \operatorname{tg} \alpha = T_0 y' \quad \text{de donde derivando} \quad p \frac{ds}{dx} = T_0 y' \quad [1]$$

o sea

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{p}{T_0} \quad (2)$$

Integrando entre  $P_0$  y  $P$

$$\text{Arg Sh } y' = \frac{p}{T_0} x \quad \text{o sea} \quad y' = \text{Sh } \frac{p}{T_0} x$$

y una nueva integración da

$$y - y_0 = \frac{T_0}{p} \text{Ch } \frac{p}{T_0} x - \frac{T_0}{p} \quad (3)$$

Y si adoptamos como eje  $x$  la horizontal que diste  $\frac{T_0}{p}$  de  $P_0$ , y que llamaremos *base* de la catenaria será  $y_0 = \frac{T_0}{p}$  y, por tanto,

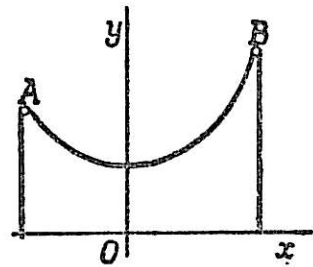
$$y = \frac{T_0}{p} \text{Ch } \frac{p}{T_0} x \quad (4)$$

y mediante una simple variación de escala en ambos ejes, llamando  $\xi = \frac{p}{T_0} x$   $\eta = \frac{p}{T_0} y$ , queda  $\eta = \text{Ch } \xi$ .

La condición de equilibrio que se desprende del triángulo de fuerzas (figura) permite asimismo determinar la tensión  $T$  en un punto cualquiera  $P$ ,

$$T = \frac{T_0}{\cos \alpha} = T_0 \sqrt{1+y'^2} = T_0 \sqrt{1 + \text{Sh}^2 \frac{p}{T_0} x} = T_0 \text{Ch } \frac{p}{T_0} x = py$$

La tensión en todo punto  $P$  de la catenaria es, pues, igual al peso de un hilo o cable de igual clase que colgara desde dicho punto a la base. Sustituyendo los amarres  $AB$  por poleas y arrollando a ellas la prolongación del cable, dejándolo caer por ambos extremos hasta la base, subsistiría el equilibrio.



**9. Determinación de la catenaria.**— Las constantes de la integración han desaparecido después de una elección conveniente de ejes. Pero eligiendo otros ejes horizontal y vertical cualesquiera, la ecuación de la catenaria sería de la forma

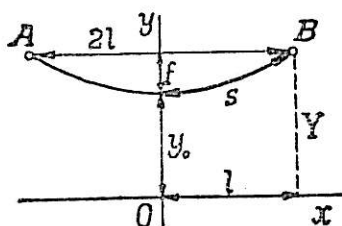
$$\frac{p}{T_0} (y + C_2) = \text{Ch } \frac{p}{T_0} (x + C_1) \quad (5)$$

Si se pregunta cuál será la forma adoptada por un cable de longitud  $2s$  conocida, colgado entre dos puntos  $A$  y  $B$  de coordenadas  $x_1, y_1, x_2, y_2$  dadas, habrá que determinar  $C_1, C_2$  y  $T_0$  a partir de estos datos. El problema pueda verse resuelto en los tratados especiales (\*).

(\*) Por ejemplo, *Bieberbach*, «Differentialgleichungen».



Sólo nos fijaremos en el caso en que los dos puntos de amarre están a la misma altura. La posición del eje es, por razón de simetría, la mediatriz de  $AB$  y para individualizar la catenaria sólo resta fijar la base.



Sean  $Y, y_0$  la ordenada de los extremos y la del punto más bajo. Sea  $AB=2l$  y sea  $2s$  la longitud del cable.

La ecuación será:

$$[6] \quad y = y_0 \operatorname{Ch} \frac{x}{y_0} \quad \text{de donde} \quad Y = y_0 \operatorname{Ch} \frac{l}{y_0} \quad [7]$$

y la semilongitud del cable

$$s = \int_0^l \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^l \operatorname{Ch} \frac{x}{y_0} dx = y_0 \operatorname{Sh} \frac{l}{y_0} \quad [8]$$

poniendo  $s = kl$  y  $\frac{l}{y_0} = \xi$  queda por fin la ecuación trascendente, en la que  $k = s : l$  es conocido,

$$k\xi = \operatorname{Sh} \xi \quad [9]$$

y que determina  $\xi$  y, por tanto,  $y_0 = \frac{l}{\xi}$ , de donde se desprende  $Y$ , según [7], y finalmente la flecha o caída del cable

$$f = Y - y_0 = y_0 \operatorname{Ch} \frac{l}{y_0} - 1 \quad [10]$$

Obsérvese que para cables tirantes  $\frac{s}{l} = k$  es

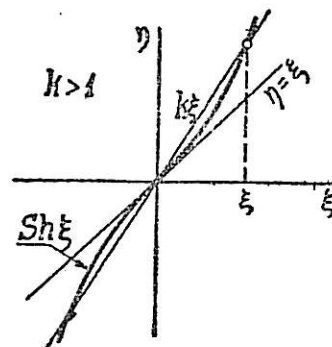
próxima a la unidad y, por tanto,  $\xi = \frac{l}{y_0}$  es muy pequeño (v. figura). Desarrollando en serie el  $\operatorname{Ch}$  y despreciando los términos de grado cuarto y superiores de  $\frac{l}{y_0}$  queda

$$f = y_0 \left[ \frac{l^2}{2! y_0^2} + \frac{l^4}{4! y_0^4} + \dots \right] \cong \frac{l^2}{2 y_0}$$

que equivale a sustituir en primera aproximación la catenaria por una parábola. Así se procede en los cálculos mecánicos de tendidos de líneas eléctricas.

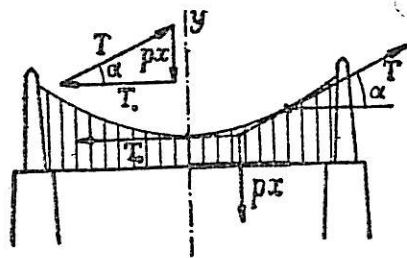
**10. Puente colgante.**—Hemos visto que la forma de un cable colgante no es parabólica, difiriendo tanto más de ella cuanto mayor sea la caída del cable (\*). Ahora bien, si el cable sostiene un tablero horizontal en el que existe una carga uniformemente distribuida de peso notablemente superior

(\*) En un principio se confundió la catenaria con la parábola. Fué uno de los hermanos Bernouilli, Jacobo, a fines del siglo XVII, quien propuso la resolución correcta del problema, más tarde resuelto por su hermano Juan y, simultáneamente, por Leibniz y Huygens.



al del cable, de modo que pueda despreciarse éste frente a aquél (caso de los puentes colgantes), la forma del cable ya no es catenaria sino parábola. En efecto, en este caso el lado vertical del triángulo que expresa el equilibrio, no mide  $px$  sino  $px$  y la ecuación [1] se convierte en

$$px = T_0 y' \quad \text{de donde} \quad y = \frac{p}{2T_0} x^2 + C_1$$



**EJERCICIOS**

1. Ecuación diferencial a la que satisfacen todas las circunferencias del plano.
2. Ecuación diferencial a la que satisfacen todas las parábolas con foco en el origen. Idem en polares.
3. Integrar  $y'' = y^3 ly$ .
4.  $y'' = \frac{y'}{x} + x \operatorname{sen} x$
5.  $y'' = y' - x^2 + 2x$
6.  $y'^2 = yy''$
7. Deducir e integrar la ecuación del péndulo simple  $l \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -g \operatorname{sen} \theta$ .
8. Resolver el siguiente problema en relación con la catenaria: Hallar la longitud de cable, entre dos amarres de igual altura, que da la tensión mínima.
9. En relación con el problema anterior, ¿cuál es la máxima distancia horizontal que puede salvar un cable homogéneo sosteniendo su propio peso? Se supone conocido su peso específico  $P$  y la carga de rotura  $\tau$  en  $\text{Kg/mm}^2$ . Ejemplo  $\tau = 15 \text{ Kg/mm}^2$ .  $P = 7,85 \text{ Kg/dm}^3$ .
10. Demostrar que en todo cable tendido entre dos puntos a la misma altura se verifica la siguiente relación entre la distancia entre postes  $2l$ , la longitud de cable  $2s$  y la flecha  $f$ .

$$\frac{2fs}{s^2 - f^2} = \operatorname{Sh} \frac{2fl}{s^2 - f^2}$$

11. La anterior relación es exacta, pero muy incómoda para el cálculo. Dedúzcase esta otra aproximada que da la longitud  $s$  para un flecha  $f$  deseada

$$s \cong l + \frac{2}{3} \frac{f^2}{l}$$

12. Dedúzcase análogamente el siguiente valor aproximado de la tensión  $T_0 \cong l^2 p : 2f$ .
13. Tiempo que tarda un móvil en caer sobre un centro que le atrae según una fuerza inversamente proporcional a la distancia, abandonado sin velocidad inicial a la distancia  $a$ .
14. Idem para una fuerza atractiva inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Distancia inicial al centro 10 m. Velocidad inicial, nula. Aceleración inicial, 1 m/segundo. (Este último dato permite hallar la constante de proporcionalidad, y dar el resultado numéricamente.)
15. Tiempo que tarda en descender un paracaidista de 70 Kg. de peso, que se echa desde 2.000 metros de altura y no abre el paracaídas hasta 8 segundos después. Se sabe que la velocidad límite es de 5 m/segundo.
16. Una cadena de 2 metros de longitud descansa extendida rectilíneamente sobre un plano de cristal, colgando fuera de su borde 20 cm. de cadena. Estudiar la caída (movimiento del extremo libre) y calcular el tiempo que tarda en resbalar, por completo, suponiendo despreciables las resistencias y los efectos de inercia en el borde.
17. Una cadena de 2 metros de longitud cuelga desigualmente de una barra de cristal de modo que el trazo más largo excede en 20 cm. al más corto. Estudiar la caída y tiempo, bajo análogas hipótesis que el problema anterior.
18. Estudio del puente colgante teniendo en cuenta el peso del cable.
19. Probar que toda ecuación diferencial de la forma  $(y-x)y'' + F(y') = 0$  admite una integral primera de la forma  $(y-x)f(y') = c$  determinando  $f$ . Aplicar esta propiedad a la integración de  $(y-x)y'' + (1+y')(1+y'^2) = 0$ .

LECCIÓN 7.<sup>a</sup>—CURVAS DEFINIDAS POR CONDICIONES DE CURVATURA.  
APLICACIONES

En la lección anterior hemos resuelto un ejemplo de determinación de curva mediante una relación de igualdad entre la normal y el radio de curvatura. Estudiaremos ahora otros problemas interesantes de determinación de curvas por condiciones relativas a su curvatura.

**1. Curvas cuya curvatura es una función dada de la abscisa.**—Su ecuación diferencial será de la forma

$$\frac{y''}{[1 + y'^2]^{\frac{3}{2}}} = f(x) \quad [1]$$

que, por carecer de la  $y$ , se resolverá (§ 5 de la lección anterior) tomando  $y' = p$  como nueva función incógnita, y resulta

$$\frac{dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} = f(x) dx \quad \text{integrada} \quad \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} = \int f(x) dx + C_1 = F(x) + C_1$$

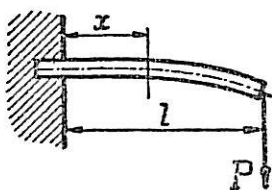
De donde

$$p = \frac{F(x) + C_1}{\sqrt{1 - [F(x) + C_1]^2}} \quad \text{y, por tanto,} \quad y = \int \frac{F(x) + C_1}{\sqrt{1 - [F(x) + C_1]^2}} dx + C_2 \quad [2]$$

obteniéndose la solución mediante dos cuadraturas: la que da  $F$  y la que da  $y$ .

Las dificultades de integración dependen de la naturaleza de  $f(x)$  y se comprende que serán en general considerables, por la forma en que aparece en la segunda integración el resultado de la primera. Veamos una aplicación interesante.

**2. Curva elástica.**—Según vimos en el tomo I, lección 31, § 9, en una viga cargada y sometida, como consecuencia de dicha carga, a una



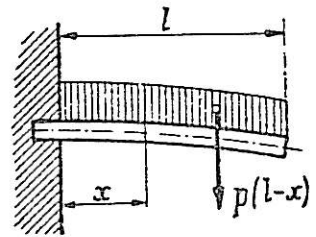
deformación elástica, existe la siguiente relación entre la curvatura en un punto de la curva  $y=f(x)$  que adoptan las fibras neutras después de la deformación, el momento flector  $M(x)$  en este punto y el momento de inercia  $I$  de la sección de la viga respecto del eje de fibras neutras:

$$\text{Curvatura} \quad \frac{y''}{[1 + y'^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M(x)}{EI} \quad [3]$$

La curva  $y(x)$  llamada *elástica* viene, pues, dada por una ecuación di-

ierencial de segundo orden del tipo estudiado en el párrafo anterior. En el caso más sencillo como el de una vigueta empotrada en un extremo y cargada en el otro (v. figura), el momento flector  $M(x) = P(l-x)$  ( $x$  distancia al extremo empotrado) es lineal,  $F(x)$  es de segundo grado y la expresión subradical en [2] será de grado cuarto, es decir, nos vemos conducidos a una integral elíptica.

Si la carga fuese uniformemente repartida de  $p$  Kg por metro lineal, sera  $M(x) = \frac{1}{2} p(l-x)^2$  de segundo grado,  $F(x)$  de tercero y la cantidad subradical de grado sexto, dando una integral hiperelíptica.



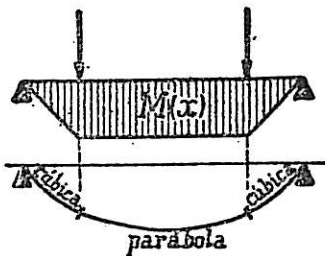
Tales dificultades son la causa de que en mecánica aplicada no se calculen las curvas elásticas integrando la ecuación exacta [3], sino la ecuación diferencial *aproximada*

$$y'' = \frac{M(x)}{EI}$$

(ya indicada en la lec. 30, § 9 del tomo I) que resulta de despreciar en [3], el cuadrado  $y'^2$  de la pendiente de la elástica, que es, en efecto, muy pequeña.

Con ello se obtiene, para  $M(x)$  lineal, una elástica de tercer grado, para  $M(x)$  cuadrática una elástica de cuarto grado, etc.

NOTA.—Es de advertir que en el caso de cargas aisladas intermedias,  $M(x)$  es una función no analítica (continua pero de derivada discontinua). La gráfica de  $M(x)$  se compone de trozos rectilíneos (v. tomo I, lec. 13, § 8) y la elástica se compone de arcos de distintas curvas tangentes cada una a la anterior y a la siguiente, como el ejemplo de la figura constituido por una viga apoyada en los extremos y cargada con dos cargas aisladas iguales y equidistantes de ellos. Entre dichas cargas el momento flector es constante; entre ellas y los apoyos varía linealmente. La elástica (simétrica respecto de la vertical por el punto medio de la viga) está formada de tres trozos: uno parabólico en el centro y otros dos arcos cúbicos en los extremos.



**3. Curvas cuya curvatura es una función de la ordenada, de la tangente, de la subtangente o de la subnormal.**—La expresión del radio  $\rho$  de curvatura en cartesianas sólo depende de  $y'$  e  $y''$ ; las longitudes de la tangente  $T$ , normal  $N$ , subtangente  $S_t$  y subnormal  $S_n$  sólo dependen de  $y$  e  $y'$ . Por tanto:

Toda relación que ligue la curvatura con la ordenada, la tangente, la normal y la subnormal será una ecuación diferencial de segundo orden reducible a una de primero, por carecer de la variable  $x$ .

Tal ha ocurrido en el ejemplo del § 5, caso 2.<sup>o</sup> de la lección anterior

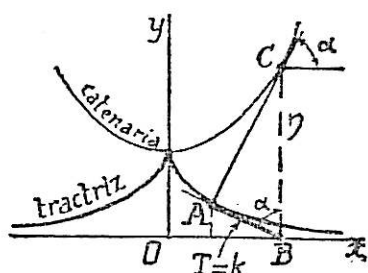
Ejemplo: Curva cuyo centro de curvatura se proyecta sobre el eje  $x$  en la traza de la tangente. La condición equivale a igualar la subtangente con la proyección sobre  $Ox$  del radio de curvatura, y da

$$\frac{y}{y'} = \frac{1+y'^2}{y''} y' \quad (\text{con } y' = p) \quad \frac{dp}{p(1+p^2)} = \frac{dy}{y} \quad [1]$$

con cuya integración se obtiene

$$lp - \frac{1}{2} l(1+p^2) = ly - lk \quad \text{o sea} \quad \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{y}{k} \quad [2]$$

De donde



$$p = y' = \frac{y}{\sqrt{k^2 - y^2}} \quad dx = \frac{\sqrt{k^2 - y^2}}{y} dy$$

que se integra fácilmente, dando

$$x + C = \sqrt{k^2 - y^2} - kl \frac{k + \sqrt{k^2 - y^2}}{y}$$

Curva llamada *tractriz* de la que obtenemos, de paso, dos notables propiedades,

1.<sup>a</sup> La ecuación [2] da  $T = \frac{y}{y'} \sqrt{1+y'^2} = \frac{y}{p} \sqrt{1+p^2} = k$ , es decir: *la tangente T es constante.*

2.<sup>a</sup> La *evoluta de la tractriz es una catenaria*, pues la envolvente de las normales AC tendrá por ecuación (v. fig.):

$$\eta' = \text{tg } \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{k} \sqrt{\eta^2 - k^2}$$

Del tipo integrado en el ejemplo del caso 2.<sup>o</sup>, § 5, lecc. anterior.

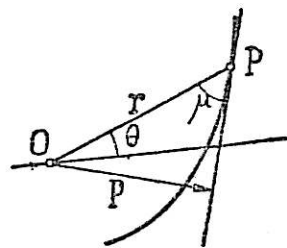
**4. Curvas cuya curvatura es una función del radio vector.**—Otro ejemplo de curvas definidas por una condición de curvatura lo constituyen las curvas cuya curvatura en cada punto es una función de la distancia de dicho punto a uno fijo. Elegido éste como origen de *coordenadas polares*, la referida distancia es el radio vector  $r$  y la ecuación diferencial de la curva en estas coordenadas es de la forma (v. tomo I, lección 31, § 6)

$$\text{Curvatura} \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{[r + r'^2]^{\frac{3}{2}}} = f(r) \quad [1]$$

en la que  $r'$   $r''$  indican derivadas respecto del ángulo polar  $\theta$ .

Se simplifica notablemente la integración introduciendo el parámetro geométrico  $p$ , distancia del origen a la tangente, y cuyo valor es en función del ángulo  $\mu$ , formado por ésta y el radio vector (v. el referido párrafo)

$$p = r \text{ sen } \mu \quad \text{siendo} \quad \text{tg } \mu = \frac{r}{r'} \quad \text{sen } \mu = \frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}}$$



y por tanto

$$p = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}} \quad [2]$$

de donde, derivando

$$\frac{dp}{dr} = \frac{dp}{d\theta} \cdot \frac{1}{r'} = \frac{\sqrt{r^2 + r'^2} \cdot 2rr' - r^2 \frac{rr' + r'r''}{\sqrt{r^2 + r'^2}}}{r^2 + r'^2} \cdot \frac{1}{r'} = r \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{[r^2 + r'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

de otro modo

$$\frac{dp}{dr} = \frac{r}{\rho} \quad (\rho \text{ radio de curvatura}) \quad [3]$$

Por tanto, la ecuación [1] puede escribirse

$$\frac{dp}{dr} \frac{1}{r} = f(r) \quad dp = rf(r) dr$$

de donde

$$p = \int rf(r) dr + C_1 = \varphi(r) + C_1$$

y sustituyendo en [2] y despejando  $r' = \frac{dr}{d\theta}$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r \sqrt{r^2 - [\varphi(r) + C_1]^2}}{\varphi(r) + C_1}$$

de donde

$$\theta = \int \frac{\varphi(r) + C_1}{r \sqrt{r^2 - [\varphi(r) + C_1]^2}} dr$$

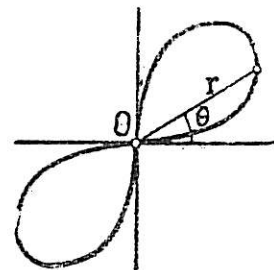
**EJEMPLO: Lemniscata.** Si nos proponemos hallar una curva cuya curvatura sea proporcional al radio vector y que además pase por el polo y sea en él tangente al origen de ángulos (condiciones iniciales) se tendrá  $f(r) = kr$ .

$$p = \int_0^r kr^2 dr = \frac{kr^3}{3}$$

$$\theta = \int_0^r \frac{\frac{kr^2}{3} dr}{\sqrt{r^2 - \left(\frac{kr^3}{3}\right)^2}} = \int_0^r \frac{\frac{kr}{3} dr}{\sqrt{1 - \left(\frac{kr^2}{3}\right)^2}} = \frac{1}{2} \text{arc sen } \frac{kr^2}{3}$$

es decir  $r^2 = \frac{3}{k} \text{sen } 2\theta$

ecuación de una lemniscata.



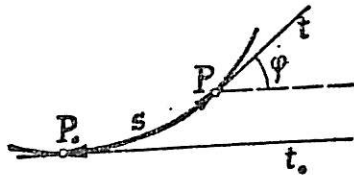
5. **Curvas definidas por ecuaciones intrínsecas.**— Sea una curva continua y con tangente en todos sus puntos; elijamos en ella un punto  $P_0$  como origen de arcos  $s$  contados positivamente en un sentido y negativamente en el opuesto. Consideremos la semitangente  $t_0$  en  $P_0$  (en el sentido positivo) como origen de ángulos, y designemos por  $\sigma$  el ángulo que forma



$t_0$  con la semitangente  $t$  en un punto cualquiera  $P$  (tomada  $t$  en el sentido de arcos crecientes).

Llamemos, finalmente,  $\rho$  el radio de curvatura en  $P$ .

Podemos caracterizar la curva por una relación que ligue dos de estas tres variables  $s, \varphi, \rho$



$$f(s, \varphi) = 0 \quad f(\rho, \varphi) = 0 \quad f(\rho, s) = 0$$

Relaciones de este tipo se llaman *ecuaciones intrínsecas* de la curva porque ligan elementos inherentes a ella con absoluta independencia del sistema coordenado de referencia.

Por ejemplo, en la catenaria  $y = \text{Ch } x$  tomando como origen de arcos el punto  $P_0 (0, 1)$  se tiene  $\text{tg } \varphi = y' = \text{Sh } x$

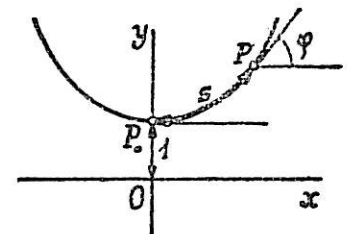
$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \text{Sh}^2 x} \, dx = \int_0^x \text{Ch } x \, dx = \text{Sh } x = \text{tg } \varphi \tag{1}$$

$$\rho = \frac{[1 + y'^2]^{\frac{3}{2}}}{y''} = \text{Ch}^2 x = 1 + \text{tg}^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \tag{2}$$

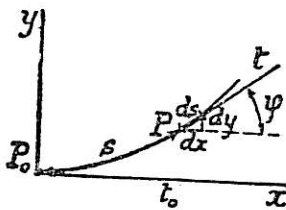
y, por tanto,

$$\rho = 1 + s^2 \tag{3}$$

Cualquiera de las ecuaciones  $s = \text{tg } \varphi, \rho = \sec^2 \varphi, \rho - s^2 = 1$  es una ecuación intrínseca de la catenaria.



Dada una ecuación intrínseca, veamos cómo hallar la ecuación cartesiana ordinaria. Elijamos el origen de coordenadas coincidente con el punto  $P_0$  origen de arcos, y el semieje  $+x$  coincidente con el origen de ángulos  $t_0$ .



1.º Si se nos da  $s = f(\varphi) = F(y')$  se obtendrá, diferenciando, la ecuación

$$\sqrt{1 + y'^2} \, dx = F'(y') \, dy',$$

que da con  $y' = p$  (v. lección anterior, § 5).

$$x = \int_0^p \frac{F'(p) \, dp}{\sqrt{1 + p^2}} \quad y = \int_0^p \frac{p F'(p) \, dp}{\sqrt{1 + p^2}} \quad \text{en función del parámetro } p.$$

2.º Si se nos da  $\varphi = f(s)$ , podemos poner directamente

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \cos \varphi & dx &= \cos f(s) \, ds & x &= \int_0^s \cos f(s) \, ds \\ \frac{dy}{ds} &= \text{sen } \varphi & dy &= \text{sen } f(s) \, ds & y &= \int_0^s \text{sen } f(s) \, ds \end{aligned} \right\} \text{ en función del parámetro } s.$$

3.º Si se nos da  $\rho = f(\varphi) = F(y')$  se obtendrá la ecuación

$$[1 + y'^2]^{\frac{3}{2}} = F(y') y''$$

y con  $y' = p$

$$x = \int_0^p \frac{F(p) dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \quad y = \int_0^p \frac{p F(p) dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

4.º Si, finalmente, se nos da

$$\rho = f(s) \quad \text{equivale a} \quad \frac{ds}{d\varphi} = f(s)$$

y, por tanto,

$$d\varphi = \frac{ds}{f(s)} \quad \varphi = \int_0^s \frac{ds}{f(s)} = \phi(s)$$

con lo que estamos en el caso 2.º.

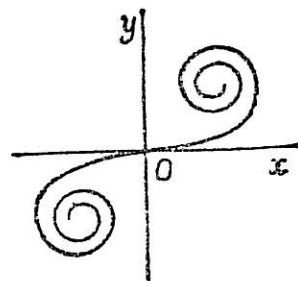
EJEMPLO: La curva de ecuación intrínseca  $\frac{1}{\rho} = ks$ , es decir *curvatura proporcional al arco*, tiene ecuaciones paramétricas que resultan de

$$\varphi = \int_0^s ks ds = \frac{1}{2} ks^2$$

y conduce a las integrales

$$x = \int_0^s \cos \frac{ks^2}{2} ds$$

$$y = \int_0^s \text{sen} \frac{ks^2}{2} ds$$



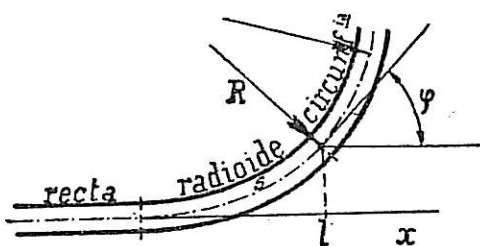
Después de sencillos cambios, las ecuaciones paramétricas vienen expresadas mediante las trascendentes de Fresnel  $\int_0^X \cos x^2 dx$   $\int_0^Y \text{sen} x^2 dx$ , no expresables mediante las funciones elementales y que se calculan y tabulan fácilmente por desarrollo en serie de la función subintegral. La curva obtenida es la llamada espiral de Cornu, que se presenta en la teoría de la difracción y también en el ejemplo siguiente.

**6. Aplicación. Curvas de enlace o radioideas.**—En el trazado de una vía de ferrocarril no se enlazan directamente los trozos rectilíneos con los circulares, ya que ello supondría la aparición brusca de la fuerza centrífuga en la iniciación de la curva, y los inconvenientes consiguientes (incomodidad y peligro para los viajeros, desgaste considerable del riel exterior, etcétera). Entre la recta y el arco circular se intercalan curvas cuya curvatura *varía de un modo continuo* desde el valor nulo, que tiene en la recta, al valor  $\frac{1}{R}$ , que tiene en el arco de circunferencia ( $R$  radio). En esta forma, la fuerza centrífuga crece asimismo progresivamente y puede compensarse elevando de un modo continuo el nivel del riel exterior (peralte).

Si se adopta como solución la *curvatura proporcional al arco* recorrido a partir del punto de tangencia con el tramo recto, resulta la llamada *radioidea*

de de arcos que es precisamente la espiral de Cornu que acabamos de obtener en el ejemplo precedente.

Si se adopta como solución la *curvatura proporcional a la cuerda* se obtiene la llamada *radioide de cuerdas* que es la *lemniscata* obtenida en el ejemplo del párrafo 4 (con las condiciones iniciales allí indicadas, polo en el arranque de la curva y origen de ángulos en la prolongación del tramo recto).



Si se adopta como solución la *curvatura proporcional a la abscisa* (elegido un eje  $x$  en la prolongación del tramo recto y el origen en el arranque de la curva) se obtiene la *radioide de abscisas* que coincide con la curva elástica del § 2. También aquí se sustituye la ecuación exacta

$$\frac{y''}{[1 + y'^2]^{\frac{3}{2}}} = kx$$

(que conduce a integrales elípticas) por la aproximada  $y'' = kx$  obtenida despreciando  $y'$  y que da como solución la *parábola cúbica*

$$y = \frac{kx^3}{6}$$

Por su sencillez, esta es la solución técnica adoptada, en la que

$$y' = \frac{kx^2}{2}$$

Como  $y''$  es aproximadamente el valor de la curvatura de la curva, que en su unión con la circunferencia ha de valer  $\frac{1}{R}$ , resulta la abscisa final de la radioide  $l = 1:kR$ ; y con este valor se tiene el ángulo  $\varphi = \arctg y' = \arctg \frac{1}{2} kl^2$ , que da la dirección de la vía en el punto de unión con la circunferencia. Con estos datos el trazado es un simple problema de dibujo.

En cuanto al coeficiente  $k$  de proporcionalidad, su valor depende del ancho de vía, de la velocidad media de tráfico y de la pendiente que se quiera dar al riel exterior al peraltarle progresivamente, pendiente que conviene no exceda las usuales en ferrovías.

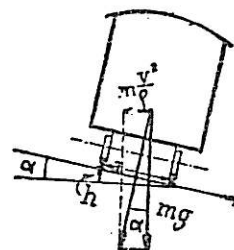
La fórmula que da el peralte  $h$  (desnivel entre rieles) para un radio  $\rho$  y para una velocidad  $v$  es (v. figura)

$$\frac{h}{a} = \operatorname{sen} \alpha \cong \operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2}{\rho g} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{hg}{av^2}$$

y puesto que  $\frac{1}{\rho}$  es la curvatura y proporcional a  $x$  resulta  $h = px$ ;

la constante  $p = \frac{h}{x} \cong \frac{hg}{av^2}$  es la pendiente del riel exterior, que podemos fijarnos de antemano por ejemplo  $p = 0,002$ ) y resultará

$$y'' = \gamma = \frac{1}{\rho} = \frac{pg}{av^2} x$$



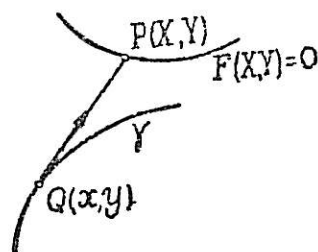
que identificada con  $y''=kx$  da  $k=\frac{Pg}{av^2}$  en función de los datos indicados. Así para  $p=0,002$   $g=9,8$ ;  $v=60$  Km :  $h=16,7$  m/s (\*) ;  $a=1,672$  (ancho de vía español) resulta  $k \cong 4,2 \cdot 10^{-5}$ .

Por ejemplo, para enlazar con una curva de 300 m. de radio habremos de utilizar una radioide cuya abscisa final sea  $l=1:kR=10^5:(4,2 \cdot 300) \cong 79,5$  m. y el ángulo (con el tramo recto) de la tangente en este extremo será  $\varphi = \text{arc tg } \frac{1}{2}kl^2 \cong \text{arc tg } 0,1323 \cong 7^\circ 30'$ .

**7. Curvas de persecución.**—Un punto  $P$  de coordenadas  $XY$  se mueve sobre una línea  $F(X, Y)=0$  a velocidad constante  $v_1$ ; otro  $Q$  de coordenadas  $xy$  se mueve a velocidad constante  $v_2$  dirigida en cada instante hacia  $P$  (persecución no muy inteligente, por cierto). ¿Cuál será la trayectoria  $\gamma$  descrita por el punto perseguidor  $Q$ ? Expresemos que:

1.º Relación de velocidades

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{dX^2 + dY^2}}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dx}\right)^2}}{\sqrt{1+y'^2}} \quad [1]$$



2.º La tangente a  $\gamma$  pasa constantemente por  $P$

$$y' = \frac{Y-y}{X-x} \quad [2]$$

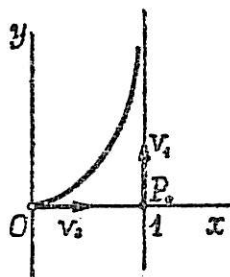
Tenemos además

$$F(X, Y)=0 \quad [3]$$

De [2] y [3] podemos deducir  $X=f_1(xy, y')$   $Y=f_2(xy, y')$  y por derivación y sustitución en [1] obtendremos una ecuación de segundo orden  $\psi(xy, y', y'')=0$  que dará la curva descrita por  $Q$ .

Ejemplo: Supongamos  $P$  recorriendo la recta  $x=1$  y  $Q$  en el origen cuando  $P$  está en  $(1,0)$ . Se tendrá ahora

$$k = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dx}\right)^2}}{\sqrt{1+y'^2}} \quad y' = \frac{Y-y}{1-x} \quad Y = (1-x)y' + y$$



$$\frac{dY}{dx} = y''(1-x) \quad X = 1 \quad \frac{dX}{dx} = 0$$

y sustituyendo

$$k = \frac{y''(1-x)}{\sqrt{1+y'^2}}$$

ecuación que carece de la  $y$  y que se integrará según sabemos poniendo  $y'=p$

$$\frac{k dx}{1-x} = \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}; \quad -kl(1-x) + lC_1 = \text{Arg Sh } p = l(p + \sqrt{1+p^2}) \quad \frac{C_1}{(1-x)^k} = p + \sqrt{1+p^2}$$

como para  $x=0$   $p=0$  por dirigirse la velocidad hacia el punto  $(1,0)$  resulta  $C_1=1$ , y despejando  $p$

$$2p = 2 \frac{dy}{dx} = (1-x)^{-k} - (1-x)^k$$

(\*) Dependiendo  $k$  del cuadrado de la velocidad y variando ésta de unos trenes a otros, se toma para  $v$  la media cuadrática de las velocidades de éstos

de donde, finalmente,

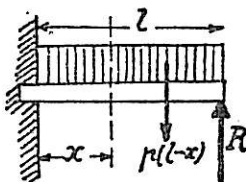
$$y = \frac{1}{2} \left[ \frac{(1-x)^{1+k}}{1+k} - \frac{(1-x)^{1-k}}{1-k} \right] + C_1$$

Si fuese  $k=1$ , es decir,  $v_1=v_2$  habría que sustituir el minuendo por  $-k(1-x)$ .

La constante  $C_2$  queda determinada por la condición  $y=0$  para  $x=0$ , que da  $C_2 = +k/1-k^2$ .

### EJERCICIOS

1. Curvas cuyo radio de curvatura es el doble de la longitud de la normal. Considérense los dos casos que resultan al variar el signo.
2. Curvas cuyo radio de curvatura es proporcional al cuadrado de la ordenada.
3. Curva cuya ecuación intrínseca es  $\rho = k \sec \varphi$ .
4. Curva cuya ecuación intrínseca es  $s = k \varphi$ .
5. Curva de ecuación intrínseca  $s = k \sin \varphi$ .
6. Curva de ecuación intrínseca  $\rho \varphi = s + 1$ .
7. Hallar las curvas que tienen la siguiente propiedad: La distancia de cada punto  $P$  a un punto fijo  $O$  es media proporcional entre el radio de curvatura en  $P$  y la distancia de  $O$  a la tangente en  $P$  (Opérese en polares.)
8. Calcular la elástica de una viga de longitud  $l$  apoyada en sus extremos, uniformemente cargada con carga  $p$  por unidad de longitud.  
Se tiene: Reacción en cada apoyo  $= \frac{1}{2}pl$ . Momento flector a la distancia de  $x$  de un extremo  $M(x) = \frac{pl}{2}x - \frac{p}{2}x^2$ . La ecuación diferencial de la elástica será  $EIy'' = \frac{pl}{2}x - \frac{p}{2}x^2$ .  
Intégrese una vez y determínese la constante por la condición (deducida de la simetría)  $y'=0$  para  $x=l/2$ . Intégrese nuevamente determinando la nueva constante por ser  $y=0$  para  $x=0$ . Calcúlese la flecha máxima.
9. Calcular la elástica de una viga de longitud  $l$  apoyada en sus extremos, cargada con una carga aislada  $P$  en el centro.  
En este caso la expresión que da  $M(x)$  es distinta a la izquierda de  $P$  que a su derecha. Llamando  $x$  a la distancia al apoyo izquierdo (reacción  $= P/2$ ) se tendrá: a la izquierda de  $P$ ,  $M(x) = \frac{P}{2}x$ ; a la derecha  $M(x) = \frac{P}{2}(l-x)$ . Integrando e igualando las pendientes a cero para  $x=l/2$  se determinarán las constantes. Volviendo a integrar y expresando la anulación de la flecha en los extremos se hallarán las nuevas constantes. En el centro ambas elásticas dan el mismo valor (flecha máxima). Obténgase.
10. Curva elástica de una viga empotrada en un extremo y apoyada en el otro con una carga uniforme  $p$  por unidad de longitud.



Aparece en este caso una ligera complicación: la reacción  $R$  del apoyo, una incógnita más del problema. Pero también tenemos una condición más: la ordenada (nula) del extremo de la elástica. Llamando  $x$  a la distancia al empotramiento (que supondremos a la izquierda) el momento será

$$M(x) = \frac{p}{2}(l-x)^2 - R(l-x)$$

Una integración dará  $EIy'$ , determinándose la constante por ser  $y'=0$  para  $x=0$  (empotramiento). Otra integración dará  $EIy$ . Expresando que  $y=0$  para  $x=0$  y para  $x=l$  se determinará la nueva constante y  $R$ . Háganse los cálculos determinando la elástica y su flecha máxima.

11. Aplíquese el método anterior para hallar la elástica de una viga cargada uniformemente y apoyada en los extremos y en el centro.
12. Curvas en las que la proyección del centro de curvatura en cada punto sobre el eje  $x$  es simétrica del pie de la tangente respecto de la proyección del punto.

## Capítulo III.—ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

### LECCIÓN 8.<sup>a</sup>—PROPIEDADES GENERALES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN $n$

**1. Definiciones y notaciones.**— Se entiende por ecuación diferencial *lineal* de orden  $n$  la que es de primer grado respecto de la función incógnita  $y$  y sus  $n$  primeras derivadas. Es decir

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x) y = \varphi(x) \quad [1]$$

en la que los coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_n$  y el segundo miembro  $\varphi$ , pueden ser constantes o funciones de  $x$ . Si el término independiente  $\varphi$  (colocado en el segundo miembro) es nulo, la ecuación resultante

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad [2]$$

se llama *homogénea* o *incompleta*, mientras la [1] con  $\varphi \neq 0$  se llamará *no homogénea* o *completa*.

Supondremos, en lo que sigue, que esta ecuación verifica los teoremas de existencia y unicidad enunciados en la lección 6.<sup>a</sup>, §§ 2, 3 y 4, para lo cual bastará, por ejemplo, que despejada la derivada  $n$ -sima

$$y^{(n)} = \Phi(x) + A_n(x)y + A_{n-1}(x)y' + \dots + A_1(x)y^{(n-1)} \quad [2 \text{ bis}]$$

las funciones  $\Phi, A_n, A_{n-1}, \dots, A_1$ , sean continuas en un cierto campo de  $x$ , que será de existencia de la solución.

Estas ecuaciones tienen algunas propiedades semejantes a las de las ecuaciones algebraicas lineales, que interesa exponer, puesto que en ellas se basa la integración formal de las mismas. Ante todo conviene familiarizarnos desde ahora con la notación que hemos de usar más adelante al describir los métodos operacionales.

Designaremos por  $D$  la operación de derivación respecto de la variable independiente, de modo que si ésta es  $x$  y la función es  $y$ , será por definición  $Dy \equiv y'$ . Consecuentemente designaremos  $y''$  por  $DDy$ , abreviadamente  $D^2y$ ; y así sucesivamente  $y^{(n)} = D^n y$ . El primer miembro de [1] y [2] podrá ponerse en la forma

$$a_0 D^n y + a_1 D^{n-1} y + \dots + a_{n-1} Dy + a_n y$$

que escribiremos también simbólicamente

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) y$$



o abreviadamente

$$P(D)y$$

indicando con  $P(D)$  un polinomio *simbólico* en  $D$ , cuya significación es la de un *operador* o conjunto de operaciones indicadas a realizar con la función que se coloque a su derecha. La gran ventaja de esta notación se apreciará sobre todo en el caso de coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_n$  constantes.

**2. Propiedades del operador primer miembro.**—El operador  $P(D)$  con que hemos designado el primer miembro de la ecuación lineal tiene las dos siguientes propiedades fundamentales:

I.  $P(D)$  es permutable con todo factor constante  $C$

$$P(D)Cy = CP(D)y$$

puesto que  $C$  se puede permutar con todas las operaciones de derivación y con todos los coeficientes.

II.  $P(D)$  es distributivo, es decir

$$P(D)(y_1 + y_2) = P(D)y_1 + P(D)y_2$$

puesto que son asimismo operaciones distributivas la derivación y la multiplicación. La propiedad es cierta para cualquier número de sumandos.

Por otra parte, por la definición misma de  $P(D)$  resulta que si  $P(D) \equiv P_1(D) + P_2(D)$ , será también

$$[P_1(D) + P_2(D)]y = P_1(D)y + P_2(D)y$$

propiedad distributiva respecto del operador.

Las propiedades I y II se resumen diciendo que  $P(D)$  es un operador *lineal*.

**3. Combinación lineal de soluciones de la ecuación incompleta.**—De las propiedades anteriores se desprende una de las consecuencias más fecundas para la construcción de soluciones de las ecuaciones lineales homogéneas, a saber:

*Toda combinación lineal, con coeficientes constantes, de soluciones de una ecuación homogénea es también solución de ella.*

Sean, por ejemplo,  $y_1, y_2, \dots, y_n$ ,  $n$  funciones que verifican la ecuación diferencial incompleta

$$P(D)y = 0 \quad [3]$$

es decir

$$P(D)y_1 = 0, \quad P(D)y_2 = 0, \quad \dots \quad P(D)y_n = 0$$

Entonces, en virtud de las propiedades anteriores

$$P(D)[C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n] = C_1P(D)y_1 + C_2P(D)y_2 + \dots + C_nP(D)y_n = 0$$

y la función

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n \quad [4]$$





Consideremos ahora la ecuación completa

$$P(D)y = \varphi(x) \tag{9}$$

y sea  $Y$  una solución de la misma, es decir tal que  $P(D)Y = \varphi(x)$ .

Entonces en virtud de las propiedades del § 2 será también

$$\eta = y + Y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n + Y \tag{10}$$

una solución de la ecuación completa, puesto que

$$P(D)(y + Y) = P(D)y + P(D)Y = 0 + \varphi(x)$$

es decir

$$P(D)\eta = \varphi(x)$$

La solución [10] contiene pues  $n$  constantes arbitrarias independientes que pueden ser asimismo determinadas dando el valor de la función  $\eta$  y de sus  $n-1$  primeras derivadas para un valor particular  $x=x_0$  puesto que el sistema

$$\left. \begin{aligned} \eta_0 - Y_0 &= C_1(y_1)_0 + C_2(y_2)_0 + \dots + C_n(y_n)_0 \\ \eta'_0 - Y'_0 &= C_1(y'_1)_0 + C_2(y'_2)_0 + \dots + C_n(y'_n)_0 \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

que determina ahora las  $C_i$  tiene el mismo determinante que el sistema anterior [8]. Por esta razón se llama la solución [10] integral general de la ecuación completa [9]. De aquí :

**REGLA II.** *Se forma la integral general de la ecuación completa agregando a la integral general de la incompleta una solución particular de la completa.*

Vemos, pues, que *todo el problema de la integración de las ecuaciones diferenciales lineales se reduce : si son homogéneas, a la determinación de  $n$  integrales particulares linealmente independientes, y si son completas a la determinación ulterior de una sola integral particular de ésta.*

En las próximas lecciones veremos métodos generales para determinar unas y otras soluciones en las ecuaciones diferenciales lineales de *coeficientes constantes*. Para las ecuaciones de coeficientes variables, el problema de la determinación de soluciones de las ecuaciones incompletas se complica en tal forma que ya no es posible resolverlo elementalmente más que para tipos muy contados de ecuaciones.

Sin embargo, si es posible formar la integral general de la ecuación incompleta, existe el siguiente método general que permite formar la integral general de la completa mediante  $n$  cuadraturas.

**6. Método de variación de las constantes.**—Supongamos conocida la integral general

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n \tag{12}$$

de la ecuación incompleta  $P(D)y = 0$  ( $y_1, \dots, y_n$  linealmente independientes)

y propongámonos *sustituir las constantes por funciones convenientes de x* para que la expresión [12] sea integral de la ecuación completa

$$P(D)y = \varphi(x) \tag{13}$$

La única condición que en definitiva tienen que cumplir estas funciones  $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$  es que la función [12] y sus derivadas cumplan la ecuación diferencial [13]. Se comprende que podremos añadir todavía  $n-1$  condiciones supletorias, que elijeremos convenientemente para simplificar el cálculo de las derivadas sucesivas de [12]. Pongamos en efecto

$$\begin{aligned} y' &= C_1 y_1' + C_2 y_2' + \dots + C_n y_n' && \text{habiendo hecho} && C_1' y_1 + C_2' y_2 + \dots + C_n' y_n = 0 \\ y'' &= C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + \dots + C_n y_n'' && \text{habiendo hecho} && C_1' y_1' + C_2' y_2' + \dots + C_n' y_n' = 0 \\ &\dots\dots\dots && && \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)} &= C_1 y_1^{(n-1)} + \dots + C_n y_n^{(n-1)} && \text{habiendo hecho} && C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \dots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\ y^{(n)} &= C_1 y_1^{(n)} + \dots + C_n y_n^{(n)} + C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \dots + C_n' y_n^{(n-1)} \end{aligned}$$

Al multiplicar la función [12] y estas derivadas respectivamente por  $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_0(x)$  y sumar, para expresar que  $y$  verifica [13] resultará (teniendo en cuenta que  $y_1, y_2, \dots, y_n$  son soluciones de la ecuación incompleta)

$$C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \dots + C_n' y_n^{(n-1)} = \varphi(x) : a_0$$

Esta ecuación unida a las  $n-1$  anteriores de condición determina las derivadas  $C_1', C_2', \dots, C_n'$ , pues el determinante de sus coeficientes es de nuevo el wronskiano  $W$  de las  $y_1, y_2, \dots, y_n$  que hemos supuesto linealmente independientes. Deducimos, por tanto, de este sistema

$$C_1' = \psi_1(x) \quad C_2' = \psi_2(x) \quad \dots \quad C_n' = \psi_n(x)$$

La expresión de éstas  $\psi$  es  $\psi_i(x) = (-1)^{n+i} \frac{\varphi(x)}{a_0 W} w(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n)$  indicándose con  $w(\dots)$  el wronskiano de las  $y_1, y_2, \dots, y_n$  menos la  $y_i$ .

Finalmente, integrando y sustituyendo en [12] será

$$y = y_1 \left[ \int \psi_1(x) dx + K_1 \right] + y_2 \left[ \int \psi_2(x) dx + K_2 \right] + \dots + y_n \left[ \int \psi_n(x) dx + K_n \right]$$

la expresión de la integral general de la ecuación completa.

Ejemplo: Se conocen las integrales particulares  $y_1 = x^2, y_2 = x^{-1}$  de la ecuación homogénea  $x^2 y'' - 2y = 0$  y se pide la integral general de la ecuación.

$$x^2 y'' - 2y = x^2 e^x$$

Será de la forma  $C_1(x)x^2 + C_2(x)x^{-1}$ . El sistema que proporciona  $C_1'$  y  $C_2'$  es

$$C_1' x^2 + C_2' x^{-1} = 0 \quad 2C_1' x - C_2' x^{-2} = x e^x$$

Del que resulta

$$C_1' = \frac{1}{3} e^x \quad C_2' = -\frac{1}{3} x^3 e^x$$



y por tanto

$$C_1 = \frac{1}{3} e^x + K_1, \quad C_2 = \frac{1}{3} e^x (-x^3 + 3x^2 - 6x + 6) + K_2$$

Tendremos, pues, como integral general, con las constantes  $K_1$  y  $K_2$ ,

$$y = K_1 x^2 + K_2 x^{-1} + e^x \left( x + \frac{2}{x} - 2 \right)$$

**7. Determinación de las constantes de integración mediante condiciones iniciales.**—Ya hemos dicho, §§ 5 y 6 que, en la hipótesis de ser  $y_1, y_2, \dots, y_n$  un sistema de soluciones linealmente independientes, la integral general [7] ó [10] de las ecuaciones homogénea, o completa, contiene todas las soluciones (en el dominio de existencia) y que *cada una de ellas puede venir individualizada dando los valores  $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$  de la función y sus  $n-1$  primeras derivadas para un valor  $x_0$  de la variable.* Basta para ello resolver el sistema de  $n$  ecuaciones en los coeficientes  $C_i$  que resultan de expresar estas condiciones, sistema que es determinado por ser el determinante del mismo distinto de cero (wronskiano de las  $y_i$ ).

Sustituyendo los valores  $C_i$ , así calculados, en la integral general obtendremos la integral particular que cumple las referidas condiciones *iniciales*.

EJEMPLO: Si queremos la solución particular del ejemplo anterior que para  $x=1$  dé  $y=0, y'=1$  bastará resolver el sistema  $0=K_1+K_2+e, 1=2K_1-K_2$  que da  $K_1 = \frac{1}{3}(1-e)$   $K_2 = -\frac{1+2e}{3}$  La integral particular buscada es:

$$y = \frac{1-e}{3} x^2 - \frac{1+2e}{3x} + e^x \left( x + \frac{2}{x} - 2 \right)$$

**8. Aplicación del método de variación de las constantes cuando se conoce un número insuficiente de integrales particulares de la ecuación incompleta.**—Si se conocen  $\nu (< n)$  integrales particulares de la ecuación incompleta, el método de variación de las constantes permite reducir la integración de la ecuación completa a la de otra de orden  $n-\nu$  menos elevado. Nos limitaremos a comprobar esta observación en las ecuaciones de segundo orden. Sea la ecuación

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = \varphi(x) \quad [1]$$

y la incompleta correspondiente

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = 0 \quad [2]$$

de la que suponemos conocida solamente una solución particular  $y_1(x)$  y, por tanto, será también solución el producto  $Cy_1$  por una constante  $C$ .

Ahora bien, sustituyendo  $C$  por una función conveniente  $C(x)$  ¿podremos conseguir que  $Cy_1$  represente la integral de [1]? ¿Qué condición debe cumplir  $C(x)$ ? Derivemos

$$y = Cy_1 \quad y' = Cy'_1 + C'y_1 \quad y'' = Cy''_1 + 2C'y'_1 + C''y_1$$



y sustituyamos en [1]. Teniendo en cuenta que  $y_1$  es solución de [2] queda

$$C'(2y_1' + y_1 f_1) + \frac{dC'}{dx} y_1 = \varphi(x) \quad [3]$$

que es ecuación lineal de primer orden en  $C'$ . Su integración proporciona  $C'$  mediante dos cuadraturas (v. Lecc. 4.ª). Se obtendrá así  $C' = \psi(x, K_1)$  y una nueva cuadratura dará  $C = \int \psi(x, K_1) dx + K_2$  y, por tanto, la integral buscada:

$$y = y_1 \left[ \int \psi(x, K_1) dx + K_2 \right]$$

Si nos propusiéramos hallar la integral general de la misma ecuación incompleta bastaría hacer  $\varphi(x) = 0$  en [3], que resultará así una ecuación de variables separadas, dando

$$\frac{dC'}{C'} = -2 \frac{y_1'}{y_1} dx - f_1 dx \quad \text{de donde} \quad C' = \frac{K_1}{y_1^2} e^{-\int f_1 dx}$$

que, integrada nuevamente y sustituida en  $y = Cy_1$ , da como integral general,

$$y = y_1 \left[ K_1 \int \frac{e^{-\int f_1 dx}}{y_1^2} dx + K_2 \right] \quad [4]$$

EJEMPLO: La ecuación homogénea del ejemplo anterior puesta en la forma  $x^2 y'' = 2y$  acusa inmediatamente la solución  $y_1 = x^2$ . Con este solo conocimiento puede completarse la integración de la ecuación, poniéndola en la forma

$$y'' - \frac{2}{x^2} y = 0$$

Con  $f_1 = 0$   $y_1 = x^2$  la fórmula [4] da como solución

$$y = x^2 \left[ K \int \frac{dx}{x^4} + K_2 \right] = C_1 x^{-1} + K_2 x^2$$

**9. Fórmula de Liouville.**—Dadas  $n$  funciones  $y_1, y_2, \dots, y_n$  linealmente independientes, que sean soluciones de una ecuación homogénea de la forma (coeficiente de  $y^{(n)}$  reducido a la unidad)

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + f_2(x)y^{(n-2)} + \dots + f_n(x)y = 0 \quad [1]$$

es muy fácil formar otra ecuación diferencial lineal de orden  $n$  que tenga por soluciones particulares dichas funciones, pues basta eliminar las constantes entre la integral general

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

y sus  $n$  derivadas, con lo que se obtiene

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y' & y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y'' & y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y^{(n)} & y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \quad [2]$$

A posteriori se comprueba que esta ecuación diferencial lineal se satisface para  $y=y_1, y=y_2, \dots, y=y_n$ , pues resultan en cada caso determinantes con dos columnas iguales.

Ahora bien, según sabemos, a cada sistema de valores atribuidos a  $y, y', y'' \dots y^{(n-1)}$  para  $x=x_0$  corresponde *una* sistema de constantes  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , es decir, *una* solución particular y por tanto *una* derivada  $y^{(n)}$  bien determinada, *la misma en ambas ecuaciones*, y ello cualquiera que sea el sistema de valores elegidos para  $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$  (dentro, claro está, del dominio de existencia). Ello exige, por tanto, la identidad de las ecuaciones [1] y [2]. Pero desarrollando [2] por la primera columna se obtiene como términos en  $y^{(n)}$  e  $y^{(n-1)}$

$$y^{(n)} W - y^{(n-1)} W' + \dots = 0 \tag{3}$$

donde  $W$  es el wronskiano de  $y_1, y_2, \dots, y_n$  y  $W'$  es su derivada.

En efecto (\*)

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad W' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Por tanto, identificando [1] y [3] resulta

$$f_1 = -\frac{W'}{W} \quad \text{de donde} \quad W = Ke^{-\int f_1 dx}$$

Relación (debida a Liouville) entre el coeficiente de  $y^{(n-1)}$  en la ecuación y el wronskiano de  $n$  soluciones particulares independientes (la constante  $K$  de integración variará de un sistema de soluciones a otro).

Si no existe en la ecuación [1] el término en  $y^{(n-1)}$  será  $f_1 \equiv 0$  y por tanto el wronskiano de  $n$  soluciones particulares independientes es constante.

EJEMPLO 1.<sup>o</sup> En la ecuación de segundo orden del ejemplo del § 6 falta el término en  $y'$ . El wronskiano de las soluciones  $y_1=x^2, y_2=x^{-1}$  vale efectivamente  $-3$ .

EJEMPLO 2.<sup>o</sup> En la ecuación  $y''-y=0$  falta asimismo el término en  $y'$ . Adoptando como soluciones linealmente independientes  $e^x, e^{-x}$  resulta  $W=-2$ , mientras que si tomamos como soluciones particulares independientes  $\text{Ch } x$  y  $\text{Sh } x$  (en este orden) resulta  $W=1$ .

V. ejercicios en la próxima lección.

(\*) Recuérdese que la derivada de un determinante puede obtenerse sumando los determinantes que resultan de sustituir una a una las filas del determinante primitivo por las derivadas de ellas, determinantes que en el caso presente resultan nulos (dos filas iguales) menos el último.

LECCIÓN 9.—MÉTODOS CLÁSICOS DE INTEGRACIÓN DE LAS ECUACIONES LINEALES

1. **Ecuaciones homogéneas de coeficientes constantes.**—Supongamos constantes los coeficientes  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  en la ecuación

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad P(D)y = 0$$

Para hallar las  $n$  soluciones particulares linealmente independientes que, según hemos visto en la lección anterior, permiten formar la integral general, ensayemos soluciones de la forma  $y = e^{rx}$ . Derivando resulta

$$Dy = r e^{rx} \quad D^2 y = r^2 e^{rx} \quad D^n y = r^n e^{rx}$$

y no anulándose  $e^{rx}$ , si queremos que satisfaga la ecuación deberá cumplirse

$$P(D)e^{rx} = e^{rx}(a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n) = e^{rx} P(r) = 0$$

$$P(r) = 0$$

ecuación algebraica en  $r$  que se llama *característica*. A cada raíz  $r_i$  del polinomio  $P(r)$  llamado asimismo *característico*, cuyo grado es el orden  $n$  de la ecuación, corresponde, pues, una solución de la forma  $e^{r_i x}$ .

*Caso de raíces simples.*—Si  $P(r)$  tiene  $n$  raíces distintas  $r_1, r_2, \dots, r_n$  tendremos otras tantas soluciones  $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{r_n x}$  de la ecuación diferencial que son linealmente independientes, pues calculando su wronskiano resulta

$$W = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} & \dots & e^{r_n x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} & \dots & r_n e^{r_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1^{n-1} e^{r_1 x} & r_2^{n-1} e^{r_2 x} & \dots & r_n^{n-1} e^{r_n x} \end{vmatrix} = e^{(r_1 + r_2 + \dots + r_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \dots & r_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \dots & r_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(r_1 + r_2 + \dots + r_n)x} (r_1 - r_2)(r_1 - r_3) \dots (r_1 - r_n)(r_2 - r_3)(r_2 - r_4) \dots (r_{n-1} - r_n)$$

determinante de Vandermonde que es  $\neq 0$  por haber supuesto distintas las raíces.

La integral general será, pues, en este caso

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \dots + C_n e^{r_n x}$$

*Caso de raíces múltiples.*—Si la ecuación tiene raíces iguales no tenemos soluciones bastantes para formar la integral general. Con objeto de hallar nuevas soluciones observemos la forma de las derivadas con respecto a  $r$  de

$$P(D)e^{rx} = e^{rx} \tilde{P}(r)$$

$$\frac{d}{dr} P(D) e^{rx} = e^{rx} [xP(r) + P'(r)] \quad \text{se anula si } r \text{ es raíz doble}$$

$$\frac{d^2}{dr^2} P(D) e^{rx} = e^{rx} [x^2 P(r) + 2xP'(r) + P''(r)] \quad \text{nula si } r \text{ es raíz triple.}$$

.....  
 Análogamente  $\frac{d^{k-1}}{dr^{k-1}} P(D) e^{rx} = 0$  si  $r$  es raíz de orden  $k$ .

Pero, por la permutabilidad de las derivaciones respecto de  $r$  y respecto de  $x$ , las derivadas calculadas son precisamente

$$\frac{d}{dr} P(D) e^{rx} = P(D) \frac{de^{rx}}{dr} = P(D) x e^{rx} \quad \text{que es } = 0 \text{ si } r \text{ es doble}$$

$$\frac{d^2}{dr^2} P(D) e^{rx} = P(D) \frac{d^2 e^{rx}}{dr^2} = P(D) x^2 e^{rx} \quad \text{que es } = 0 \text{ si } r \text{ es triple}$$

$$\frac{d^{k-1}}{dr^{k-1}} P(D) e^{rx} = P(D) x^{k-1} e^{rx} \quad \text{que es } = 0 \text{ si } r \text{ es de orden } k.$$

En resumen: Para cada raíz de orden  $k$ , tenemos las  $k$  integrales particulares (cuya independencia lineal no es difícil demostrar (\*))

$$e^{r_1 x} \quad x e^{r_1 x} \quad x^2 e^{r_1 x} \quad \dots \quad x^{k-1} e^{r_1 x}$$

Por lo tanto, en el caso en que las raíces sean  $r_1, r_2, \dots, r_i$  con órdenes respectivos de multiplicidad  $k, l, \dots, m$  la integral general presentará la forma

$$y = Q_{k-1}(x) e^{r_1 x} + Q_{l-1}(x) e^{r_2 x} + \dots + Q_{m-1}(x) e^{r_i x}$$

donde  $Q_{k-1}, Q_{l-1}, \dots, Q_{m-1}$  son polinomios de grados respectivos  $k-1, l-1, \dots, m-1$  y de coeficientes arbitrarios. Estos coeficientes son las constantes arbitrarias de la integral, cuyo número será  $k+l+\dots+m=n$ , como antes.

*Caso de raíces imaginarias.*—La derivada de la exponencial  $e^{rx}$  se obtiene, combinando la ley formal  $e^{\alpha+\beta} = e^\alpha \cdot e^\beta$  con un paso al límite. Uno y otra siguen siendo válidos cuando  $r$  es complejo, como puede comprobar fácilmente el lector. La integración formal que acabamos de exponer vale, pues, tanto si las raíces son reales como complejas, pero en este último caso se prefiere generalmente expresar las soluciones exponenciales de exponente complejo, mediante las funciones seno y coseno de argumento real. Suponiendo que los coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_n$  de la ecuación son rea-

---

(\*) En efecto, toda identidad  $C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x} + C_3 x^2 e^{r_1 x} + \dots + C_k x^{k-1} e^{r_1 x} = 0$  implicaría la anulación idéntica del polinomio  $C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_k x^{k-1}$  y, por tanto, la anulación de las  $C$ .

les, agruparemos en la integral general los términos correspondientes a dos raíces imaginarias *conjugadas* simples  $r_1 = \alpha + \beta i$ ,  $r_2 = \alpha - \beta i$  en la siguiente forma:

$$C_1 e^{(\alpha + \beta i)x} + C_2 e^{(\alpha - \beta i)x} = e^{\alpha x} [(C_1 + C_2) \cos \beta x + i(C_1 - C_2) \operatorname{sen} \beta x]$$

que se prefiere escribir

$$= e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \operatorname{sen} \beta x)$$

donde las constantes  $A$  y  $B$  sustituyen a las  $C_1$ ,  $C_2$ , en la inteligencia de que el sistema que las liga  $A = C_1 + C_2$ ,  $B = i(C_1 - C_2)$  hace corresponder a cada par  $C_1$ ,  $C_2$  un par  $A$ ,  $B$  y viceversa. Obsérvese que para tener soluciones en el campo real hemos de atribuir a  $C_1$ ,  $C_2$  valores conjugados, con lo que  $A$  y  $B$  serán constantes arbitrarias reales.

Análogamente, una raíz imaginaria  $\alpha + \beta i$  de orden  $\lambda$  y su conjugada  $\alpha - \beta i$  originan en la integral general un conjunto de términos que pueden agruparse escribiendo

$$e^{\alpha x} [Q_{\lambda-1}(x) \cos \beta x + R_{\lambda-1}(x) \operatorname{sen} \beta x]$$

donde  $Q_{\lambda-1}$  y  $R_{\lambda-1}$  son polinomios de grado  $\lambda-1$  y coeficientes arbitrarios.

EJEMPLO 1.º La ecuación  $y''' + y'' - 2y' = 0$  tiene la ecuación característica  $r^3 + r^2 - 2r = 0$  cuyas raíces son  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = 1$ ,  $r_3 = -2$  y, por tanto, su integral general es  $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-2x}$ .

EJEMPLO 2.º La ecuación  $y''' - 6y'' + 12y' - 8 = 0$  tiene el polinomio característico  $r^3 - 6r^2 + 12r - 8 \equiv (r-2)^3$  con la raíz triple  $r=2$ . Por tanto su integral general es  $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^{2x}$ .

EJEMPLO 3.º La ecuación  $y'' - 2y' + 5y = 0$  tiene el polinomio característico  $r^2 - 2r + 5$  cuyas raíces son  $1 + 2i$  y  $1 - 2i$ . Su integral general será, pues,  $y = e^x (A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x)$ .

EJEMPLO 4.º La ecuación  $y^{(4)} + 2y''' + y' = 0$  tiene el polinomio característico  $r^5 + 2r^3 + r \equiv r(r^2 + 1)^2$ ,  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = +i$  (doble),  $r_3 = -i$  (doble) y su integral general se expresará  $y = C_1 + (C_2 + C_3 x) \cos x + (C_4 + C_5 x) \operatorname{sen} x$ .

**2. Ecuación completa de coeficientes constantes.**—Como hemos dicho en la lección anterior, para formar la integral general de la ecuación completa bastará añadir a la integral general de la incompleta una solución particular de la completa

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = \varphi(x)$$

Veamos ahora algunos de los recursos utilizados para obtener tales soluciones particulares, en los casos más frecuentes en la práctica, que son

- I. Segundo miembro exponencial  $\varphi(x) = a e^{\alpha x}$
- II. Segundo miembro trigonométrico  $\varphi(x) = a \cos \alpha x + b \operatorname{sen} \alpha x$ .
- III. Segundo miembro polinómico  $\varphi(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_{n-1} x + c_n$ .
- IV. Segundo miembro suma de los tipos anteriores.

REGLA I.—Si  $\varphi(x) = ae^{\alpha x}$  ensáyese una solución de la misma forma  $y = me^{\alpha x}$ . Se tendrá

$$P(D)me^{\alpha x} = mP(D)e^{\alpha x} = me^{\alpha x}P(\alpha)$$

debiendo verificarse  $me^{\alpha x}P(\alpha) = ae^{\alpha x}$ , de donde  $m = a : P(\alpha)$ .

Si  $\alpha$  es raíz de  $P(r)$  no es válida la anterior solución ( $P(\alpha) = 0$ ;  $e^{\alpha x}$  solución de la incompleta). Ahora bien, si  $\alpha$  es raíz simple, es decir, si  $P'(\alpha) \neq 0$ , bastará ensayar  $y = mx e^{\alpha x}$ . Según lo dicho en el § 1 (caso de raíces múltiples) se tendrá

$$P(D)mxe^{\alpha x} = me^{\alpha x}[xP(\alpha) + P'(\alpha)] = me^{\alpha x}P'(\alpha)$$

y, por tanto, deberá ser  $me^{\alpha x}P'(\alpha) = ae^{\alpha x}$ , de donde  $m = a : P'(\alpha)$ .

Análogamente si  $\alpha$  es raíz doble se ensayará  $y = mx^2 e^{\alpha x}$ , teniéndose  $m = a : P''(\alpha)$ , etc.

EJEMPLO 1.<sup>o</sup> Sea la ecuación  $y'' - 2y' + 5y = 2e^{-x}$ . Ensayando la solución particular  $y = me^{-x}$  se obtiene  $m = 1/4$ . Por consiguiente su integral general será (v. § 1, ejemplo 3):

$$y = e^x(A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x) + \frac{1}{4} e^{-x}$$

EJEMPLO 2.<sup>o</sup>  $y''' + y'' - 2y' = -e^x$ . Es inútil ensayar soluciones de la forma  $me^x$  por ser  $e^x$  solución de la ecuación incompleta (v. ejemplo 1.<sup>o</sup> del § anterior). Pero siendo simple la raíz  $r = 1$  del polinomio característico, ensayaremos una solución de la forma  $y = mx e^x$ , que sustituida da  $m = -1/3$ .

Por tanto, la integral general será

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-2x} - \frac{1}{3} x e^x$$

REGLA II.—Si  $\varphi(x) = a \cos \beta x + b \operatorname{sen} \beta x$  ensáyese  $y = h \cos \beta x + k \operatorname{sen} \beta x$ . Las derivadas sucesivas tienen también términos en  $\cos \beta x$  y  $\operatorname{sen} \beta x$  multiplicados por potencias de  $\beta$ , es decir, obtendremos

$$P(D)(h \cos \beta x + k \operatorname{sen} \beta x) = [h\phi_1(\beta) + k\phi_2(\beta)] \cos \beta x + [h\phi_3(\beta) + k\phi_4(\beta)] \operatorname{sen} \beta x$$

que, identificado con  $a \cos \beta x + b \operatorname{sen} \beta x$ , determinará  $h$  y  $k$ .

Ahora bien, si  $\cos \beta x$  y  $\operatorname{sen} \beta x$  son soluciones de la ecuación incompleta el procedimiento falla puesto que  $P(D)(h \cos \beta x + k \operatorname{sen} \beta x) \equiv 0$ . Tal ocurre si  $\beta i$  es una raíz de  $P(r)$ . Como en la regla anterior, si tal raíz es simple se ensayarán soluciones de la forma  $hx \cos \beta x + kx \operatorname{sen} \beta x$ , si es doble, de la forma  $hx^2 \cos \beta x + kx^2 \operatorname{sen} \beta x$ , etc.

EJEMPLO 3.<sup>o</sup>  $y'' - 2y' + 5y = 3 \operatorname{sen} x$ . Ensayemos  $y = h \cos x + k \operatorname{sen} x$  y resulta,

$$(4h - 2k) \cos x + (4k + 2h) \operatorname{sen} x = 3 \operatorname{sen} x$$

y por tanto  $2h - k = 0$ ,  $2k + h = 3/2$ , sistema que da  $h = \frac{3}{10}$ ,  $k = \frac{3}{5}$ ; por tanto, la integral general de esta ecuación es

$$y = e^x(A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x) + \frac{3}{10} \cos x + \frac{3}{5} \operatorname{sen} x$$



EJEMPLO 4.º Si el primer miembro sólo tiene derivadas de la misma paridad bastará ensayar  $y = h \cos x$  ó  $y = k \sin x$  según el orden y la naturaleza del segundo miembro. Así en la ecuación  $y'' + y = \sin 2x$  ensayaremos simplemente  $y = k \sin 2x$  puesto que en el primer miembro no existe  $y'$  que pueda dar término en  $\cos 2x$ . Se obtiene así

$$(-4k + k) \sin 2x = \sin 2x \quad \text{de donde} \quad k = -1/3$$

Por ser  $\sin x$  y  $\cos x$  soluciones de la ecuación incompleta  $y'' + y = 0$ , la integral general de la completa será:

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x - \frac{1}{3} \sin 2x$$

EJEMPLO 5.º Sería inútil en  $y'' + y = \sin x$  ensayar soluciones de la forma  $y = k \sin x$ , por ser  $\sin x$  solución de la ecuación incompleta, correspondiente a la raíz simple  $r = i$  del polinomio característico  $r^2 + 1 = 0$ . Ensayando en cambio  $y = hx \cos x + kx \sin x$  resulta  $-2h \sin x + 2k \cos x = \sin x$ , de donde  $k = 0$   $h = -1/2$  y la integral general será:

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x - \frac{1}{2} x \cos x$$

Este caso en que el segundo miembro trigonométrico es integral de la ecuación incompleta tiene particular importancia como veremos en los fenómenos de resonancia.

REGLA III.—Si  $\varphi(x)$  es un polinomio entero en  $x$ , observaremos el primer miembro; si en él existe el término en  $y$ , ensayaremos un polinomio  $f(x)$  de igual grado que  $\varphi(x)$  y coef. indeterminados, que se calcularán identificando  $P(D)f$  con  $\varphi(x)$ . Si no existe el término en  $y$ , pero sí en  $y'$ , ensayaremos el polinomio anterior aumentando un grado todos sus términos; si tampoco existe el término en  $y'$ , pero sí en  $y''$ , aumentaremos en dos grados sus términos, y así sucesivamente. A poco que medite el lector comprenderá que estos ensayos vienen sugeridos por la naturaleza misma de la ecuación y de su segundo término, y por el hecho de ser la derivada de todo polinomio otro polinomio de grado inferior en una unidad.

Dentro de esta regla cabe el caso en que el segundo miembro es simplemente una constante.

EJEMPLO 6.º 
$$y'' - 2y' + 5y = 3x^2 - x$$

Ensayemos  $y = ax^2 + bx + c$  y resulta:

$$5ax^2 + (5b - 4a)x + 5c - 2b + 2a = 3x^2 - x$$

de donde

$$\begin{aligned} 5a &= 3; & 5b - 4a &= -1; & 5c - 2b + 2a &= 0 \\ a &= \frac{3}{5} & b &= \frac{7}{25} & c &= -\frac{16}{125} \end{aligned}$$

Solución particular buscada:

$$y = \frac{3}{5} x^2 + \frac{7}{25} x - \frac{16}{125}$$

EJEMPLO 7.º En cambio en  $y'' + y' = 3x^2 - x$  ensayaremos  $y = ax^3 + bx^2 + cx$  que da  $3ax^2 + (6a + 2b)x + 2b + c = 3x^2 - x$ , y por tanto

$$3a = 3; \quad 6a + 2b = -1; \quad 2b + c = 0$$

de donde

$$a = 1 \quad b = -\frac{7}{2} \quad c = 7$$



pues después de simplificar los productos comunes a los determinantes de Vandermonde del numerador y denominador queda en éste  $a_0(r_1-r_2)(r_1-r_3)\dots(r_1-r_n)=P'(r_1)$ .

De aquí resulta :

$$C_1 = \int \frac{\varphi(x)}{P'(r_1)} e^{-r_1 x} dx$$

∇ análogamente las demás.

De donde, una integral particular, será :

$$\eta = \sum_{i=1}^n e^{r_i x} \int_{x_0}^x \frac{\varphi(x)}{P'(r_i)} e^{-r_i x} dx$$

**4. Ecuaciones de Euler.**—Entre las escasas ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes variables, elementalmente integrables, figuran las llamadas de *Euler*, del tipo

$$(a_0 x^n D^n + a_1 x^{n-1} D^{n-1} + \dots + a_{n-2} x^2 D^2 + a_{n-1} x D + a_n) y = \varphi(x) \quad [1]$$

o la más general

$$(a_0 (kx+l)^n D^n + a_1 (kx+l)^{n-1} D^{n-1} + \dots + a_{n-1} (kx+l) D + a_n) y = \varphi(x) \quad [2]$$

reducible a la anterior tomando  $kx+l$  como nueva variable independiente, por lo que sólo integraremos la primera.

Se reconoce inmediatamente este tipo *observando si las potencias de  $x$  disminuyen como los órdenes de derivación*, aun cuando no sean iguales la potencia y el orden en cada término, pues siempre puede multiplicarse o dividirse por la potencia de  $x$  conveniente.

Las ecuaciones [1] se reducen a ecuaciones de coeficientes constantes mediante el cambio de variable independiente  $x=e^t$ , del que resulta designando con  $\bar{D}$  la derivación respecto de  $t$ ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} \quad \text{es decir} \quad Dy = e^{-t} \bar{D}y$$

derivando nuevamente, por aplicación de la misma ley,

$$D^2 y = D(Dy) = e^{-t} \bar{D}(e^{-t} \bar{D}y) = e^{-t}(e^{-t} \bar{D}^2 y - e^{-t} \bar{D}y) = e^{-2t}(\bar{D}^2 y - \bar{D}y)$$

∇ análogamente

$$D^3 y = e^{-3t}(\bar{D}^3 y - 3\bar{D}^2 y + 2\bar{D}y), \quad \text{etc.}$$

Al multiplicar, respectivamente, estas derivadas por  $x=e^t$ ,  $x^2=e^{2t}$ ,  $x^3=e^{3t}$ , ..., y sustituir en [1] resultará una ecuación de coeficientes constantes.

En lugar de ensayar en la transformada homogénea soluciones de la forma  $y=e^{rt}$ , más breve será ensayar directamente en la homogénea correspondiente a la ecuación [1] ( $\varphi(x) \equiv 0$ ) soluciones de la forma  $y=(e^t)^r = x^r$ . Para el cálculo de las soluciones particulares de la ecuación completa [1] podemos transformar asimismo las reglas antes expuestas teniendo en cuenta las equivalencias que resultan del cambio efectuado.

A toda solución de tipo  $\left\{ \begin{array}{l} \text{exponencial} \\ \text{potencial} \end{array} \right\}$  de la transformada comprende otra de tipo  $\left\{ \begin{array}{l} \text{potencial} \\ \text{logarítmico} \end{array} \right\}$  en la dada.

EJEMPLO 1.º  $4x^3 y''' - 15y' = 4$ . Consideremos primero la homogénea  $= 0$ . Sin necesidad de multiplicar previamente la ecuación por  $x$  ni hacer el cambio  $x = e^t$ , podemos ensayar directamente soluciones homogéneas de la forma  $y = x^r$  que dan

$$y' = rx^{r-1} \quad y''' = r(r-1)(r-2)x^{r-3}$$

y sustituyendo se habrá de satisfacer

$$4r(r-1)(r-2) - 15r = 0$$

que tiene las raíces

$$r_1 = 0 \quad r_2 = \frac{7}{2} \quad r_3 = -\frac{1}{2}$$

Integral general de la incompleta

$$C_1 + C_2 x^{\frac{7}{2}} + C_3 x^{-\frac{1}{2}}$$

Solución particular de la completa: La transformada (después de multiplicar por  $x$ ) tendría un segundo miembro de la forma  $4e^t$  y en ella ensayaríamos soluciones de la forma  $y = ke^t$ ; aquí ensayaremos, pues, soluciones de la forma  $y = kx$  que da inmediatamente  $-15k = 4$ ,  $k = -\frac{4}{15}$ . En resumen, la integral general buscada es

$$y = C_1 + C_2 x^{\frac{7}{2}} + C_3 x^{-\frac{1}{2}} - \frac{4}{15} x$$

EJEMPLO 2.º  $2y'' + \frac{y}{x^2} = \sqrt{x}$ . Ensayamos en la homogénea  $2y'' + \frac{y}{x^2} = 0$  soluciones de la forma  $y = x^r$  y resulta la ecuación  $2r(r-1) + 1 = 0$ , cuyas raíces

$$r_1 = \frac{1}{2}(1+i) \quad r_2 = \frac{1}{2}(1-i)$$

dan las soluciones

$$y_1 = x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{i}{2}} = x^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2} \ln x} = \sqrt{x} (\cos l\sqrt{x} + i \operatorname{sen} l\sqrt{x})$$

$$y_2 = \sqrt{x} (\cos l\sqrt{x} - i \operatorname{sen} l\sqrt{x})$$

Integral general de la incompleta:

$$\sqrt{x} (C_1 \cos l\sqrt{x} + C_2 \operatorname{sen} l\sqrt{x})$$

Como el segundo miembro, después de multiplicado por  $x^2$  y transformado sería de la forma  $e^{\frac{5}{2}t}$  ensayaríamos una solución particular  $y = ke^{\frac{5}{2}t}$ ; por tanto, corresponde ensayar aquí  $y = kx^{\frac{5}{2}}$ , con lo que se obtiene:

$$2k \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} + kx^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} \quad k = 1: (17/2) = 2/17$$

Solución:

$$y = \sqrt{x} \left( C_1 \cos l\sqrt{x} + C_2 \operatorname{sen} l\sqrt{x} + \frac{2x^2}{17} \right)$$

Compruébelo el lector transformando la ecuación.

EJEMPLO 3.<sup>o</sup>.

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = \frac{1}{x}$$

El ensayo  $y=x^r$  conduce a la ecuación  $r(r-1)+4r+2=0$ , que tiene las raíces  $-1$ ,  $-2$ ; por tanto,  $C_1 x^{-1} + C_2 x^{-2}$  es la integral de la homogénea. Como el segundo miembro es solución de la homogénea no podemos ensayar aquí  $k/x$ . En la transformada ensayaríamos  $kte^{-t}$ ; ensayaremos, pues, aquí una solución de la forma  $y=kx^{-1} \ln x$ , con lo que se obtiene fácilmente  $k=1$  y la integral general buscada

$$y = C_1 x^{-1} + C_2 x^{-2} + x^{-1} \ln x$$

## EJERCICIOS

Integrar las ecuaciones:

1.  $y'' = 9y$ ;
2.  $y''' = y$ ;
3.  $2y''' - 3y'' + 2y' + 2y = 0$ .
4.  $y'' + 12y = 7y'$  con  $y=2$   $y'=-1$  para  $x=0$ .
5.  $y^{IV} + 2\pi^2 y'' + \pi^4 y = 0$  con  $y=1$   $y'=0$  para  $x=0$ .
6.  $y'' - 4y' + 5y = 0$  con  $y=0$   $y'=1$  para  $x=\pi/2$ .
7.  $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 2x^2 - 1$ .
8.  $y^{IV} = y + 3 \cos x + \operatorname{Sh} x$ .
9.  $y'' + a^2 y = \sin ax$  con  $y=1$   $y'=-1$  para  $x=0$ .
10.  $y'' - 4y' + 13y = \sin x - 2^{3x} + 5$ .
11.  $y^{IV} - 8y''' + 18y'' - 27y' = 3x^2 + 5x + 8$ .
12.  $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = -e^{3x} + 2e^{-x}$ .
13.  $y'' - y' - 2y = \operatorname{Sh} x$  con  $y=0$   $y'=0$  para  $x=0$ .
14. Aplicar el método de variación de las constantes a la integración de  $y'' + y' = x \cos x$ .
15. Idem a la ecuación  $y'' + 4y' = -x \sin x$ .
16. Integrar  $x^2 y'' + xy' - y = x^3$  con  $y=0$   $y'=0$  para  $x=1$ .
17. Integrar  $x^4 y^{IV} - 11x^2 y'' + 49xy' - 81y = 0$ .
18. Idem  $x^2 y''' + 2xy'' - 4y' + 4 \frac{y}{x} = 2x$ .
19. Idem  $(x+1)^3 y''' - (x+1)^2 y'' + 6(x+1)y' - 10y = 0$ .
20. Idem  $(2x+3)^3 y''' - (16x+24)y' + 32y = 0$ .
21. Idem  $(1+x)^3 y''' + (1+x)^2 y'' + 3(1+x)y' - 8y = \frac{x}{(1+x)^2}$
22. Comprobar que  $y_1 = x^2 - 1$  es solución de la ecuación  $(1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$  y completar su integración, así como la de la ecuación completa que resulta de poner el segundo miembro  $=1$ . Aplíquese Lección 8.<sup>a</sup>, § 8.)
23. Comprobar que  $y_1 = e^x$  es solución de la ecuación  $y'' - xy' + (x-1)y = 0$  y completar su integración así como la de segundo miembro  $= e^{\frac{x^2}{2}}$  (Déjense indicadas las cuadraturas.)
24. Para que  $u(x) + iv(x)$  sea solución de una ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes reales es necesario y suficiente que sean soluciones  $u$  y  $v$ . (Demuéstrese.)
25. Si  $y$  es solución de  $P(D)y = 0$  (coef. constantes) también lo es  $y'$ .
26. Si  $a+b+c \equiv 0$  ( $a, b, c$ , constantes o funciones de  $x$ ) la ecuación  $ay'' + by' + cy = 0$  admite la solución  $e^x$ . Aplíquese a la integración de  $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2 e^{2x}$ .
27. Aplicar la fórmula de Liouville a la resolución de la ecuación  $y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = 0$  conocida la solución particular  $y_1$ .
- La fórmula de Liouville (Lección 8.<sup>a</sup>; § 9) proporciona en este caso una ecuación diferencial lineal de primer orden para hallar otra integral particular  $y_2$ . Se obtiene con ella nuevamente la fórmula [4] del § 8 de la Lección 8.<sup>a</sup>.
28. Condición que deben cumplir las funciones  $f_1, f_2$  de la ecuación anterior para que admita dos soluciones cuyo cociente sea  $x$ .
29. Supuestas cumplidas las condiciones del ejercicio anterior hallar la expresión de la integral general de la ecuación.
30. Integrar  $(1+x)y'' + (4x+5)y' + (4x+6)y = e^{-2x}$  ensayando una sol. particular de la homogénea de la forma  $y_1 = e^{\alpha x}$ .

LECCIÓN 10.—MÉTODOS FUNDADOS EN EL MANEJO ALGEBRAICO  
DEL OPERADOR  $D$

Principalmente impulsados por la escuela de los electrotécnicos ingleses (con Heaviside a la cabeza) se han generalizado en estos últimos decenios, en la literatura de matemática aplicada, ciertos métodos para la resolución de ecuaciones diferenciales lineales que pueden calificarse de algebraicos por cuanto consisten en el manejo formal del operador  $D$  (derivada) mediante ciertas reglas algebraicas cuidadosamente precisadas, y complementadas con la debida interpretación de los resultados. En esta lección vamos a dar idea de los fundamentos de estos métodos, limitándonos a las *ecuaciones de coeficientes constantes*.

**I. Propiedad asociativa y conmutativa de los operadores  $P(D)$  de coeficientes constantes.**—En la lección anterior hemos establecido el *carácter lineal* del operador simbólico

$$P(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n \quad [1]$$

sean constantes o variables los coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_n$ ; es decir cumple las propiedades

I. *Distributiva*  $P(D)(y_1 + y_2) = P(D)y_1 + P(D)y_2.$

II. *Conmutativa con un factor constante*  $P(D)ky = kP(D)y.$

Obsérvese que esta última propiedad dejaría de ser cierta si fuese  $k = f(x)$ . Pues  $Dfy \neq fDy$ , sino  $Dfy = fDy + yDf$ .

Veamos ahora nuevas propiedades aplicables sólo a los *polinomios  $P(D)$  de coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_n$  constantes*.

Aplicando las propiedades I y II podemos escribir suponiendo  $a$  y  $b$  constantes:

$$(D-a)(D-b)y = (D-a)(Dy-by) = D^2y - bDy - aDy + aby = [(D-a)(D-b)]y$$

y análogamente para varios factores, pues en las multiplicaciones no hacemos uso más que de la propiedad distributiva y de la permutación del operador  $D$  con las constantes  $a, b$ . En resumen: Podemos sustituir varios factores lineales de coeficientes constantes por su producto efectuado y recíprocamente. Y como todo polinomio algebraico  $P(D)$  puede disociarse en factores lineales  $a_0(D-a)(D-b)(D-c) \dots$  ( $a, b, c \dots$ , raíces de  $P(r)=0$ ) resulta en definitiva la

III. *Propiedad asociativa de los operadores  $P(D)$  de coeficientes constantes*.

$$P_1(D)P_2(D)y = [P_1(D)P_2(D)]y \quad [2]$$



Ahora bien, una vez asociados  $P_1$  y  $P_2$  el producto simbólico obtenido  $P(D)$  es independiente del orden de los factores que lo forman; por tanto se verifica la

IV. *Propiedad conmutativa de los operadores  $P(D)$  de coeficientes constantes.*

$$P_1(D)P_2(D)y = P_2(D)P_1(D)y \quad [3]$$

Combinando estas propiedades, enunciadas para dos factores, resulta fácilmente su validez para cualquier número de ellos (\*).

**2. Permutación de  $P(D)$  con un factor exponencial.**—Si aplicamos el operador  $D - a$  ( $a$  constante) al producto  $e^{rx} \cdot y(x)$  resulta

$$(D - a)e^{rx} \cdot y = e^{rx}Dy + re^{rx}y - ae^{rx}y = e^{rx}(D + r - a)y$$

La permutación de  $e^{rx}$  con un factor lineal de coeficientes constantes se logra sustituyendo  $D$  por  $D + r$  si se transpone  $e^{rx}$  a la izquierda del operador, y por tanto, recíprocamente, sustituyendo  $D$  por  $D - r$  si se transpone a la derecha.

Para permutar  $P(D)$  con  $e^{rx}$  bastará efectuar la permutación con todos y cada uno de los factores lineales en que se descompone y resulta

$$\left. \begin{aligned} P(D)e^{rx}y &= e^{rx}P(D+r)y \\ e^{rx}P(D)y &= P(D-r)e^{rx}y \end{aligned} \right\} \quad [4]$$

**3. Integración de las ecuaciones homogéneas.**—Sea la ecuación

$$P(D)y = 0$$

Descomponiendo  $P(D)$  en factores resulta, si  $a, b, c, \dots, l$  son las raíces de órdenes de multiplicidad respectivos  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$

$$a_0(D - l)^\lambda \dots (D - b)^\beta (D - a)^\alpha y = 0 \quad [5]$$

que se satisface en cuanto se anule el resultado de la primera operación  $(D - a)^\alpha y = 0$ , y análogamente, en virtud de la propiedad conmutativa, para los otros factores; en resumen la ecuación se satisfará para las soluciones de cada una de las ecuaciones siguientes

$$(D - a)^\alpha y = 0, \quad (D - b)^\beta y = 0 \quad \dots \quad (D - l)^\lambda y = 0$$

Pero la solución de éstas es inmediata sin más que multiplicarlas respectivamente por los factores no nulos  $e^{-ax}, e^{-bx}, \dots, e^{-lx}$ , pues, en virtud de la regla del párrafo anterior, la primera se transforma en

$$e^{-ax}(D - a)^\alpha y \equiv D^\alpha e^{-ax} \cdot y = 0$$

(\*) Es esencial la constancia de los coeficientes; de otro modo estas propiedades pueden no ser ciertas.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} D(D-x)y &= D(Dy - xy) = D^2y - xDy - y \\ (D-x)Dy &= D^2y - xDy \end{aligned}$$

de donde

$$e^{-ax} \cdot y = Q_{\alpha-1}(x) \quad \text{y por tanto} \quad y = Q_{\alpha-1}(x) e^{ax}$$

donde  $Q_{\alpha-1}(x)$  es un polinomio de grado  $\alpha-1$ , de coeficientes arbitrarios (en número  $\alpha$ ). Y análogamente son soluciones  $Q_{\beta-1}(x)e^{bx}, \dots, Q_{\lambda-1}(x)e^{lx}$ , con lo que recaemos en la expresión de la integral general (lec. 9, §1).

$$y = Q_{\alpha-1}(x) e^{ax} + Q_{\beta-1}(x) e^{bx} + \dots + Q_{\lambda-1}(x) e^{lx} \quad [6]$$

obtenida ahora por método más breve y elegante.

**4. Integración de las ecuaciones completas cuyo segundo miembro es de la forma  $p(x)e^{rx}$ .**—Sea la ecuación, en la que  $p(x)$  es un polinomio,

$$P(D)y = p(x)e^{rx} \quad [7]$$

y tratemos de hallar de ella una solución particular.

Si  $k$  es el grado de  $p(x)$  este segundo miembro, según acabamos de ver, satisface la ecuación  $(D-r)^{k+1}\eta=0$ . Por tanto, aplicando el operador  $(D-r)^{k+1}$  a los dos miembros de [7], la solución y buscada deberá ser solución de la ecuación homogénea

$$(D-r)^{k+1}P(D)y=0 \quad \text{o bien} \quad P(D)(D-r)^{k+1}y=0 \quad [8]$$

Si  $P(D)$  no admite la raíz  $r$  bastará buscar una función  $\eta$  que satisfaga a  $(D-r)^{k+1}\eta=0$ , es decir, de la misma forma  $\eta=q_k(x)e^{rx}$  que el segundo miembro de la ecuación, siendo  $q_k(x)$  un polinomio de grado  $k$ , cuyos  $k+1$  coeficientes se hallarán identificando  $P(D)\eta$  con  $p(x)e^{rx}$ .

Si  $P(D)$  admite la raíz  $r$  esta identificación puede resultar imposible, pues el operador  $P(D)$  anulará términos del polinomio  $q_k(x)e^{rx}$  (tantos como indique el grado de multiplicidad de la raíz) y es preciso que sean asimismo nulos los términos de igual grado en el segundo miembro  $p(x)e^{rx}$ .

Así, por ejemplo, si  $r$  es raíz de grado  $\rho$  de  $P(D)$ , será

$$P(D) = P_1(D)(D-r)^\rho$$

y el factor  $(D-r)^\rho$  anulará  $q_{\rho-1}(x)e^{rx}$  llamando  $q_{\rho-1}(x)$  los términos de  $q_k(x)$  hasta el grado  $\rho-1$ .

Se puede allanar la dificultad, de un modo general, agrupando todos los factores  $D-r$  en [8], con lo que la solución buscada deberá serlo de la ecuación

$$(D-r)^{k+\rho+1}y=0 \quad [9]$$

es decir ensayaremos sistemáticamente una solución de la forma

$$\eta = q_{k+\rho}(x) e^{rx} \quad [10]$$

en la que  $q_{k+\rho}$  es un polinomio de grado  $k+\rho$ , al que le faltan los términos hasta el grado  $\rho-1$ .

La identificación de  $P(D)\eta$  con  $p(x)e^{rx}$  suministrará los  $k+1$  coeficientes de  $q_{k+p}$ .

Esta regla, mucho más general que las expuestas en el § 2 de la lección anterior, las incluye a todas poniendo de manifiesto la unidad de concepto que las liga.

Si  $r=0$  resulta el caso de segundo miembro polinomio  $p(x)$ .

Si  $p(x)\equiv 1$  resulta el caso de segundo miembro exponencial.

Si además  $r$  es imaginario resulta el caso de segundo miembro trigonométrico.

EJEMPLO 1.º Sea la ecuación  $D^2y-2Dy=(x^3-2x+1)e^{-x}$ . En este caso,  $r=-1$  no es raíz de  $P(D)\equiv D(D-2)$ . Ensayamos, pues, la solución particular  $\eta=(\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)e^{-x}$ , que sustituida en la ecuación da por identificación de ambos miembros

$$3\alpha = 1, \quad 3\beta - 12\alpha = 0, \quad 6\alpha - 8\beta + 3\gamma = -2, \quad 2\beta - 4\gamma + 3\delta = 1$$

de donde

$$\alpha = 1/3, \quad \beta = 4/3, \quad \gamma = 20/9, \quad \delta = 65/27$$

De aquí la integral general

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + \left( \frac{x^3}{3} + \frac{4}{3}x^2 + \frac{20}{9}x + \frac{65}{27} \right) e^{-x}$$

EJEMPLO 2.º Sea la ecuación  $D^2y-2Dy=x^2-5$ . En este caso  $r=0$  es raíz simple de  $P(D)$ . Ensayaremos, pues, la solución particular  $\eta=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x$ , que sustituida en la ecuación da

$$-6\alpha = 1, \quad 6\alpha - 4\beta = 0, \quad 2\beta - 2\gamma = -5$$

de donde

$$\alpha = -1/6, \quad \beta = -1/4, \quad \gamma = 9/4$$

EJEMPLO 3.º Sea la ecuación  $(D^2-2D+2)y=e^x \cos x$ . En este caso, puesto el segundo miembro en la forma  $e^x \cdot \frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$  habríamos de hallar las soluciones particulares correspondientes a  $\frac{1}{2}e^{(1+i)x}$  y  $\frac{1}{2}e^{(1-i)x}$ . Pero  $1+i$  y  $1-i$  son las raíces simples de  $P(D)$ , por lo que procede ensayar los productos de estos segundos miembros por  $\alpha x$  y por  $\beta x$ ; lo que en definitiva equivale a ensayar directamente  $\eta=e^x(\alpha x \cos x + \beta x \sin x)$ . Sustituyendo en la ecuación se obtiene  $\alpha=0$ ,  $\beta=\frac{1}{2}$ , y por tanto la integral general es

$$y = e^x \left( C_1 \cos x + \left( C_2 + \frac{x}{2} \right) \sin x \right)$$

**5. Integración de las ecuaciones completas en el caso general.—I.** Empecemos integrando una ecuación de la forma

$$(D-a)^\alpha y = \varphi(x) \quad [11]$$

Con el mismo artificio usado en la integración de las homogéneas, multipliquemos ambos miembros por  $e^{-ax}$  pasándolo a la derecha del operador  $(D-a)^\alpha$  en el primero, es decir

$$D^\alpha e^{-ax} y = e^{-ax} \varphi(x)$$

Por tanto

$$e^{-ax} y = \underbrace{\int dx \int dx \int \dots \int}_{\alpha \text{ integraciones}} e^{-ax} \varphi(x) dx$$

es decir

$$y = e^{ax} \int dx \int dx \dots \int e^{-ax} \varphi(x) dx \quad [12]$$

Si, como es usual en la integración de las ecuaciones completas, lo que buscamos es sólo una integral *particular*, podemos sustituir todas las cuadraturas por la integral definida única siguiente

$$y = e^{ax} \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} e^{-at} \varphi(t) dt \quad [13]$$

Derivando  $\alpha$  veces respecto de  $x$  esta integral, según la regla de derivación bajo el signo integral, se obtiene, en efecto  $e^{-ax}\varphi(x)$ .

Convendremos en designar toda función que satisface la ecuación  $(D-a)^\alpha y = \varphi(x)$  mediante el símbolo algebraico

$$y = \frac{1}{(D-a)^\alpha} \varphi(x), \text{ es decir, por definición, } (D-a)^\alpha \left[ \frac{1}{(D-a)^\alpha} \varphi(x) \right] = \varphi(x)$$

En particular  $\frac{1}{D}$  será símbolo de integración.

II. Designemos ahora, análogamente, toda función  $y$  que verifique

$$P(D)y = \varphi(x) \quad [14]$$

por

$$y = \frac{1}{P(D)} \varphi(x) \quad [15]$$

es decir, por definición es

$$P(D) \left[ \frac{1}{P(D)} \varphi(x) \right] = \varphi(x)$$

Esta designación general no es simple convenio de escritura; está perfectamente ligada a la anterior por las mismas leyes formales que ligan las fracciones algebraicas, pues ocurre que:

Si desarrollamos la fracción algebraica  $\frac{1}{P(D)}$  en suma de fracciones simples

$$\frac{1}{P(D)} = \frac{A_1}{(D-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(D-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_\alpha}{D-a} + \frac{B_1}{(D-b)^\beta} + \dots + \frac{L_\lambda}{D-l} \quad [16]$$

e interpretamos cada fracción simple como un operador inverso a la manera indicada en el apartado anterior, la suma de estos operadores aplicados a una función  $\varphi(x)$  da precisamente una solución de la ecuación completa [14].

Es decir que

$$\frac{1}{P(D)} \varphi(x) = \frac{A_1}{(D-a)^\alpha} \varphi(x) + \frac{A_2}{(D-a)^{\alpha-1}} \varphi(x) + \dots + \frac{L_\lambda}{D-l} \varphi(x)$$

En efecto esto será cierto, por definición, si aplicando al segundo miembro el operador  $P(D)$  obtenemos  $\varphi(x)$ . Pero al multiplicar [16] por  $P(D)$  queda una identidad (con polinomios simbólicos *enteros*)

$$P(D) \frac{A_1}{(D-a)^a} + P(D) \frac{A_2}{(D-a)^{a-1}} + \dots + P(D) \frac{L_\lambda}{D-l} = 1$$

cuyo significado es bien preciso: *El operador primer miembro aplicado a cualquier función  $\varphi(x)$  reproduce la misma función, y por tanto*

$$P(D) \left[ \frac{A_1}{(D-a)^a} \varphi(x) + \frac{A_2}{(D-a)^{a-1}} \varphi(x) + \dots + \frac{L_\lambda}{D-l} \varphi(x) \right] = \varphi(x)$$

lo que demuestra el teorema

He aquí, pues, convertido el problema de la integración de una ecuación diferencial completa de coeficientes constantes en un problema de descomposición algebraica en suma de fracciones simples, seguida de la interpretación conveniente de los operadores inversos simbolizados en dichas fracciones. Más adelante hemos de volver todavía sobre este tema desde un punto de vista más elevado, que permitirá ver mejor la naturaleza y ventajas de estos operadores. (V. Lec. 18.)

EJEMPLO 1.º En particular, si todas las raíces de  $P(D)$  son distintas  $r_1, r_2, \dots, r_n$  recordando la descomposición de  $1/P(D)$  en este caso, se obtiene como integral particular

$$P(D)y = \varphi$$

$$y = \frac{A}{D-r_1} \varphi(x) + \frac{B}{D-r_2} \varphi(x) + \dots + \frac{L}{D-r_n} \varphi(x)$$

donde

$$A = 1 : P'(r_1) \quad B = 1 : P'(r_2) \quad \dots \quad L = 1 : P'(r_n)$$

es decir

$$y = \sum_{i=1}^n \int_{x_0}^x \frac{e^{r_i(x-t)}}{P'(r_i)} \varphi(t) dt \quad [17]$$

que coincide con la expresión obtenida en el § 3 de la lección 9ª como aplicación del método de variación de las constantes y asimismo con la llamada *segunda regla de Heaviside*.

EJEMPLO 2.º Sea la ecuación

$$D(D-1)y = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

Una solución particular será

$$\eta = \frac{1}{D(D-1)} \frac{1}{e^x + e^{-x}} = \left[ -\frac{1}{D} + \frac{1}{D-1} \right] \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

$$-\frac{1}{D} \frac{1}{e^x + e^{-x}} \text{ es } -\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = -\int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = -\text{arc tg } e^x$$

$$\frac{1}{D-1} \frac{1}{e^x + e^{-x}} \text{ es solución de la ecuación lineal de primer orden } (D-1)y = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

que, obtenida de acuerdo con fórmula (13), da

$$y = e^x \int \frac{e^{-x} dx}{e^x + e^{-x}}$$

Esta integral se obtiene fácilmente con el cambio  $e^x = t$ , o bien directamente

$$\int \frac{e^{-x} dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{dx}{e^{2x} + 1} = \int \left( 1 - \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} \right) dx = x - \frac{1}{2} l(e^{2x} + 1)$$

La integral particular buscada será, pues,

$$\eta = -\operatorname{arc} \operatorname{tg} e^x + x e^x - \frac{e^x}{2} l(e^{2x} + 1)$$

A estas mismas integrales llegará directamente el lector aplicando la fórmula [17].

**6. Aplicación a algunas ecuaciones de coeficientes variables.**—Aun cuando el éxito de los anteriores métodos algebraicos radica principalmente en las ecuaciones de coeficientes constantes, por ser precisamente en ellas donde los operadores  $P(D)$  cumplen el mayor número de leyes formales del álgebra, pueden en ocasiones aplicarse con éxito a ecuaciones de coeficientes variables *especialmente cuando se conoce una descomposición en factores lineales del operador primer miembro*. Claro es que en tales casos hay que tener cuidado de *no asociar ni permutar* tales operadores.

EJEMPLO 1.º Sea la ecuación  $y'' - xy' - y = x^2$   
o sea  $(D^2 - xD - 1)y = x^2$  equivalente a  $D(D - x)y = x^2$

Una primera integración da  $(D - x)y = \frac{x^3}{3} + C_1$

es decir  $y' - xy = \frac{x^3}{3} + C_1$

ecuación lineal de primer orden, cuya integración se completa fácilmente (mediante la integral de las probabilidades).

EJEMPLO 2.º Sea la ecuación

$y'' + (\operatorname{tg} x - 1)y' - y \operatorname{tg} x = 0$  o sea  $[D^2 + (\operatorname{tg} x - 1)D - \operatorname{tg} x]y = 0$   
equivalente a  $(D + \operatorname{tg} x)(D - 1)y = 0$ .

Llamando  $(D - 1)y = u$  empecemos integrando

$(D + \operatorname{tg} x)u = 0$  es decir  $u' + u \operatorname{tg} x = 0$

que da

$$l u = l \cos x + l C, \quad u = C \cos x$$

con lo que la función  $y$  tendrá que satisfacer la ecuación lineal

$$(D - 1)y = C \cos x \quad y' - y = C \operatorname{csc} x$$

integración completará fácilmente el lector.



Dada una ecuación general  $y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = \varphi(x)$  o sea  $(D^2 + f_1D + f_2)y = \varphi(x)$  podemos, en vista de lo anterior, preguntarnos si será posible descomponer el primer miembro en factores lineales de la forma  $(D + a_1)(D + a_2)y$ , siendo ahora  $a_1$  y  $a_2$  funciones convenientes de  $x$  a determinar. Si desarrollamos este producto obtenemos

$$(D + a_1)(Dy + a_2y) = D^2y + a_2Dy + a_1' y + a_1Dy + a_1a_2y$$

e indentificando con la ecuación dada, habría de tenerse

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1 + a_2 \\ f_2 &= a_1' + a_1a_2 \end{aligned}$$

y eliminando  $a_1$  resulta

$$a_1' + a_2f_1 - a_2^2 = f_2$$

ecuación de Riccati en  $a_2$ .

El problema a que nos vemos conducidos es, pues, *de dificultad equivalente al propuesto*, como tuvimos ocasión de poner de relieve en la lección 6.<sup>a</sup>, § 6, al rebajar el orden de la ecuación homogénea.

### EJERCICIOS

1. Aplicar el operador  $P(D) \equiv D^3 - 2D^2 + 3D - 1$  a las funciones  $e^{-x}$ ,  $\cos 2x$ ,  $x^3 - 2x + 1$ .
2. Calcular  $(D-1)^3(xe^{-x})$ ;  $(D+2)^2(x^2 \sin x)$ .
3. Tratar por los métodos expuestos en esta lección las ecuaciones propuestas en los ejercicios 1 a 15 de la lección anterior
4. Integrar  $y^{(n)} - \binom{n}{1} a y^{(n-1)} + \binom{n}{2} a^2 y^{(n-2)} + \dots + (-a)^n y = e^{ax}$ .
5. Funciones que coinciden con su derivada  $n^{\text{a}}$
6. Funciones que difieren de su derivada  $n^{\text{a}}$  en un polinomio dado de grado  $n$ .
7. Integrar  $(D^2 + b^2)y = x \cos ax$
8. Id.  $(D^2 + b^2)y = x \cos bx$ .
9. Integrar  $(D^2 + 4)y = \operatorname{tg} x$  con  $y=0$  para  $x=0$ .
10. Integrar  $(D^3 - 6D^2 + 11D - 6)y = e^{-x}(2x^2 + 5x + 8)$ .
11. Integrar  $(D^3 - 7D^2 + 16D - 12)y = e^{2x}(8x^2 + 15x + 23)$ .
12. Integrar  $(D^3 + D)y = \sec x$ .
13. Integrar  $(D-2)^3(D-1)y = 6(x^2 + 2x)$ .
14. Integrar  $(D-1)^3y = e^x \sin x + e^{2x} \cos x$ .
15. Demostrar que la regla de transposición dada en el § 2 es válida para operadores inversos, o sea que  $\frac{1}{P(D)} e^{rx} \varphi(x) = e^{rx} \frac{1}{P(D+r)} \varphi(x)$ .
16. Comprobar que la solución particular dada por la fórmula [13] § 5 corresponde a las condiciones iniciales  $y=y'=y''=\dots=y^{(\alpha-1)}=0$  para  $x=x_0$ . ¿Cómo se modificaría esta fórmula para valores iniciales  $y_0, y_0', \dots, y_0^{(\alpha-1)}$  no nulos?
17. Integrar la siguiente ecuación que se presenta al calcular la deformación de una barra bajo ciertas condiciones (\*)

$$EI y'' + Fy + \frac{Bl}{8} \cos \frac{\pi x}{l} = 0$$

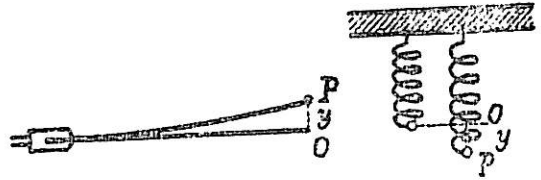
18. Integrar la ecuación  $EI y'' + Fy = \frac{p}{g} \omega^2 y + p$  en la que  $E, I, F, \omega, p, g$  son constantes (eje sometido a una compresión longitudinal  $F$  y girando con velocidad  $\omega$  (\*)).
19. Demostrar  $(aD + b) \sin(\omega t + \varphi) = \sqrt{b^2 + \omega^2 a^2} \sin(\omega t + \varphi + \psi)$  siendo  $\operatorname{tg} \psi = a\omega : b$ .
20. Demostrar  $\frac{1}{bD + b} \sin(\omega t + \varphi) = \frac{1}{\sqrt{b^2 + \omega^2 a^2}} \sin(\omega t + \varphi - \psi)$ .

(\*) ROSE: «Matemáticas para ingenieros», tomo II.

LECCIÓN 11.—VIBRACIONES OSCILACIONES

Las cuestiones que la Física presenta a la Matemática, en relación con las ecuaciones diferenciales, son de diversa naturaleza. Muchas veces interesa al físico la individualización de una solución que satisfaga determinadas condiciones, con objeto de llegar a predecir *cuantitativamente* la evolución del fenómeno; pero otras muchas le interesa sólo la *cualidad* de las soluciones en bloque; saber, por ejemplo, si son *periódicas*, si son *transitorias*, es decir si tienden asintóticamente a cero los valores de la variable en estudio, o si, por el contrario, pueden crecer peligrosamente. De unos y otros ejemplos vamos a dar breve muestra en esta lección, en la que presentamos diversas aplicaciones de las ecuaciones lineales.

1. **Movimiento oscilatorio libre.**—Sea un punto  $P$  material de masa  $m$  atraído por un centro atractivo  $O$ , según una fuerza proporcional a la distancia  $OP$ . Tal ocurre sensiblemente si este punto pertenece, por ejemplo, a una varilla elástica o a un muelle deformados dentro de los límites de elasticidad, en los que es válida la proporcionalidad entre los esfuerzos y las deformaciones (ley de Hooke).



Llamando, pues,  $O$  a la posición de equilibrio del punto, y a la distancia  $OP$ , y atribuyendo el signo  $+$  al sentido  $\overrightarrow{OP}$  lo mismo para las distancias que para las velocidades, aceleraciones y fuerzas, se debe verificar en cada instante fuerza  $= -k \cdot \overrightarrow{OP}$  ( $k$  factor de proporcionalidad positivo) es decir

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky \quad \text{o sea} \quad m\ddot{y} + ky = 0 \quad [1]$$

habiendo designado por  $\ddot{y}$  la derivada segunda respecto del tiempo  $t$ .

Suponiendo el movimiento rectilíneo, es decir que en ningún momento se han impreso al punto velocidades exteriores a la recta  $OP$ , esta ecuación basta para hallar la *naturaleza* o *cualidad* de las soluciones.

En efecto, se trata de una ecuación lineal cuya ecuación característica es  $m\alpha^2 + k = 0$  de raíces imaginarias puras  $\alpha_1 = i\sqrt{\frac{k}{m}}$ ,  $\alpha_2 = -i\sqrt{\frac{k}{m}}$ ,

por tanto *todas* las soluciones son de la forma armónica

$$y = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad [2]$$

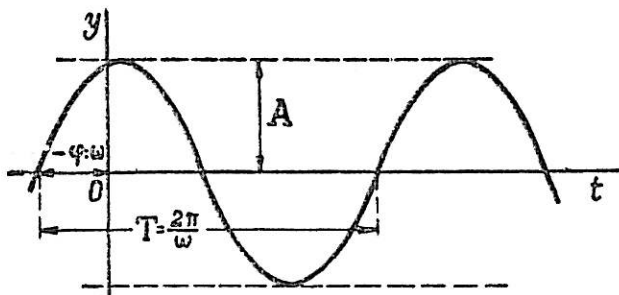
o bien

$$y = A \operatorname{sen} (\omega t + \varphi) \quad [3]$$

con  $C_1 = A \cos \varphi \quad C_2 = A \operatorname{sen} \varphi$

habiendo sustituido las constantes  $C_1, C_2$  por las siguientes :

$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ , *amplitud*; y  $\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (C_2 : C_1)$ , *fase*; cuyo significado físico ya conoce el lector. La constante  $A$  es el valor absoluto de la



ordenada máxima, y representa por lo mismo la *semiamplitud* (en el sentido físico) de la vibración. La senoide oscila entre la recta  $y = A$ , y su simétrica  $y = -A$ . En cuanto a  $\varphi$  representa el argumento para  $t=0$ , y es, por tanto, la *fase* o *argumento inicial*.

Los valores de estas constantes dependerán de las *condicio-*

*nes iniciales* del problema, es decir, de la *posición inicial* y de la *velocidad inicial* que se imprima al punto.

Por ejemplo, si se aparta simplemente el punto de su posición de equilibrio a la distancia  $y_0$  (elongación) sin darle velocidad inicial  $\dot{y}_0 = 0$  ( $t=0$ ) se tendrá

$$y_0 = A \operatorname{sen} \varphi \quad \dot{y}_0 = \omega A \cos \varphi = 0$$

de donde  $\varphi = \frac{\pi}{2} \quad A = y_0$  y queda la ecuación

$$y = y_0 \cos \omega t$$

Si, por el contrario  $y_0 = 0 \quad \dot{y}_0 \neq 0$  serán

$$\varphi = 0 \quad A = \frac{\dot{y}_0}{\omega}$$

y la ecuación del movimiento

$$y = \frac{\dot{y}_0}{\omega} \operatorname{sen} \omega t$$

Obsérvese que el coeficiente  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  de  $t$  llamado *pulsación*, es el *ms.* *mo* para todos los movimientos posibles; sólo depende de la masa  $m$  del punto y de la constante elástica  $k$  del muelle o varilla vibrante. Como de él dependen el período  $T$  y la frecuencia  $\nu = 1 : T$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad [4]$$

podemos afirmar :

La frecuencia de las vibraciones es independiente de la elongación y de la velocidad iniciales.

Una cuerda de guitarra o un diapasón emiten, en efecto, el mismo tono (número de vibraciones) cualquiera que sea la amplitud con que se pulse la primera o la fuerza con que se golpee el segundo.

**2. Movimiento oscilatorio con resistencia de medio.**— En el planteamiento anterior hemos supuesto que el movimiento se verificaba sin resistencia, es decir, sin pérdida de energía, y la respuesta matemática ha sido un movimiento periódico senoidal de amplitud eternamente invariable  $A$ . Pero la realidad física es otra. Esa amplitud es función decreciente del tiempo, se amortigua con él; los sonidos de las cuerdas vibrantes, diapasones, se extinguen en un tiempo más o menos largo debido a dicho amortiguamiento. Para ponerlo matemáticamente de manifiesto, no tenemos más que modificar la ecuación expresando que a la fuerza atractiva  $-ky$  se agrega una resistencia de signo opuesto a la velocidad  $\dot{y}$ , que supondremos en valor absoluto proporcional a ella, es decir, agregaremos al segundo miembro de [1] un término de la forma  $-\dot{r}y$  ( $r$  positivo) y quedará la ecuación del movimiento convertida en

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky - r\dot{y} \quad \text{o sea} \quad m\ddot{y} + r\dot{y} + ky = 0 \quad [5]$$

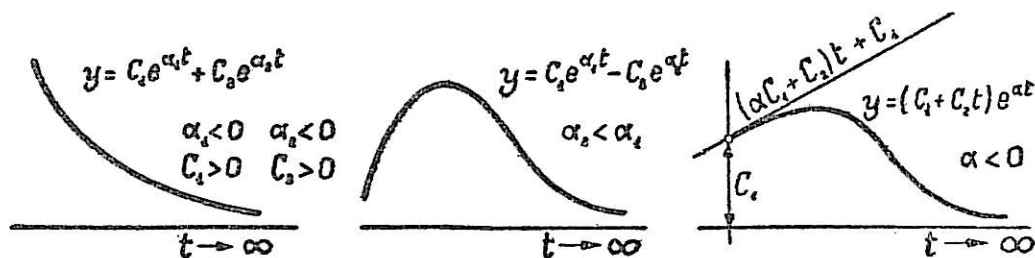
La ecuación característica  $m\alpha^2 + r\alpha + k = 0$  tiene aquí las raíces

$$\alpha_1 = \frac{-r + \sqrt{r^2 - 4km}}{2m} \quad \alpha_2 = \frac{-r - \sqrt{r^2 - 4km}}{2m}$$

I. Si la resistencia fuese tan poderosa que resultara  $r^2 \geq 4km$  sería  $\alpha_1 < 0$   $\alpha_2 < 0$  no habría oscilación, el movimiento sería aperiódico de ecuación

$$y = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} \quad \text{o bien} \quad y = (C_1 + C_2 t) e^{\alpha t} \quad (\text{si } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha)$$

en las que  $y \rightarrow 0$  al crecer  $t$ , por ser  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  negativos. La varilla o muelle deformados sumergidos en un líquido cuya densidad pudiese ir aumentando a voluntad del experimentador llegaría a no oscilar, volviendo asintóticamente a su posición de equilibrio, según gráficas de la forma indicada en la figura (en la segunda se ha supuesto  $C_1 > C_2$ ).



II Pero si la resistencia es pequeña comparada con las fuerzas elásti-

cas y de inercia se verifica  $r^2 < 4km$ , y las raíces de la ecuación característica son complejas de la forma

$$\alpha_1 = -\frac{r}{2m} + i \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}} \quad \alpha_2 = -\frac{r}{2m} - i \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}$$

dando movimientos de ecuación general

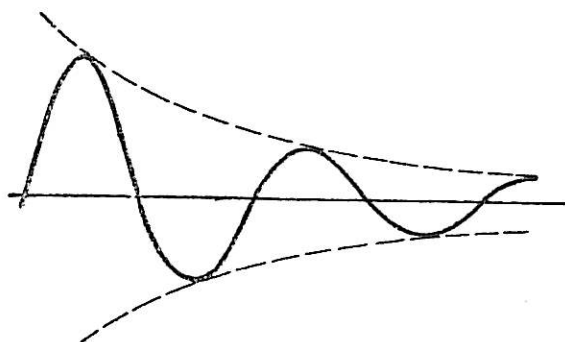
$$y = e^{-\frac{r}{2m}t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}} \quad [6]$$

o bien, como antes

$$y = e^{-\frac{r}{2m}t} A \sin(\omega t + \varphi) \quad [7]$$

Que puede interpretarse como una función senoidal de amplitud variable decreciente  $Ae^{-\frac{r}{2m}t}$ ; es decir, se representará por una senoide deformada de modo que sus oscilaciones se hallen ahora comprendidas entre la curva exponencial  $y = Ae^{-\frac{r}{2m}t}$  y su simétrica.

La rapidez de decrecimiento de estas oscilaciones depende del valor de  $\frac{r}{2m}$  llamado por esta razón coeficiente o *factor de amortiguamiento*.



Si su valor es elevado, el amortiguamiento es muy rápido por la rapidez de decrecimiento de la función exponencial.

La pulsación  $\omega$  es ahora más pequeña que en el caso anterior, como se ve comparando [6] con [2]; por

tanto la resistencia hace *disminuir la frecuencia*  $\omega : 2\pi$  y aumentar el período.

La determinación de las constantes de integración dadas las condiciones iniciales  $y_0$ ,  $\dot{y}_0$ , tampoco tiene aquí dificultad. En particular, si  $\dot{y}_0 = 0$  (para  $t=0$ ) se verificará

$$y_0 = A \sin \varphi \quad \dot{y}_0 = A \left( \omega \cos \varphi - \frac{r}{2m} \sin \varphi \right) = 0$$

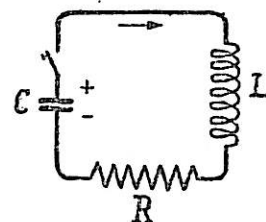
de donde

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2m\omega}{r} \quad A = \frac{y_0}{2m\omega} \sqrt{r^2 + 4m^2\omega^2}$$

**3. Oscilaciones en circuitos eléctricos.**—Veamos ahora cómo la descarga de un condensador a través de un circuito produce en él variaciones de carga que obedecen a una ecuación diferencial análoga a la [5].

Sea un condensador de capacidad  $C$  que supondremos inicialmente cargado y conectado en un momento dado con un circuito de resistencia óhmica  $R$  y autoinducción  $L$ .

Según se sabe, la intensidad en todo momento es en valor absoluto el cociente  $i = dq : dt$  entre la cantidad de electricidad  $dq$  que fluye por el circuito durante el tiempo  $dt$  y el valor de este intervalo; si  $dq$  se interpretará como *variación de carga* del condensador, habrá que tomar  $-dq : dt$  para que resulte  $i$  positiva en el sentido de la descarga o disminución de carga. Y como, además, la carga  $q$  de todo condensador de capacidad  $C$  está ligada con la diferencia de potencial  $u$  por  $q = Cu$ , resultará, con el convenio de signos indicado,



$$u = \frac{1}{C}q \quad i = -\frac{dq}{dt} \quad \frac{di}{dt} = -\frac{d^2q}{dt^2}$$

Pero, además, sabemos que toda variación de intensidad supone la variación del campo magnético y, por tanto, la aparición de una fuerza contraelectromotriz llamada de *autoinducción* que se opone a dicha variación y que es proporcional a ella, es decir  $-L \frac{di}{dt}$ .

La f. e. m. disponible en todo instante para vencer la resistencia óhmica será, pues,  $u - L \frac{di}{dt}$  y en virtud de la ley de Ohm será

$$u - L \frac{di}{dt} = Ri \quad \text{o sea} \quad -L \frac{di}{dt} - Ri + u = 0$$

que expresada en función de carga  $q$  será

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0 \quad [8]$$

y esta misma ecuación regulará las variaciones de la diferencia de potencial  $u = q : C$  (sin más que dividirla por  $C$ ) y las variaciones de la intensidad  $i = -\frac{dq}{dt}$  (sin más que derivarla). Se tendrá pues

$$L \frac{d^2u}{dt^2} + R \frac{du}{dt} + \frac{1}{C}u = 0 \quad [9]$$

y la análoga en  $i$

Las variaciones de carga, intensidad y diferencia de potencial en un circuito eléctrico (no excitado) obedecen, pues, a las mismas leyes que las oscilaciones de un sistema mecánico cuya masa inerte  $m$  sea igual a  $L$  (autoinducción), cuya resistencia sea  $R$  y cuyo coeficiente elástico  $k$  equivalga a  $\frac{1}{C}$ . Por tanto:

Si el circuito cumple  $R^2 \gg 4 \frac{L}{C}$  (gran resistencia o capacidad, pequeña



autoinducción) la descarga no es oscilante, sino *aperiódica* del tipo indicado en el apartado I del párrafo anterior.

Si, por el contrario,  $R^2 < 4 \frac{L}{C}$  (gran autoinducción, pequeña resistencia o capacidad) *la descarga es oscilante* y las oscilaciones de la carga, intensidad y diferencia de potencial son amortiguadas según leyes de la forma

$$y = Ae^{-\frac{R}{2L}t} \text{sen}(\omega t + \varphi) \quad [10]$$

donde [6]

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Si  $\frac{R}{L}$  es pequeño (resistencia óhmica despreciable frente a la autoinducción), como ocurre en los circuitos bobinados de radio, se puede tomar muy aproximadamente  $\omega = 1 : \sqrt{CL}$  y, por tanto, la frecuencia de un tal circuito oscilante (número de ciclos por segundo) es

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{CL}} \quad [11]$$

Por ejemplo, para  $C=1$  milimicrofaradio  $= 10^{-18}$  unidades c. g. s. electromagnéticas,  $L=1$  milihenrio  $= 10^6$  unidades ídem, resulta:

$$\nu = \frac{\sqrt{10^{12}}}{2\pi} = \frac{10^6}{2\pi} \cong 159.000 \text{ períodos/segundo,}$$

correspondientes a una longitud de onda de  $300 \cdot 10^6 : 159 \cdot 10^3 \cong 1.890$  m.

Para variar la frecuencia del circuito podemos actuar sobre  $L$  o sobre  $C$ , variando respectivamente la autoinducción (como se hacía en los receptores de radio primitivos o la capacidad, como se hace modernamente (condensadores de capacidad variable).

**4. Vibraciones y oscilaciones forzadas.**—En los problemas anteriores hemos supuesto el punto mecánico o el sistema eléctrico oscilando *libremente* alrededor de su estado de equilibrio, es decir sin fuerzas, o f. e. m., exteriores capaces de sostener o de alterar la oscilación. En el primer caso estudiado (sin resistencia), la energía pasa alternativamente del estado de energía cinética de movimiento a energía elástica de deformación, y cosa análoga ocurriría en un sistema eléctrico teórico sin resistencia, en el que la energía pasaría alternativamente del campo electrostático del condensador al electromagnético de la bobina. La resistencia introduce una pérdida progresiva de energía en forma de calor (efecto Joule) que acaba por anularla prácticamente. La oscilación es, en estos casos, un fenómeno *transitorio* que en ciertos problemas técnicos (de vibraciones, p. ej.) con-

viene reducir rápidamente, pero en otros por el contrario (transmisión de energía, emisiones...) conviene convertir en *permanente*.

Para conseguir esto último es preciso la aportación exterior de energía en forma de fuerza o fuerza electromotriz oscilante, de modo que las ecuaciones homogéneas [5] ó [9] vendrán modificadas por la aparición de un término armónico que (eligiendo convenientemente el origen de tiempo) puede reducirse a la forma  $a \text{ sen } \Omega t$ , y representa la acción exterior *excitante* de la oscilación, y ésta recibe el nombre de *oscilación forzada*. Así, las ecuaciones de una oscilación forzada mecánica o eléctrica serán

$$m\ddot{y} + r\dot{y} + ky = a \text{ sen } \Omega t \quad L\ddot{u} + R\dot{u} + \frac{1}{C}u = \frac{U}{C} \text{ sen } \Omega t \quad [12]$$

Estas ecuaciones son ahora *completas* y sus soluciones se obtendrán, según sabemos, sumando a la solución general de la homogénea, antes obtenida, una solución particular de la completa.

Para hallar tal solución particular ensayaremos (lecc. 9.<sup>a</sup>, § 2)

$$y = A \text{ sen } \Omega t + B \text{ cos } \Omega t = M \text{ sen } (\Omega t - \psi)$$

Sustituyendo en la primera de las ecuaciones [12] deberá verificarse

$$M[(-m\Omega^2 + k) \text{ sen } (\Omega t - \psi) + r\Omega \text{ cos } (\Omega t - \psi)] = a \text{ sen } \Omega t \quad [13]$$

Anulando el coeficiente de  $\text{cos } \Omega t$  en el primer miembro desarrollado, resulta

$$-(-m\Omega^2 + k) \text{ sen } \psi + r\Omega \text{ cos } \psi = 0$$

$$\frac{\text{sen } \psi}{r\Omega} = \frac{\text{cos } \psi}{k - m\Omega^2} = \frac{1}{\sqrt{r^2\Omega^2 + (k - m\Omega^2)^2}} \quad \text{tg } \psi = \frac{r\Omega}{k - m\Omega^2}$$

e identificando ahora los términos en  $\text{sen } \Omega t$  queda

$$M[(-m\Omega^2 + k) \text{ cos } \psi + r\Omega \text{ sen } \psi] = M \frac{(k - m\Omega^2)^2 + r^2\Omega^2}{\sqrt{r^2\Omega^2 + (k - m\Omega^2)^2}} = a$$

de donde

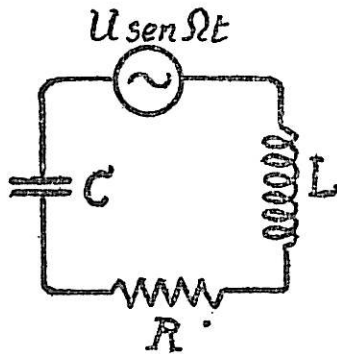
$$M = \frac{a}{\sqrt{r^2\Omega^2 + (k - m\Omega^2)^2}}$$

Solución particular

$$y = \frac{a}{\sqrt{r^2\Omega^2 + (k - m\Omega^2)^2}} \text{ sen } (\Omega t - \psi)$$

Esta representa la parte *permanente* de la oscilación forzada, pues el sumando [6] que habría que agregarle para obtener la solución general, ya hemos dicho que se anula al cabo de un cierto tiempo.

Análogamente la oscilación permanente de tensión en un circuito oscilante excitado por una f. e. m. alterna  $U \text{ sen } \Omega t$  será



$$u = \frac{U/C}{\sqrt{R^2 \Omega^2 + \left(\frac{1}{C} - L\Omega^2\right)^2}} \text{ sen}(\Omega t - \psi) \quad [14]$$

donde

$$\text{tg } \psi = \frac{R}{\frac{1}{C\Omega} - L\Omega}$$

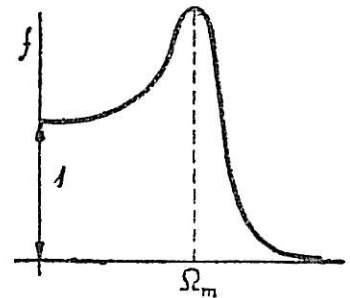
es decir, resultan las oscilaciones forzadas defasadas respecto de la f. e. m. excitante  $U \text{ sen } \Omega t$  del ángulo  $\psi$  y ampliadas (o reducidas) según el factor

$$f = \frac{1}{C \sqrt{R^2 \Omega^2 + \left(\frac{1}{C} - L\Omega^2\right)^2}} \quad [15]$$

**5. Caso de resonancia.**—Si representamos esta función de  $\Omega$  vemos que toma el valor 1 para  $\Omega=0$  y el valor 0 para  $\Omega \rightarrow \infty$ , con un *máximo* para el valor (según fácil cálculo)

$$\Omega_m = \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{2L^2}}$$

que llamaremos *pulsación de resonancia* y que para pequeños valores de  $R/L$  resulta ser muy próxima al valor de  $\omega$ , pulsación propia del sistema oscilando libremente (§ 3).



He aquí, pues, un resultado interesante que confirma la experiencia. *Las oscilaciones forzadas tienen amplitud máxima para una frecuencia de la causa excitante próxima a la frecuencia propia de oscilación libre del sistema, llamada frecuencia de resonancia.*

El valor máximo de este factor es entonces (sustituyendo  $\Omega$  por su valor)

$$f_m = \frac{1}{CR \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}} \quad [16]$$

Esta expresión nos hace ver que cuando  $R$  es muy pequeño la *amplitud de las oscilaciones forzadas en resonancia puede ser muy fuerte por pequeña que sea la amplitud de la causa excitante.*

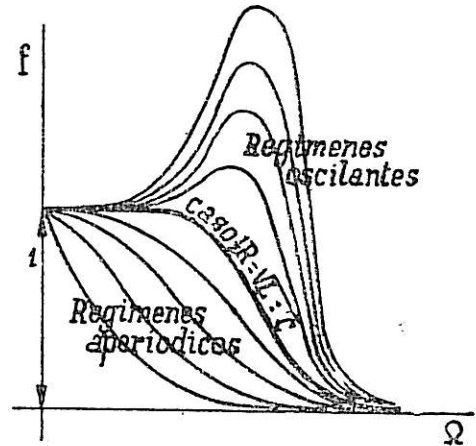
Este fenómeno es el que se aprovecha en algunas cuestiones técnicas, como por ejemplo la *amplificación* en radio y al propio tiempo el que conviene evitar en otras ocasiones, como en vibraciones de estructuras elásticas. Es de observar que no sólo hay que evitar en estos casos

la resonancia de la estructura con el período fundamental de la causa excitante sino también con los armónicos más importantes de ella, cuando tal excitación es una función periódica compuesta. De aquí el interés del análisis armónico en la técnica.

Es clásico el ejemplo del puente colgante de Angers (Francia), hundido en 1850 al paso de una tropa por efecto de resonancia entre su período propio de vibración y el de la marcha rítmica de ésta (\*).

La figura adjunta indica la forma de la variación del factor [15] como función de  $R$  y de  $\Omega$ .

La mayor o menor estrechez de la curva en las proximidades del máximo da idea de la *selectividad* del circuito, es decir de la rapidez con que disminuye  $f$  al apartarse  $\Omega$  de la frecuencia  $\omega$  de resonancia.



**6. Casi-resonancia. Pulsación.**—Es interesante comprobar en la ecuación de vibración forzada [12] lo que ocurre cuando  $n=0$ .

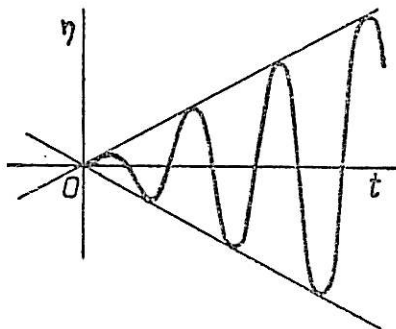
La solución particular será entonces de la forma  $y=M \text{ sen } \Omega t$  (lecc. 9.ª, § 2, II y 4.º) hallándose rápidamente  $M=a:(k-m \Omega^2)$  y la integral general será de la forma

$$y=A \text{ sen } (\omega t + \varphi) + M \text{ sen } \Omega t \quad [17]$$

Ahora bien, si  $\omega=\Omega$ ,  $\text{sen } \Omega t$  es solución de la incompleta y la integral particular a añadir en este caso es de la forma

$$y = Mt \text{ sen } \Omega t$$

cuya amplitud de oscilación crece infinitamente con  $t$ , confirmando la consecuencia física obtenida antes.



Ahora bien, es curioso ver el comportamiento de las soluciones cuando  $\Omega$  difiere poco de  $\omega$ . Para fijar las ideas (sin prolongar excesivamente esta lección) supongamos una solución particular nula para  $t=0$  es decir con  $\varphi=0$ .

Podemos escribir

$$y = A \text{ sen } \omega t + M \text{ sen } \Omega t = A(\text{sen } \omega t + \text{sen } \Omega t) + (M - A) \text{ sen } \omega t$$

(\*) V. MEHRTENS: «Eisenbrückenbau», tomo II.

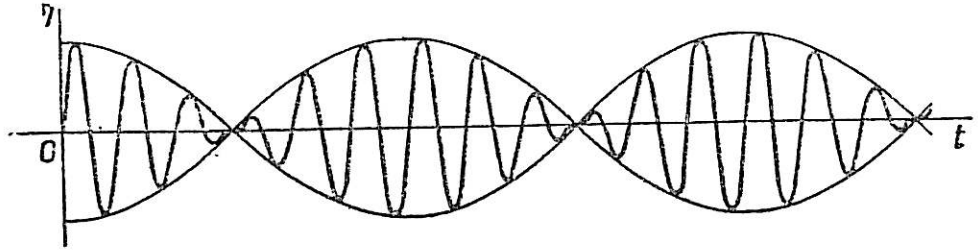
Infinidad de otros ejemplos de resonancias presenta la técnica de vibraciones, en órganos de máquinas (bielas, árboles de transmisión...) en construcción, cimentación de maquinaria, etc.

Representemos el primer sumando

$$\eta = A (\text{sen } \omega t + \text{sen } \Omega t) = 2 A \cos \left( \frac{\omega - \Omega}{2} t \right) \text{sen} \left( \frac{\omega + \Omega}{2} t \right)$$

el segundo factor es de pulsación próximamente igual a la de  $\omega$ ; el primero, en cambio, es de frecuencia muy lenta.

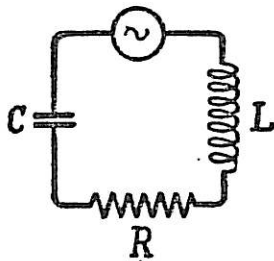
Podemos, pues, representar esta función por una senoide de oscilación rápida con amplitudes variando según otra senoide de oscilación lenta, como indica la figura.



Este fenómeno en acústica se llama *pulsación* o *batimiento* y se produce cuando dos sonidos de frecuencia próxima se emiten simultáneamente excitándose mutuamente sus vibraciones. El oído percibe claramente los batidos de intensidad debidos a la oscilación lenta de amplitud referida.

**7. Impedancia de un circuito oscilante. Ecuación diferencial vectorial del mismo.—**

Supongamos una f. e. m. alterna  $U \text{ sen } \Omega t$  aplicada en serie al circuito oscilante  $C, R, L$ . Cambiando el signo de  $i$  del § 3 y teniendo en cuenta las relaciones  $q=Cu, i=\dot{q}=C\dot{u}$ , se obtendrá por derivación de [12]



$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = U \Omega \cos \Omega t \quad [18]$$

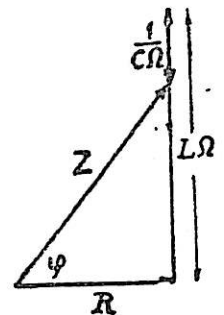
La solución particular permanente se obtendrá ensayando  $i=I \text{ sen } (\Omega t - \varphi)$  y resulta análogamente a [14]

$$\text{tg } \varphi = \frac{R}{\frac{1}{C\Omega} - L\Omega} \quad I = \frac{U \Omega}{\sqrt{R^2 \Omega^2 + \left( \frac{1}{C} - L\Omega^2 \right)^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left( \frac{1}{C\Omega} - L\Omega \right)^2}} \quad [19]$$

Construyendo el vector  $Z$  de la figura, de componentes  $R$  y  $L\Omega - \frac{1}{C\Omega}$  su argumento será  $\varphi$  y su módulo será el denominador de  $U$  en [19]. Por tanto la intensidad permanente en el circuito será alterna, y de ecuación

$$i = \frac{U}{|Z|} \text{sen } (\Omega t - \varphi)$$

Si representamos, como es costumbre en electrotecnia, la función senoïdal  $A \text{ sen } (\omega t + \varphi)$  por un vector giratorio (velocidad angular  $\omega$ )  $A$ , de módulo  $A$  y argumento inicial  $\varphi$  (cuya componente vertical es precisamente  $A \text{ sen } (\omega t + \varphi)$ ), y por tanto la f. e. m. excitante por  $\bar{U}$  se tendrá la relación vectorial



$$\vec{i} = \frac{\vec{U}}{\vec{Z}} \quad \text{análoga a la ley de Ohm} \quad i = \frac{e}{R}$$

El vector fijo  $\vec{Z}$  del denominador se denomina *impedancia* y desempeña en el circuito oscilante, alimentado por una f. e. m.  $\vec{U}$  alterna, el mismo papel que la resistencia óhmica (una de sus componentes) en el circuito con corriente continua.

A este mismo resultado llegan los electrotécnicos por vía formal más rápida del modo siguiente:

1.º Concibiendo la ecuación diferencial [18] como ecuación diferencial *vectorial* en el vector  $\vec{i}$  intensidad (lo que equivale a considerar simultáneamente las dos ecuaciones a que satisfacen sus componentes).

2.º Representando los vectores como exponenciales imaginarios, es decir, el vector giratorio  $\vec{A}$  de componente vertical  $A \sin(\omega t + \varphi)$  se representará por  $\vec{A} = A e^{j(\omega t + \varphi)}$ . Análogamente  $\vec{U} = U e^{j\Omega t}$ , etc. (\*).

El vector  $\vec{i}$  que satisface la ecuación [18]

$$\left( LD^2 + RD + \frac{1}{C} \right) \vec{i} = \Omega U e^{j\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right)} = j\Omega U e^{j\Omega t}$$

se obtendrá ensayando  $\vec{i} = I e^{j(\Omega t + \psi)}$ . Pero como

$$D\vec{i} = j\Omega I e^{j(\Omega t + \psi)} = j\Omega \vec{i}$$

el operador  $D$  aplicado a una intensidad alterna de pulsación  $\Omega$  es equivalente al factor  $j\Omega$ . De aquí la solución

$$\vec{i} = \frac{j\Omega U e^{j\Omega t}}{LD^2 + RD + \frac{1}{C}} = \frac{j\Omega \vec{U}}{-L\Omega^2 + \frac{1}{C} + j\Omega R} = \frac{\vec{U}}{R + j\left[L\Omega - \frac{1}{C\Omega}\right]}$$

es decir  $\vec{i} = \frac{\vec{U}}{\vec{Z}}$  como antes.

**8. Transitoriedad. Estabilidad. Condición de Hurwitz.**—La discusión de la ecuación diferencial de segundo orden a que conduce el estudio de las oscilaciones de un sistema elástico o de un circuito eléctrico nos ha llevado a la conclusión de que la *transitoriedad del fenómeno* (oscilante o no) *va vinculada al hecho de ser las raíces de la ecuación característica reales negativas o complejas de parte real negativa*. La conclusión es evidentemente generalizable al estudio de toda perturbación cuya variación obedezca a una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes. La perturbación será transitoria, es decir, tenderá a desaparecer, y por tanto el fenómeno será *estable* si *todas* las raíces de la ecuación característica tienen la parte real negativa, e *inestable* si *alguna* tiene parte real positiva, pues el término exponencial a que da lugar crece infinitamente con el tiempo. (El caso límite (teórico) de raíz nula o imaginaria pura daría una perturbación sostenida de amplitud constante.)

Suponiendo la ecuación característica  $a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0$  y en ella  $a_0 > 0$  (multiplicando por  $-1$  en caso contrario) las condiciones neces-

(\*) La unidad imaginaria pura se designa por  $j$  en vez de  $i$  para evitar confusiones con la intensidad.



rias y suficientes para que *todas* las raíces tengan parte real negativa que el determinante (en el que  $a_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+3} = \dots = a_{2n-2} = a_{2n-1} = 0$ )

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & \dots & 0 \\ a_9 & a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2k-1} & a_{2k-2} & \dots & a_{n+1} & \dots & a_n & \dots \end{vmatrix}$$

sea positivo y que también lo sean todos sus menores principales.

Este criterio debido a Hurwitz y que no demostraremos es, pues, el criterio matemático de estabilidad de los fenómenos aludidos (\*), que puede, por tanto, averiguarse sin necesidad de resolver la ecuación característica ni de integrar la ecuación.

### NOTAS Y EJERCICIOS

1. La ecuación [18] que da el régimen de intensidad en el circuito puede también escribirse

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = U \sin \Omega t \quad \text{simbólicamente: } \left( LD + R + \frac{1}{CD} \right) i = U \sin \Omega t.$$

En esta forma es como suelen manejarla los electrotécnicos. Se observa que la impedancia  $\bar{Z}$  no es más que el resultado de sustituir en el operador primer miembro  $D$  por  $j\Omega$ .

Esto ha motivado que se generalice la denominación de impedancia a toda ecuación lineal de la forma  $P(D) = U \sin \omega t$  como el resultado de sustituir en el primer miembro  $D$  por  $j\omega$ .

2. Demuéstrese que la ecuación  $P(D)y \equiv (aD^4 + bD^3 + cD^2 + dD + k)y = h \sin \omega t$  admite la solución particular  $y = \frac{h}{|Z|} \sin(\omega t - \varphi)$  en la que  $|Z|$  y  $\varphi$  son el módulo y el argumento de  $P(j\omega)$  (impedancia generalizada).

3. Integrar la ecuación del circuito oscilante [12] suponiendo en ella el 2.º miembro constante  $= E : C$ . Aplicación al caso  $L=0,1$  henrios,  $R=1$  ohmio,  $C=250 \cdot 10^{-6}$  faradios,  $E=100$  voltios, carga inicial del condensador nula, es decir,  $q=0$ ,  $u=0$  para  $t=0$ . Hallar la variación de la carga. Id. de la intensidad suponiendo  $i=0$  para  $t=0$ .

4. Integrar la ecuación del circuito oscilante [12] para un circuito con  $L=0,1$  henrio,  $R=10$  ohmios,  $C=250 \cdot 10^{-6}$  faradios excitado en serie por una f. e. m. alterna de valor máximo 110 voltios y frecuencia  $200/\pi$  ( $\Omega=400$ ). Hallando las variaciones de  $u$ , de  $q$  y de  $i$  suponiendo inicialmente  $u=0$ ,  $q=0$ ,  $i=0$  y que la conexión con el generador se efectúa en el instante en que su f. e. m. es máxima.

5. Calcular el factor de amortiguamiento y el valor de la intensidad transitoria a cabo de un segundo, en el ejercicio anterior.

6. Frecuencia propia de los circuitos de los ejercicios 3 y 4. Valor que habría que dar a  $R$  conservando los restantes datos para que no hubiera oscilación.

7. Aplicar el criterio de Hurwitz a las ecuaciones de 2.º y 3.º orden.

8. ¿Cómo hallar las oscilaciones producidas por una excitación (2.º miembro) periódica desarrollable en serie Fourier?

(\*) Puede hallar el lector una demostración en Frank Mises, «Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik».

LECCIÓN 12.—ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES  
DE COEFICIENTES PERIÓDICOS

Los problemas sobre oscilaciones resueltos en la lección anterior suponen la constancia de los coeficientes (autoinducción, resistencia, capacidad) del primer miembro de la ecuación diferencial, pero la técnica moderna exige ya el estudio de muchos fenómenos oscilatorios que se plantean mediante ecuaciones diferenciales lineales de *coeficientes variables periódicamente con el tiempo*. Tal ocurre, por ejemplo, en el estudio de las oscilaciones de un péndulo con suspensión elástica, de las aspas de un autogiro, de ciertos circuitos de radio con autoinducción, capacidad o resistencia variables periódicamente, en mecánica ondulatoria, movimiento de electrones a través de estructuras cristalinas, etc. De estas ecuaciones y de la naturaleza de sus soluciones vamos a dar breve idea en esta lección.

**I. Ecuación de segundo orden lineal homogénea de coeficientes periódicos.**—Para fijar las ideas y por ser las más frecuentes, empecemos con las ecuaciones de segundo orden homogéneas, y sea la ecuación diferencial

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \quad [1]$$

cuyos coeficientes  $p_1(x)$  y  $p_2(x)$  supondremos funciones continuas y periódicas de período  $\omega$ .

Se ve inmediatamente que si  $y_1(x)$  es una solución de dicha ecuación, también lo es la función  $y_1(x + \omega)$ , puesto que al cambiar la variable  $x$  en  $x + \omega$  la ecuación no se altera por la periodicidad de los coeficientes. De aquí resulta:

*El conjunto de curvas integrales se transforma en sí mismo mediante un corrimiento  $\omega$  en la dirección del eje de las  $x$ . Lo cual no significa que sean periódicas individualmente cada una de las soluciones.*

Resulta inmediatamente de lo expuesto que si se tienen dos soluciones particulares  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  linealmente independientes, las soluciones  $y_1(x + \omega)$ ,  $y_2(x + \omega)$  son combinaciones lineales de ellas, y podremos escribir:

$$\left. \begin{aligned} y_1(x + \omega) &= a_{11}y_1(x) + a_{12}y_2(x) \\ y_2(x + \omega) &= a_{21}y_1(x) + a_{22}y_2(x) \end{aligned} \right\} \quad [2]$$

pudiéndose determinar fácilmente los coeficientes  $a$  sin más que dar valores numéricos a  $x$ .

**2. Soluciones periódicamente progresivas. Factores característicos.**— Así como para las ecuaciones de coeficientes constantes (caso particular de las que tratamos) se ensayan soluciones de la forma  $e^{\alpha x}$  cuya derivada logarítmica es constante ( $=\alpha$ ), parece natural buscar aquí soluciones de la forma  $e^{\alpha x} \varphi(x) = \eta(x)$  (siendo  $\varphi(x)$  periódica de período  $\omega$ ), cuya derivada logarítmica,  $\alpha + \varphi'/\varphi$ , es periódica de período  $\omega$ .

Ahora bien, las funciones de esta forma no son periódicas si  $\alpha$  es distinta de cero, pues

$$\eta(x + \omega) = e^{\alpha(x + \omega)} \varphi(x + \omega) = e^{\alpha\omega} \cdot e^{\alpha x} \varphi(x) = s \cdot \eta(x) \quad [3]$$

Es decir, estas funciones son tales, que al aumentar la variable  $x$  en un período  $\omega$  queda la función multiplicada por un número  $s = e^{\alpha\omega}$ , que llamaremos *factor característico*, mientras  $\alpha$  recibe el nombre de *exponente característico*. Las llamaremos funciones *periódicamente progresivas*; amortiguadas o amplificadas según que sea el factor característico en valor absoluto menor o mayor que la unidad.

Los factores característicos  $s$  vienen determinados por una ecuación que es fácil de formar, supuestas conocidas las soluciones independientes  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ . Expresemos, en efecto, la solución  $\eta(x)$  como combinación lineal de  $y_1$ ,  $y_2$ .

$$\eta(x) = A y_1(x) + B y_2(x) \quad [4]$$

y puesto que ha de verificarse la condición [3], resultará, teniendo en cuenta [2]

$$A y_1(x + \omega) + B y_2(x + \omega) = s \eta(x)$$

es decir

$$(A a_{11} + B a_{21}) y_1(x) + (A a_{12} + B a_{22}) y_2(x) = s A y_1(x) + s B y_2(x)$$

y como hemos supuesto  $y_1$ ,  $y_2$  linealmente independientes, es condición necesaria y suficiente, para que tal relación se verifique, que

$$\begin{aligned} A(a_{11} - s) + B a_{21} &= 0 \\ A a_{12} + B(a_{22} - s) &= 0 \end{aligned} \quad [5]$$

y por eliminación de  $A$  y  $B$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - s \end{vmatrix} = 0, \quad \text{o sea} \quad s^2 - (a_{11} + a_{22})s + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad [6]$$

ecuación de segundo grado llamada *característica*, que determina  $s$ .

Si las raíces  $s_1$  y  $s_2$  son distintas, sustituida cada una sucesivamente en [5], obtendremos dos pares de valores  $A$  y  $B$  y, por tanto [4], dos funciones  $\eta_1(x)$  y  $\eta_2(x)$  que cumplen la condición [3]. Entonces se puede sustituir el sistema fundamental  $y_1$ ,  $y_2$  por  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ , que es también funda-

mental, puesto que cualquier relación lineal entre  $\eta_1$  y  $\eta_2$  implicaría una relación lineal entre  $y_1$  e  $y_2$ . En resumen, cualquier solución de la ecuación [1] se podrá expresar, pues, como combinación lineal de  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ . El conocimiento de ciertas cualidades de estas soluciones permitirá deducir el de las demás.

**3. Estudio cualitativo de las soluciones. Estabilidad.**—Son muchas las cuestiones físicas y técnicas en las que, más que los valores numéricos de las funciones que resuelven el problema, interesan algunas de sus cualidades, como, por ejemplo, su carácter periódico o aperiódico, su crecimiento o decrecimiento, su finitud, su comportamiento asintótico al crecer la variable infinitamente, etc. En particular, si la función incógnita en el problema que nos ocupa expresa la perturbación producida en un cierto fenómeno periódico por una causa accidental, es interesante poder prever si tal perturbación será a la vez de carácter periódico puro o progresivo, creciente o decreciente, y en este último caso si tiende rápidamente a cero, pues de tal tendencia dependerá la *estabilidad* del fenómeno en cuestión. Esta estabilidad ha sido estudiada en la lección anterior para el caso de una ecuación de coeficientes constantes y completamos ahora el estudio para el caso más general de una ecuación de coeficientes periódicos de las que aquéllas son caso particular (\*).

I. Si la ecuación característica [6] tiene dos raíces reales y alguna es de módulo  $>1$  podemos afirmar que la solución fundamental correspondiente  $\eta$  crecerá infinitamente en valor absoluto al tender  $x \rightarrow \infty$ , puesto que a cada nuevo período  $\omega$  su módulo vendrá multiplicado por  $|s| > 1$ . No podemos asegurar en tal caso la estabilidad del fenómeno.

II. Si la ecuación característica tiene dos raíces reales distintas de módulo  $<1$  podemos afirmar que las soluciones fundamentales (y cualquier combinación lineal de ellas) tienden a cero al crecer  $x$ , por venir multiplicadas a cada período por factores de módulo  $<1$ . En consecuencia, todas las soluciones de la ecuación tienden a cero al crecer  $x$  y el fenómeno es estable.

III. Si alguna de las raíces de la ecuación característica tiene módulo  $=1$ , la solución correspondiente es *periódica* de período  $\omega$  si  $s=1$ , y período  $2\omega$  si  $s=-1$  (y por tanto  $s^2=1$ ). Las perturbaciones expresadas por dichas soluciones particulares sustituyen, en tal caso, un régimen periódico por otro.

El caso en que una de las raíces tiene módulo  $=1$  y la otra  $<1$  se suele incluir también entre los de *estabilidad*, dando ahora a esta palabra una acepción más amplia: *finitud de las oscilaciones*.

IV. Si las raíces de [6] son imaginarias conjugadas  $s_1 = \alpha + \beta i$ ,  $s_2 = \alpha - \beta i$ , con ellas pueden obtenerse soluciones fundamentales  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  ima-

(\*) La noción de *estabilidad* tiene muy varias acepciones. Esta es de las más sencillas.

ginarias conjugadas de la forma  $\eta_1 = \varphi_1 + i\varphi_2$   $\eta_2 = \varphi_1 - i\varphi_2$  (\*) que verificarán [3]

$$\begin{aligned}\eta_1(x + \omega) &= (\alpha + \beta i)(\varphi_1 + i\varphi_2) = \alpha\varphi_1 - \beta\varphi_2 + i(\beta\varphi_1 + \alpha\varphi_2) \\ \eta_2(x + \omega) &= (\alpha - \beta i)(\varphi_1 - i\varphi_2) = \alpha\varphi_1 - \beta\varphi_2 - i(\beta\varphi_1 + \alpha\varphi_2)\end{aligned}\quad [7]$$

y, por consiguiente, las soluciones reales

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2), \quad \varphi_2 = \frac{1}{2i}(\eta_1 - \eta_2)$$

verificarán

$$\begin{aligned}\varphi_1(x + \omega) &= \alpha\varphi_1 - \beta\varphi_2 \\ \varphi_2(x + \omega) &= \beta\varphi_1 + \alpha\varphi_2\end{aligned}$$

constituyendo otro sistema fundamental en el que

$$\varphi_1^2(x + \omega) + \varphi_2^2(x + \omega) = [\varphi_1^2(x) + \varphi_2^2(x)](\alpha^2 + \beta^2)$$

y, por tanto, el módulo  $M(x)$  común a  $\eta_1$   $\eta_2$  verificará

$$M(x + \omega) = m M(x)$$

siendo  $m = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  el módulo común de las raíces  $s_1$   $s_2$ . Si es  $m < 1$ ,  $M(x)$  tiende a cero al crecer  $x$  y  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  tienden también a cero por ser en valor absoluto menores que  $M(x)$ . Adoptando  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  como soluciones fundamentales, resulta:

*Si la ecuación característica [6] tiene raíces imaginarias de módulo  $m < 1$  todas las soluciones de la ecuación tienden a cero al crecer  $x$ . Tenemos también en este caso estabilidad.*

V. Si las raíces de la ecuación [6] se confunden en una, ésta vale  $s = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22})$  y es fácil demostrar que en este caso existe además de la solución periódica progresiva  $\eta_1(x)$  obtenida calculando las constantes  $A$  y  $B$  de [5], otra solución  $\eta_2(x) = C y_1(x) + D y_2(x)$  tal que  $\eta_2(x + \omega) = s[\eta_1(x) + \eta_2(x)]$ .

En efecto, sustituyendo  $\eta_2$  por su expresión en función de  $y_1$  e  $y_2$  y desarrollando  $y_1(x + \omega)$   $y_2(x + \omega)$  según [2], las condiciones necesarias y suficientes que han de verificar  $C$  y  $D$ , para que tal relación se cumpla, son (compárese con el cálculo hecho en § 2):

$$\begin{aligned}(a_{11} - s)C + a_{21}D &= sA \\ a_{12}C + (a_{22} - s)D &= sB\end{aligned}\quad [10]$$

(\*) Sin más que poner, por ejemplo, en [5]  $A=1$  de donde  $B_1 = (\alpha + \beta i - a_{11}) : a_{21}$   $B_2 = (\alpha - \beta i - a_{11}) : a_{21}$ , con lo que

$$\eta_1 = y_1 + \frac{\alpha - a_{11}}{a_{21}} y_2 + \frac{\beta i}{a_{21}} y_2 \quad \eta_2 = y_1 + \frac{\alpha - a_{11}}{a_{21}} y_2 - \frac{\beta i}{a_{21}} y_2$$







de donde, identificando los coeficientes de  $y_j(x)$  se obtiene el sistema

$$\sum_i C_i a_{ij} = s C_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad \{14\}$$

homogéneo en las  $C_j$ , de cuya eliminación resulta la ecuación característica de grado  $n$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} - s & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} - s \end{vmatrix} = 0 \quad \{15\}$$

que determina los factores característicos  $s$ . Dado cada uno de éstos se deduce, resolviendo [14], un sistema de coeficientes  $C_j$  que determina una solución  $\eta_j(x)$ .

Si las raíces son distintas,  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , tenemos  $n$  soluciones  $\eta_1(x), \eta_2(x), \dots, \eta_n(x)$  que son linealmente independientes, pues de cualquier relación lineal entre ellas, tal como  $\sum_k \lambda_k \eta_k = 0$  resultarían, por adiciones sucesivas del período,  $n-1$  relaciones nuevas

$\sum_k s_k \lambda_k \eta_k = 0, \sum_k s_k^2 \lambda_k \eta_k = 0 \dots \sum_k s_k^{n-1} \lambda_k \eta_k = 0$  y eliminando entre éstas y la anterior los productos  $\lambda_k \eta_k$  debería ser nulo el determinante de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ s_1^2 & s_2^2 & \dots & s_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_1^{n-1} & s_2^{n-1} & \dots & s_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

al cual no es posible por haber supuesto distintas las raíces  $s$ .

Siendo, pues, expresable cualquier solución como combinación lineal de las  $\eta_j$ , es fácil deducir de la convergencia de éstas la de cualquier otra solución. Si, pues, todas las  $s_j$  son distintas y de módulo menor que la unidad, todas las soluciones tienden a cero al crecer  $x$ . Para completar la discusión véanse los tratados especiales, por ejemplo *Goursat*, «*Traité d'Analyse*».

Para el caso en que exista una raíz  $p$ -múltiple se demuestra análogamente la existencia de  $p$  soluciones independientes  $\eta_1(x), \eta_2(x), \dots, \eta_p(x)$  tales que

$$\begin{aligned} \eta_1(x+\omega) &= s \eta_1(x) \\ \eta_2(x+\omega) &= s[\eta_1(x) + \eta_2(x)] \\ \eta_3(x+\omega) &= s[\eta_2(x) + \eta_3(x)] \\ &\dots \dots \dots \\ \eta_p(x+\omega) &= s[\eta_{p-1}(x) + \eta_p(x)] \end{aligned}$$

de donde resulta análogamente la tendencia a cero de las soluciones al crecer  $x$  cuando  $|s| < 1$ .

**5. Invariencia y formación de la ecuación característica.**—El cálculo de factores característicos indicados en los §§ 2 y 3 se funda en el conocimiento de dos integrales particulares  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  de la ecuación. Ante todo conviene anticiparnos a una posible duda del lector. Si en lugar de partir de  $y_1$  e  $y_2$  hubiésemos partido de otras dos soluciones también *linealmente independientes*  $Y_1$  e  $Y_2$ , ¿habríamos obtenido factores característicos  $s$  distintos?

Obsérvese que la nueva ecuación en  $s$ , que sería de forma análoga a [6], § 2, expresaría como ésta una condición *necesaria y suficiente* exigida a

tales factores ; por tanto, toda solución de una de las ecuaciones características lo es de la otra, y viceversa, es decir, ambas son equivalentes, y como el coeficiente de  $s^2$  es la unidad resulta : *los coeficientes de la ecuación característica*

*$s^2 - (a_{11} + a_{22})s + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$  son independientes del par de solu-*

*ciones particulares de partida  $y_1, y_2$  (siempre y cuando se elijan éstas linealmente independientes entre sí, independencia esencial en el razonamiento).*

En particular, es fácil expresar el término independiente (producto de los factores característicos) mediante los coeficientes de la ecuación diferencial. Basta recordar la fórmula de Liouville según la cual (lec. 8.<sup>a</sup>, § 9) el wronskiano de todo sistema de soluciones independientes es

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x p_1(x) dx}$$

de donde resulta que al incrementar  $x$  en un período el wronskiano vendrá multiplicado por  $e^{-\int_{\omega} p_1(x) dx}$ , designando con  $\int_{\omega}$  la integral extendida en un período, pero por otra parte

$$W(x+\omega) = \begin{vmatrix} y_1(x+\omega) & y_2(x+\omega) \\ y_1'(x+\omega) & y_2'(x+\omega) \end{vmatrix}$$

y al sustituir  $y_1, y_2, y_1', y_2'$  por sus transformadas lineales obtenidas de [2] resulta

$$W(x+\omega) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

El factor por el que ha quedado multiplicado el wronskiano es, pues, también el módulo de la transformación lineal [2], de donde

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = e^{-\int_{\omega} p_1(x) dx} \quad [16]$$

Las soluciones  $y_1, y_2$  de que se suele partir (suponiendo  $p_1(x)$  sin singularidades en el origen  $x=0$ ) son las definidas por las condiciones iniciales

$$\left. \begin{array}{l} y_1(0)=1 \quad y_1'(0)=0 \\ y_2(0)=0 \quad y_2'(0)=1 \end{array} \right\} \quad [17]$$

que son linealmente independientes por ser  $W(0)=1$  (v. lec. 8.<sup>a</sup>).

Por sustitución de estos valores en las relaciones [2] y sus derivadas se obtiene fácilmente

$$\begin{array}{ll} y_1(\omega)=a_{11} & y_1'(\omega)=a_{12} \\ y_2(\omega)=a_{21} & y_2'(\omega)=a_{22} \end{array}$$

Por consiguiente la ecuación característica podrá escribirse:

$$s^2 - [y_1(\omega) + y'_2(\omega)]s + e^{-\int_0^{\omega} p_1(x) dx} = 0 \quad [18]$$

bastando, para formarla, efectuar la cuadratura indicada y calcular los valores de  $y_1(\omega)$  e  $y'_2(\omega)$  al término del primer período. En cuanto a dicho cálculo, hay que advertir que, en general, no es posible expresar las soluciones particulares indicadas como combinación de funciones elementales conocidas, ni siquiera mediante un número finito de cuadraturas efectuadas sobre dichas funciones. Será necesario tabular estas soluciones obteniendo sus valores por métodos aproximados, que serán descritos más adelante. (véase lección 20).

Ejemplo: En 1934 el inventor del autogiro, Sr. La Cierva, nos propuso el estudio de las soluciones de la ecuación

$$m \frac{d^2 \theta}{d\varphi^2} + \left( \frac{3}{4} + \lambda \operatorname{sen} \varphi \right) \frac{d\theta}{d\varphi} + \left( m + \lambda \cos \varphi + \frac{3}{4} \lambda^2 \operatorname{sen} 2\varphi \right) \theta = 0$$

que se le presentó al plantear las posibles oscilaciones de la pala, caracterizadas por la variación del ángulo  $\theta$  de desviación (altura o depresión) respecto de su posición de equilibrio dinámico durante el giro, en función del ángulo azimutal  $\varphi$  de la misma.  $\lambda$  es un parámetro dependiente de la velocidad de avance del autogiro y  $m$  es otro que depende de las dimensiones de la pala, de su densidad y de la del aire.

Con el propósito de aumentar la velocidad de avance del autogiro, interesaba al Sr. La Cierva tener asegurada la estabilidad del movimiento (comprobada experimentalmente para las velocidades de los autogiros hasta entonces construídos). Más concretamente, se trataba de estudiar si  $\theta$  tiende a cero al crecer  $\varphi$  cualesquiera que fueran las condiciones iniciales creadas por una perturbación accidental del movimiento (racha de viento, por ejemplo). Con tal objeto nos señaló para  $\lambda$  un valor límite  $\lambda=1$  y para  $m$  un valor medio  $m=0,5$  de tal suerte que consideraba la estabilidad técnicamente asegurada para los valores usuales de  $\lambda < 1$  y de  $m$  próximos a 0,5, en cuanto fuera asegurada matemáticamente para dichos valores.

Tenemos, pues, en este ejemplo, en el que  $\omega=2\pi$

$$\int_{\omega} p_1(x) dx = \int_0^{2\pi} \left( \frac{3}{4m} + \frac{\lambda}{m} \operatorname{sen} \varphi \right) d\varphi = \frac{3\pi}{2m}$$

que para el valor  $m=0,5$  vale  $3\pi$ . La ecuación característica es, pues, en este caso

$$s^2 - [\theta_1(2\pi) + \theta'_2(2\pi)]s + e^{-3\pi} = 0$$

como  $e^{-3\pi} \cong 0,000081$ , la pequeñez de este producto de factores característicos ya fue por sí sola un buen augurio. Las soluciones particulares  $\theta_1(x)$ ,  $\theta_2(x)$  correspondientes a las condiciones iniciales [17] se calcularon por los métodos numéricos aproximados de Runge, que se explicarán en la lección 20, y se obtuvieron al final del período los valores  $\theta_1(2\pi) = -0,01300$ ,  $\theta'_2(2\pi) = 0,04197$ , con lo que la ecuación característica  $s^2 - 0,02897s + 0,000081$  proporcionó los factores  $s_1 \cong 0,0256$ ,  $s_2 \cong 0,0032$  que aseguran una convergencia hacia cero sumamente rápida de las soluciones (a cada vuelta, reducción de las oscilaciones respectivas aproximadamente a 1/40 y 1/300).

**6. Ecuaciones de segundo orden sin la derivada primera.**— Si en la ecuación de 2.º orden [1] falta el término en la derivada primera se puede escribir

$$y'' + \varphi(x)y = 0 \quad (p_1 = 0 \quad p_2 = \varphi) \quad [19]$$

La ecuación [18] que da los factores característicos  $s_1, s_2$  se reduce a

$$s^2 - [y_1(\omega) + y'_2(\omega)]s + 1 = 0 \quad [20]$$

Ambos factores son recíprocos por ser su producto la unidad.

Es fácil expresar en este caso directamente los *exponentes característicos*  $\alpha$  que serán *opuestos*; pues de  $s_1 = e^{a\omega}$   $s_2 = e^{-a\omega}$  se desprende

$$[21] \quad s_1 + s_2 = y_1(\omega) + y'_2(\omega) = 2 \operatorname{Ch} a\omega, \quad \alpha = \frac{1}{\omega} \operatorname{Arg} \operatorname{Ch} \frac{1}{2} [y_1(\omega) + y'_2(\omega)] \quad [22]$$

que tiene doble signo.

Si  $s_1, s_2$  son reales iguales, valen 1. Existen entonces (§3, V) dos soluciones fundamentales  $\eta_1, \eta_2$  que verifican  $\eta_1(x+n\omega) = \eta_1(x)$ ,  $\eta_2(x+n\omega) = n\eta_1(x) + \eta_2(x)$ , lo que implica el crecimiento de  $\eta_2$  al crecer  $x$ . Si  $s_1, s_2$  son reales desiguales una raíz tiene módulo  $<1$  y otra  $>1$ , dando ésta lugar a una solución periódicamente creciente. En resumen: *Si la ecuación característica tiene raíces reales no queda asegurada la estabilidad.*

Si  $s_1, s_2$  son imaginarias lo son conjugadas de módulo 1 y dan lugar (§ 3, IV) a dos soluciones  $\varphi_1, \varphi_2$  fundamentales cuya suma pitagórica  $\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2} = M(x)$  es periódica, pues verifica (§ 3, fórmula [9])  $M(x+\omega) = M(x)$ , lo que implica la finitud de  $\varphi_1, \varphi_2$  al crecer  $x$  infinitamente y, por tanto, la finitud de todas las soluciones. Es decir: *Si la ecuación característica tiene raíces imaginarias queda asegurada la estabilidad* (en el sentido lato, ver § 3, III).

Como veremos más adelante siempre es posible transformar una ecuación [1] a la forma canónica reducida [19]. Basta para ello tomar como nueva función incógnita

$$v = y e^{\frac{1}{2} \int p_1 dx} \quad \text{De este cambio resulta} \quad y = v e^{-\frac{1}{2} \int p_1 dx};$$

$$y' = e^{-\frac{1}{2} \int p_1 dx} \left[ v - \frac{p_1}{2} v \right]; \quad y'' = e^{-\int p_1 dx} \left[ v'' - p_1 v' - \frac{p_1'}{2} v + \frac{p_1^2}{4} v \right]$$

$$\text{y sustituyendo en } y'' + p_1 y' + p_2 y = 0 \text{ queda } v'' + \left[ p_2 - \frac{p_1^2}{4} - \frac{p_1'}{2} \right] v = 0$$

EJEMPLO: Aplicando esta transformación a la ecuación de Lá Cierva se obtiene

$$v'' + \left[ 1 + \frac{\lambda}{2m} \cos \varphi + \frac{3}{4m} \lambda^2 \sin 2\varphi - \frac{1}{4m^2} \left( \frac{3}{4} + \lambda \sin \varphi \right)^2 \right] v = 0$$

siendo

$$\theta = v e^{-\frac{3\varphi}{8m} + \frac{\lambda \cos \varphi}{2m}}$$

Las soluciones finitas estables de la ecuación reducida en  $v$  darán, pues, soluciones de  $\theta$  periódicamente amortiguadas, por el factor decreciente  $e^{-\frac{3\varphi}{8m}}$ . En general, la condición de estabilidad será ahora que la parte aperiódica de  $\theta$  tienda a cero al crecer  $\varphi$  lo que da [21]  $v_1(2\pi) + v'_2(2\pi) < 2 \operatorname{Ch} \frac{6\pi}{8m}$ .

## Capítulo IV.—NOCIONES SOBRE PROBLEMAS DE CONTORNO

### LECCIÓN 13.—NOCIONES SOBRE LA FUNCIÓN DE GREEN

**1. Condiciones iniciales y condiciones de contorno.**—El teorema de existencia de la integral de una ecuación diferencial  $y^{(n)}=f(x, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$  de orden  $n$  establece (bajo conocidas condiciones) la existencia y unicidad de la solución, dados los valores de la función  $y$  y de sus  $n-1$  primeras derivadas  $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$  para un valor de la variable  $x=a$  inicial. Verificadas las condiciones de existencia, el problema de hallar la integral particular, dadas tales condiciones iniciales, es un problema determinado.

Así, por ejemplo, la determinación de la integral particular de una ecuación diferencial lineal de segundo orden (en un dominio en el que suponemos continuas las funciones  $a_0, a_1, a_2, \varphi$  y además  $a_0(x) \neq 0$ )

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = \varphi(x) \quad [1]$$

correspondiente a los valores particulares  $y(a), y'(a)$  para  $x=a$ , una vez hallada la integral general de la forma

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \eta(x) \quad [2]$$

( $y_1, y_2$  soluciones particulares de la ecuación incompleta, linealmente independientes;  $\eta(x)$  solución particular de la completa) se reduce a resolver el sistema lineal en  $C_1, C_2$

$$\begin{aligned} y(a) &= C_1 y_1(a) + C_2 y_2(a) + \eta(a) \\ y'(a) &= C_1 y_1'(a) + C_2 y_2'(a) + \eta'(a) \end{aligned}$$

el cual tiene solución única y determinada por ser el determinante wronskiano  $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$  para todo valor de  $x$ .

Pero si en lugar de dar los valores  $y(a), y'(a)$  correspondientes a un mismo punto, damos valores la función  $y$  en los extremos  $a$  y  $b$  de un intervalo, el sistema que habrá que resolver será

$$\begin{aligned} y(a) &= C_1 y_1(a) + C_2 y_2(a) + \eta(a) \\ y(b) &= C_1 y_1(b) + C_2 y_2(b) + \eta(b) \end{aligned}$$

el cual puede ser incompatible o indeterminado si  $\begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix} = 0$

y circunstancias análogas pueden presentarse si se dan los valores de  $y'$  en dichos extremos o el valor de  $y$  en uno de ellos y el de  $y'$  en el otro, o si se dan en general dos relaciones lineales entre los valores  $y(a)$ ,  $y'(a)$ ,  $y(b)$ ,  $y'(b)$ .

Estos casos constituyen los llamados problemas con condiciones de contorno o, abreviadamente, *problemas de contorno*. Se llaman así porque los puntos  $a$  y  $b$  suelen ser los extremos del intervalo en el que se estudia la función incógnita, en las aplicaciones de tales problemas.

Un problema clásico de contorno, aunque no lineal, es el de la curva plana (catenaria) que pasa por dos puntos dados y engendra una superficie de revolución de área mínima al girar alrededor de un eje dado de su plano. Cuando los puntos están a distinta distancia del eje, la determinación de las constantes de integración es problema más difícil que la integración misma. Problemas de este tipo son característicos del *cálculo de variaciones*, del que daremos idea más adelante.

La técnica proporciona abundantes cuestiones que conducen a problemas de condiciones iniciales y de condiciones de contorno. Los movimientos de puntos materiales o sistemas mecánicos, los regímenes de corriente en circuitos eléctricos de corta extensión, etc., se suelen individualizar dando condiciones iniciales. Los problemas sobre resistencia y deformación de vigas y otros cuerpos elásticos, los problemas sobre transmisión de calor, así como los de transmisión de energía y de señales en líneas eléctricas de gran longitud, etc., conducen a problemas de contorno, es decir, de condiciones en los extremos (apoyos de la viga, paredes del horno, extremos de la línea en corto, en vacío, etc.)

En esta lección y en la siguiente vamos a dar idea breve del tratamiento matemático de los problemas de contorno en ecuaciones lineales.

**2. Solución de un problema de contorno mediante dos integrales particulares de la ecuación homogénea.**—Supongamos para fijar las ideas que se trata de resolver el siguiente problema de contorno, en el que supondremos continuas las funciones  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  y  $\varphi$  en  $[ab]$ , y además  $a_0 \neq 0$ .

$$\text{Ecuación:} \quad a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = \varphi(x) \quad [1]$$

$$\text{Condiciones:} \quad y(a) = A \quad y(b) = B \quad [2]$$

Este problema suele llamarse de *primer género* como todos aquellos en los que se dan valores de la función buscada en los extremos; mientras reciben el nombre de *problemas de segundo género* aquellos en los que se dan los valores de la derivada, y de *tercero* los que consisten en dar relaciones lineales mixtas entre los valores de la función y su derivada en dichos extremos.

Supongamos conocidas dos soluciones particulares linealmente independientes  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  de la ecuación homogénea  $a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0$  y, por tanto, su integral general  $C_1y_1 + C_2y_2$ . Por el método de la variación de las constantes podemos (Lecc. 8) obtener la integral general de [1]. El sistema que da  $C'_1(x)$ ,  $C'_2(x)$  es

$$\begin{aligned} C'_1y_1 + C'_2y_2 &= 0 \\ C'_1y'_1 + C'_2y'_2 &= \varphi(x) : a_0 \end{aligned} \quad [3]$$



Designando por  $W(x)$  el wronskiano  $y_1 y_2' - y_2 y_1'$  será

$$C_1' = - \frac{y_2 \varphi(x)}{a_0(x) W(x)} \quad C_2' = \frac{y_1 \varphi(x)}{a_0(x) W(x)}$$

y podemos tomar las dos primitivas

$$C_1 = - \int_a^x \frac{y_2 \varphi}{a_0 W} dx \quad C_2 = + \int_a^x \frac{y_1 \varphi}{a_0 W} dx$$

con lo que la integral general de [1] será ( $K_1$  y  $K_2$  constantes arbitrarias)

$$y = K_1 y_1 + K_2 y_2 + y_2 \int_a^x \frac{y_1 \varphi}{a_0 W} dx - y_1 \int_a^x \frac{y_2 \varphi}{a_0 W} dx \quad [4]$$

Para hallar una solución que satisfaga las condiciones de contorno [2] habrá que resolver el sistema en  $K_1, K_2$

$$\left. \begin{aligned} K_1 y_1(a) + K_2 y_2(a) &= A \\ K_1 y_1(b) + K_2 y_2(b) + \int_a^b \frac{\varphi}{a_0 W} [y_2(b) y_1(x) - y_1(b) y_2(x)] dx &= B \end{aligned} \right\} \quad [5]$$

Se observa que :

I. Si el determinante del sistema  $\delta = y_1(a)y_2(b) - y_1(b)y_2(a)$  es distinto de cero, el problema planteado tiene solución única. En particular el problema

$$\left. \begin{aligned} a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y &= 0 \\ y(a) = 0, \quad y(b) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [6]$$

llamado *problema homogéneo*, que resulta de suponer en [1] y [2]  $A=B=0$ ,  $\varphi(x) \equiv 0$  tiene la *solución única trivial*  $y=0$ .

II. Si por el contrario  $\delta=0$  el problema de contorno [1] y [2] carece en general de solución (\*) mientras el problema homogéneo [6] y [7] tiene infinitas soluciones distintas de la solución trivial.

Este hecho constituye la propiedad llamada *alternativa* análoga a la de los sistemas algebraicos lineales, de la que es consecuencia.

En esta lección consideraremos solamente el caso primero. Ejemplos del segundo caso serán tratados en la lección siguiente.

**3. Expresión de la solución mediante una integral definida. Función de Green.**—Elijamos como soluciones linealmente independientes  $y_1, y_2$  de la ecuación homogénea dos funciones que se anulen cada una en un extremo del intervalo  $[a, b]$ , por ejemplo  $y_1(a)=0, y_2(b)=0$ . En esta hipótesis el sistema [5] da

$$K_2 = \frac{A}{y_2(a)} \quad K_1 = \frac{B}{y_1(b)} + \int_a^b \frac{y_2 \varphi}{a_0 W} dx$$

(\*) A menos de que el sistema [5] resultara indeterminado.

y sustituyendo en [4] la integral particular buscada podrá escribirse

$$y = y_2 \int_a^x \frac{y_1 \varphi}{a_0 W} dx + y_1 \int_x^b \frac{y_2 \varphi}{a_0 W} dx + A \frac{y_2(x)}{y_2(a)} + B \frac{y_1(x)}{y_1(b)}$$

Las dos integrales pueden englobarse en una sola considerando la función  $G(x, \xi)$  que tenga por expresión

$$G(x, \xi) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{y_2(x) y_1(\xi)}{a_0(\xi) W(\xi)} & \text{para } a \leq \xi \leq x \\ \frac{y_1(x) y_2(\xi)}{a_0(\xi) W(\xi)} & \text{para } x \leq \xi \leq b \end{array} \right\} \quad [8]$$

con lo que la solución será :

$$y = \int_a^b G(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi + A \frac{y_2(x)}{y_2(a)} + B \frac{y_1(x)}{y_1(b)} \quad [9]$$

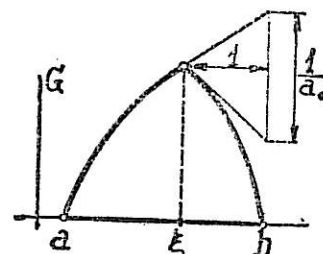
En particular, si  $A=B=0$  pero  $\varphi \neq 0$  el problema de contorno correspondiente

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = \varphi \quad [10]$$

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0 \quad [11]$$

tiene la solución

$$y = \int_a^b G(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi$$



La función  $G(x, \xi)$  así construída se denomina *función de Green* relativa al problema de contorno considerado y tiene las siguientes propiedades :

1.ª  $G(x, \xi)$  es una función de  $x$  que cumple las condiciones de contorno [7] y la ecuación diferencial [6] del problema homogéneo en todo el intervalo  $[a, b]$ , excepto para  $x = \xi$ .

2.ª Para  $x = \xi$  ambas determinaciones de  $G$  dadas en [8] coinciden, pero no así sus derivadas respecto de  $x$ , cuya diferencia vale

$$\frac{y_1(\xi) y_2'(\xi) - y_1'(\xi) y_2(\xi)}{a_0(\xi) W(\xi)} = \frac{1}{a_0(\xi)} \quad [12]$$

La función de Green es, pues, una función continua de derivada discontinua a lo largo de  $x = \xi$ .

Es interesante observar que estas dos propiedades bastan en general para individualizar la función de Green, aun en el caso en que las condiciones en los extremos sean del tipo lineal homogéneo

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) + \alpha_3 y(b) + \alpha_4 y'(b) = 0 \\ \beta_1 y(a) + \beta_2 y'(a) + \beta_3 y(b) + \beta_4 y'(b) = 0 \end{array} \right\} \quad [13]$$

Elegido  $\xi$  entre  $a$  y  $b$ , el cumplimiento de la ecuación diferencial impone a ambas determinaciones de la función  $G(x, \xi)$  las formas  $c_1 y_1 + c_2 y_2$  y  $k_1 y_1' + k_2 y_2'$ . El cum-

plimiento de las condiciones de contorno impone dos relaciones lineales homogéneas entre  $c_1, c_2, k_1, k_2$ . La igualdad de valores de las  $G$  para  $x=\xi$  da una nueva relación lineal, y finalmente, el valor 1:  $a_0(\xi)$  de la diferencia de las derivadas en el punto  $x=\xi$  da la cuarta condición para determinar  $c_1, c_2, k_1, k_2$ .

**4. Tipo canónico sin derivada primera.**— Toda ecuación lineal de segundo orden [1] puede transformarse en otra análoga sin término en la derivada primera. Basta para ello poner  $y=uv$  determinando convenientemente la función  $u$  para que se anule el coeficiente de  $v'$ . Se obtiene así:

$$a_2 y = a_2 u v, \quad a_1 y' = a_1 u v' + a_1 u' v, \quad a_0 y'' = a_0 u v'' + 2a_0 u' v' + a_0 u'' v$$

al sumar, la anulación del término en  $v'$ , da

$$2a_0 u' + a_1 u = 0$$

de donde

$$u = e^{-\frac{1}{2} \int \frac{a_1}{a_0} dx}$$

y la ecuación en  $v$  resultante es

$$a_0 u v'' + (a_0 u'' + a_1 u' + a_2 u) v = \varphi$$

Dividiendo por  $a_0 u$  quedará en la forma

$$v'' + r(x)v = \psi(x) \quad \text{siendo} \quad \psi(x) = \frac{\varphi(x)}{a_0(x)} e^{\frac{1}{2} \int \frac{a_1}{a_0} dx}$$

Se observa que:

1.º  $\psi$  se anula sólo idénticamente si se anula  $\varphi$ .

2.º  $v = y e^{\frac{1}{2} \int \frac{a_1}{a_0} dx}$  sólo se anula para los valores que anulan  $y$ .

De aquí resulta: A un problema de contorno no homogéneo u homogéneo de los tipos [1] [2] ó [6] [7] corresponde un problema de análoga naturaleza en  $v$ . En resumen, podemos sin mengua de generalidad, referir el estudio de los problemas de contorno a las ecuaciones lineales sin término en  $y'$ , llamadas de *tipo canónico*; sea, pues, el problema

$$y'' + r(x)y = \psi(x) \quad [14]$$

$$y(a) = A, \quad y(b) = B \quad [15]$$

La anulación del coeficiente de  $y'$  lleva como consecuencia (lec. 8, § 9) la constancia del wronskiano que puede sustituirse por su valor en el punto  $a$ , de modo que (tomando siempre  $y_1, y_2$  tales que  $y_1(a)=0, y_2(b)=0$ )

$$W(x) = W(a) = y_1(a)y_2'(a) - y_2(a)y_1'(a) = -y_2(a)y_1'(a)$$

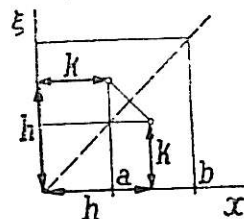
y si además multiplicamos las integrales particulares  $y_1, y_2$  por factores convenientes para que este wronskiano valga 1, la función de Green, relativa a este problema, podrá escribirse:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} y_1(x) y_2(\xi) & \text{para } x \leq \xi \\ y_2(x) y_1(\xi) & \text{para } x \geq \xi \end{cases} \quad [16]$$

**5. Simetría de la función de Green.**—Se observa que la función de Green [16], correspondiente al tipo canónico [14], es simétrica; es decir, que

$$G(x, \xi) = G(\xi, x) \quad [17]$$

¿Ocurrirá lo mismo con la obtenida en el § 3 para el problema de contorno primer género en el caso general? Para ello es preciso que el valor de la función  $G(h, k)$  en su primera expresión [8], para dos valores  $h > k$  del intervalo  $[a, b]$ , coincida con el valor de la expresión segunda  $G(k, h)$ ,  $k < h$  y, por tanto, que sea



$$a_0(k)W(k) = a_0(h)W(h)$$

Debiendo verificarse esta condición para todo par de valores  $h, k$  del intervalo  $[a, b]$ , esto equivale a la condición

$$a_0(x)W(x) = \text{constante} \quad \text{o sea} \quad a_0 e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx} = \text{constante} \quad [18]$$

(recuérdese la fórmula de Liouville) y tomando la derivada logarítmica de ambos miembros

$$\frac{a'_0}{a_0} - \frac{a_1}{a_0} = 0 \quad \text{es decir} \quad a_1 = a'_0 \quad [19]$$

Recíprocamente, el cumplimiento de esta condición implica el cumplimiento de la [18] y, por tanto, la simetría de la función de Green para el problema de primer género. Y lo mismo se prueba para los problemas de segundo género.

Para condiciones de contorno de la forma general [13] la simetría de la función de Green exige, además de [19], que los coeficientes  $\alpha, \beta$  de las condiciones de contorno [13] verifiquen la condición (\*)

$$a_0(b)[\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1] = a_0(a)(\alpha_3\beta_4 - \alpha_4\beta_3)$$

Obsérvese que en el problema de primer género los únicos coeficientes nulos son  $\alpha_1\beta_3$  y en el segundo son  $\alpha_2\beta_4$  de modo que esta condición se cumple en ambos casos.

También se cumple en los casos prácticos frecuentes:

$$\alpha_3 = \alpha_4 = \beta_1 = \beta_2 = 0 \quad (\text{problemas de tercer género})$$

$$\alpha_1 = \alpha_3, \quad \alpha_2 = \alpha_4, \quad \beta_2 = \beta_4, \quad \beta_1 = \beta_3 = 0 \quad (\text{condición de periodicidad})$$

Se puede afirmar que en la generalidad de los problemas de contorno que interesan al técnico y al físico-matemático la función de Green es simétrica o puede transformarse la ecuación de modo que lo sea, como hemos visto en el párrafo anterior. Se puede conseguir lo mismo sin cambiar la función incógnita, como se explica en el § siguiente.

(\*) V. FRANK-MISES: «Die Differential und Integralgleichungen der Physik», Capítulo XIII, § 2.

**6. Otra forma canónica de la ecuación lineal de segundo grado.**— Si los coeficientes  $a_0, a_1$  de la ecuación

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = \varphi(x) \quad [1]$$

verifican la condición [19]  $a_1 = a'_0$  los dos primeros términos del primer miembro constituyen la derivada de  $a_0 y'$  y la ecuación puede escribirse en la forma

$$\frac{d}{dx}(a_0 y') + a_2 y = \varphi(x)$$

Si la ecuación dada no cumple la referida condición es fácil introducir un factor  $r(x) \neq 0$  conveniente para que la cumpla, pues bastará que verifique

$$(ra_0)' = ra_1 \quad \text{o sea} \quad r'a_0 = r(a_1 - a'_0)$$

de donde resulta

$$\frac{r'}{r} = \frac{a_1}{a_0} - \frac{a'_0}{a_0} \quad r = e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx} : a_0$$

Y llamando  $ra_0 = p(x)$ ,  $ra_2 = q(x)$ ,  $r\varphi = \psi(x)$  la ecuación propuesta [1] podrá siempre ponerse en la forma

$$p(x)y'' + p'(x)y' + q(x)y = \psi(x) \quad \text{o bien} \quad \frac{d}{dx}(py') + qy = \psi(x)$$

que se suele escribir abreviadamente

$$\boxed{L[y] = \psi(x)}$$

Obsérvese que el wronskiano de dos soluciones particulares independientes en toda ecuación canónica homogénea de la forma  $L[y] = 0$  tiene una expresión muy sencilla, pues será de la forma [18]

$$W(x) = \frac{k}{p(x)} \quad (k \text{ constante})$$

**7. Ecuaciones adjuntas. Ecuación autoadjunta.**— Otra propiedad interesante de las ecuaciones de la forma  $L[y] = 0$  es la que sigue: Propongámonos hallar un factor  $\mu(x)$  tal que convierta el primer miembro de

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad [1]$$

en otro  $\mu a_0 y'' + \mu a_1 y' + \mu a_2 y$  que sea derivada de una expresión de primer orden  $\frac{d}{dx}(b_0 y' + b_1 y)$ .

$$b_0 = \mu a_0 \quad b'_0 + b_1 = \mu a_1 \quad b'_1 = \mu a_2$$

y eliminando por derivación  $b_0, b_1, b'_1$  resulta

$$b''_0 + b'_1 = \mu' a_1 + \mu a'_1 \quad \text{y también} \quad = \underbrace{\mu a''_0 + 2\mu' a'_0 + a_0 \mu''}_{b''_0} + \underbrace{\mu a_2}_{b'_1}$$

La ecuación diferencial a que tiene que satisfacer el factor integrante  $\mu$  es, pues,

$$a_0 \mu'' + (2a'_0 - a_1) \mu' + (a''_0 - a'_1 + a_2) \mu = 0 \quad [2]$$

que se llama *adjunta* de la [1]. La relación es recíproca, es decir, formando la adjunta de la [2] se obtiene la [1], como fácilmente comprobará el lector.

¿Cuál es la condición para que dos ecuaciones adjuntas [1] y [2] coincidan? Se deberá tener

$$2a'_0 - a_1 = a_1 \qquad a''_0 - a'_1 + a_2 = a_2$$

relaciones que se verifican solamente cuando  $a_1 = a'_0$ ; es decir, sólo para las ecuaciones de la forma  $L[y] = 0$ , que se llaman por esta razón ecuaciones *autoadjuntas*, y con el mismo calificativo se designa el operador  $L$ .

Los operadores autoadjuntos  $L$ , que son lineales como todos los primeros miembros de las ecuaciones lineales, tienen una notable propiedad cuyo parentesco con la fórmula de Green de la teoría de campos (tomio I, lección 28) observará en seguida el lector. Multiplicando los resultados  $L[y_1]$ ,  $L[y_2]$  de aplicar un mismo operador  $L$  a dos funciones  $y_1$ ,  $y_2$ , por dichas funciones permutadas y restando los resultados, se obtiene

$$y_1 L[y_2] - y_2 L[y_1] = y_1 \frac{d}{dx} (py'_2) - y_2 \frac{d}{dx} (py'_1) = \frac{d}{dx} [p(y_1 y'_2 - y_2 y'_1)] = \frac{d}{dx} [pW(y_1, y_2)]$$

siendo  $W$  el wronskiano de  $y_1$ ,  $y_2$ . Si estas funciones son soluciones de la ecuación homogénea  $L[y] = 0$ , claro es que el primer miembro es nulo y, por tanto, también el segundo, con lo que obtenemos nuevamente  $pW = \text{const.}^\circ$  (V. § 6).

### EJERCICIOS

1. A la ecuación de la elástica  $EIy'' = M(x)$  corresponde una homogénea  $y'' = 0$  que admite soluciones lineales  $y = ax + b$ . Para una viga apoyada en sus extremos  $x = 0$ ,  $x = l$ , las soluciones más sencillas que se anulan en ellos son  $y_1(x) \equiv x$ ,  $y_2(x) \equiv x - l$ , cuyo wronskiano vale  $l$ . Resulta, pues, muy sencillo construir la función de Green correspondiente a los problemas de contorno a que conduce el estudio de una viga apoyada en los extremos. Aplíquese al caso de una viga con carga uniforme a lo largo de su longitud, hallando la ecuación de la elástica.

2. Idem para el caso de una viga con carga creciente proporcionalmente a la distancia a un extremo.

3. Idem para una viga con carga uniforme empotrada en un extremo y apoyada en el otro. (Se añade la incógnita de la reacción en el apoyo, pero se dispone de una condición más de contorno, la anulación de la derivada en el empotramiento.)

4. Idem para una viga empotrada en los dos extremos.

5. Demostrar que la función de Green hallada en el ejercicio 1.º representa, en sus dos modalidades, el momento flector creado en el punto  $x$  por una carga unidad situada en el punto  $\xi$ , y viceversa.

6. Resolver el problema de contorno  $y'' + 4y = e^x$ ;  $y(0) = 1$ ;  $y(\pi/4) = -1$ .

7. Idem  $y'' - y' - 2y = x$  con  $y(0) = 0$  y  $y(1) = 1$ .

8. Reducir a la forma canónica sin derivada primera la ecuación

$$y'' - \frac{2x+1}{x} y' + \frac{x^2+x-8}{x^2} y = 0,$$

e integrarla por integración de la transformada.

9. Escribir en la forma canónica del § 6 la ecuación  $(1-x^2)y'' + xy' - y = \sqrt{1-x^2}$ .

10. Hallar un factor que convierta el primer miembro de  $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 20$  en la derivada exacta de una expresión lineal de primer orden. Integrar la ecuación mediante este recurso.



## LECCIÓN 14.—PROBLEMAS DE CONTORNO CON VALORES Y FUNCIONES PROPIOS

En la lección anterior hemos estudiado ciertos problemas de contorno en casos en que las condiciones impuestas a la solución en los extremos de un intervalo  $[a, b]$  bastaban para individualizarla. Se trataba de problemas lineales no homogéneos de carácter determinado, a los que correspondía asimismo una solución única del problema homogéneo correspondiente: *la solución idénticamente nula* (v. § 2, propiedad alternativa).

En esta lección vamos a estudiar ciertos casos excepcionales, también de mucho interés en las aplicaciones, de problemas *homogéneos* de contorno que admiten *soluciones distintas de la idénticamente nula*. Empezaremos con algunos ejemplos sencillos.

1. **Pandeo de una viga.**—Sea, por ejemplo, el caso de una vigueta rectilínea esbelta (es decir, de pequeña sección), cuyo peso supondremos despreciable, sometida a dos fuerzas de compresión iguales y contrarias,



en la dirección de su eje. ¿Qué deformaciones puede presentar? Teóricamente ninguna, puesto que ambas fuerzas se equilibran, pero prácticamente se observa que al llegar a un cierto límite la vigueta puede deformarse peligrosamente. Este fenómeno, llamado de *pandeo*, se debe, como intuitivamente se comprende, a la inestabilidad del equilibrio elástico y, en consecuencia, a la pérdida de dicho equilibrio por efecto de pequeñas deformaciones iniciales de la viga, excentricidades de las fuerzas, etc. El planteamiento riguroso del problema nos llevaría demasiado lejos, por lo que nos contentaremos con una formulación un tanto grosera, pero rápida, del fenómeno, partiendo del supuesto de la viga ya deformada, por una u otra causa que no entramos en analizar.

La ecuación de la elástica obtenida en la lección 7.<sup>a</sup> se convierte aquí en

$$y'' = -\frac{Py}{EI} \quad \text{es decir} \quad y'' + k^2 y = 0$$

con  $k^2 = P/EI$ . El signo  $-$  traduce la naturaleza de la concavidad, o sea el hecho físico de ser  $y$  e  $y''$  de signos contrarios. La ecuación obtenida tiene la integral general

$$y = C_1 \cos kx + C_2 \operatorname{sen} kx$$

pero llamando  $l$  la distancia entre los extremos, las condiciones técnicas

para determinar la integral particular que da la elástica son las de contorno  $y(0)=0$ ;  $y(l)=0$ , es decir

$$C_1=0, \quad C_1 \cos kl + C_2 \sin kl=0 \quad \text{o sea} \quad C_2 \sin kl=0$$

que se satisface para  $C_2=0$  correspondiente a la solución trivial  $y=0$ , y también para  $\sin kl=0$  es decir  $k = \pm \frac{\pi}{l}, \pm 2 \frac{\pi}{l}, \pm 3 \frac{\pi}{l}, \dots, \pm n \frac{\pi}{l}, \dots$

Por consiguiente, si la constante  $k$  tiene alguno de estos valores existe, además de la solución trivial  $y=0$ , infinitas soluciones sinusoidales  $y=C_2 \sin kl$  de amplitud  $C_2$  arbitraria. La consecuencia teórica sería pues la posibilidad de una deformación de magnitud ilimitada en cuanto exista entre la longitud el momento de inercia y la carga una relación del tipo

$$k^2 = \frac{P}{EI} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \quad \text{o sea} \quad P = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} EI$$

La menor de estas cargas  $\pi^2 EI : l^2$  se llama *carga crítica*, y, aun cuando la consecuencia expuesta no puede ser tomada al pie de la letra, por el conjunto de convenios que implica el planteamiento (ecuación simplificada de la elástica, constancia de  $l$ , etc.) es lo cierto que este valor marca un límite prudente de la carga, confirmado tanto por la experiencia como por estudios más finos de la cuestión (\*).

**2. Noción de valor y función propios.**—Generalizando el resultado anterior podemos decir: Todo problema de contorno dado por el sistema de condiciones

$$\left. \begin{array}{l} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0 \quad y(l) = 0 \end{array} \right\} \quad [1]$$

admite soluciones distintas de la solución trivial  $y=0$ , solamente para los valores de  $\lambda$  siguientes

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{l^2}, \quad \lambda_2 = 2^2 \frac{\pi^2}{l^2}, \quad \lambda_3 = 3^2 \frac{\pi^2}{l^2}, \quad \dots, \quad \lambda_n = n^2 \frac{\pi^2}{l^2}; \dots \quad [2]$$

Estos valores del parámetro  $\lambda$  de la ecuación, para los cuales el sistema planteado tiene soluciones distintas de la idénticamente nula, se llaman *valores propios* o *autovalores* del problema. A cada autovalor  $\lambda_n$  co-

(\*) Este valor de la carga crítica fué hallado ya por Euler (S. XVIII). Para un estudio más profundo del pandeo pueden consultarse obras especiales de Resistencia y Elasticidad (Timoschenko, Biezeno, etc.).

responden soluciones de la forma  $y=C \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n} x$ . Prescindiendo de la constante arbitraria  $C$  de que van afectadas las soluciones

$$\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_1} x) \quad \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_2} x) \quad \dots \quad \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n} x) \quad \dots \quad [31]$$


se llaman *funciones propias* o *autofunciones* del problema en cuestión.


Si en lugar de dar las condiciones de contorno [1] imponemos la anulación de la derivada en los extremos

$$y'(0)=0 \quad y'(l)=0 \quad (\text{problema de contorno de segundo género})$$

se obtiene, introduciéndolas en la expresión de la integral general

$$C_2=0 \quad - C_1 \sqrt{\lambda} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} x=0$$

que dan los mismos valores propios [2] y soluciones de la forma  $C \cos \sqrt{\lambda_n} x$  es decir la sucesión de funciones propias

$$\cos(\sqrt{\lambda_1} x) \quad \cos(\sqrt{\lambda_2} x) \quad \dots \quad \cos(\sqrt{\lambda_n} x) \quad \dots$$


En cambio, si imponemos la anulación de la función en un extremo y la de la derivada en el otro  $y(0)=0, y'(l)=0$  o bien  $y'(0)=0, y(l)=0$  se obtiene la sucesión de autovalores  $\lambda_n=(2n-1)^2 \pi^2 : 4l^2$  y soluciones de la forma respectiva  $C \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n} x$  o  $C_1 \cos \sqrt{\lambda_n} x$  (\*).

Finalmente, sin variar la ecuación, impongamos en cada extremo el cumplimiento de determinadas relaciones lineales homogéneas en la función y la derivada

$$\left. \begin{aligned} ay(0)+by'(0) &= 0 \\ \alpha y(l)+\beta y'(l) &= 0 \end{aligned} \right\} (\text{problema de contorno de tercer género})$$

Introduciendo estas condiciones en la integral general, resulta

$$aC_1 + b\sqrt{\lambda} C_2 = 0$$

$$\alpha [C_1 \cos \sqrt{\lambda} l + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} l] + \beta [-C_1 \sqrt{\lambda} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} l + C_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} l] = 0$$

El cumplimiento de estas condiciones para valores de  $C_1, C_2$  no nulos (solución trivial) implica

$$\frac{\alpha \cos \sqrt{\lambda} l - \beta \sqrt{\lambda} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} l}{a} = \frac{\alpha \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} l + \beta \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} l}{b \sqrt{\lambda}}$$

(\*) Las condiciones  $y(0)=0, y(l)=0$  son análogas, como veremos más adelante, a las que resuelven el problema de la cuerda vibrante de extremos fijos, mientras las condiciones  $y'(x)=0, y'(l)=0$  son análogas a las que dan las vibraciones de un tubo sonoro *abierto*, y las  $y'(0)=0, y(l)=0$  corresponden a las de un tubo *cerrado*. Las condiciones  $y(0)=0, y'(0)=0$ , o bien  $y(l)=0, y'(l)=0$  determinan unívocamente la solución y no dan lugar a autovalores, son condiciones llamadas *iniciales*, de las consideradas en el teorema de existencia (Cauchy).

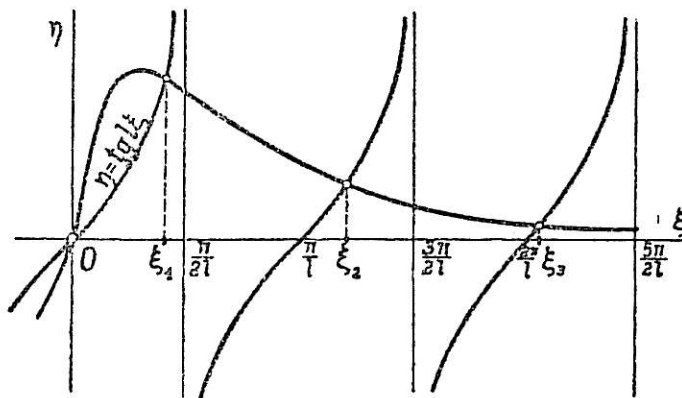
de donde

$$\operatorname{tg} \sqrt{\lambda} l = \frac{(\alpha b - a \beta) \sqrt{\lambda}}{a \alpha + b \beta \lambda}$$

Los valores de  $\sqrt{\lambda} = \xi$  que dan ahora los valores y funciones propios son las soluciones de la ecuación trascendente (en la que  $k = \alpha b - a \beta$ ,  $\gamma = b \beta$ ,  $\delta = a \alpha$ )

$$\operatorname{tg} l \xi = \frac{k \xi}{\gamma \xi^2 + \delta}$$

cuyas raíces son las abscisas de los puntos de intersección de las curvas  $\eta = \operatorname{tg} l \xi$  (tangente),  $\eta = k \xi : (\gamma \xi^2 + \delta)$  (cúbica). Obsérvese que para grandes valores de  $n$ , los valores de  $\lambda_n = \xi_n^2$  tienden a aproximarse a los  $(n-1)^2 \pi^2 : l^2$  obtenidos en el caso [1].



En los ejemplos expuestos hasta ahora se verifica, pues :

I. La sucesión de autovalores es indefinida, y ordenados éstos de menor a mayor  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n < \dots$  podemos hallar términos  $\lambda_n$  tan grandes como se quiera.

II. Los autovalores son positivos. Es inútil buscarlos negativos, pues la ecuación  $y'' - \lambda y = 0$  sólo tendría soluciones de tipo aperiódico  $y = C_1 e^{\sqrt{\lambda} x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda} x}$  que no se podrían anular en los dos puntos 0,  $l$ , más que para  $C_1 = C_2 = 0$ , es decir, para la solución trivial  $y = 0$ .

III. Cada función propia nula para  $x = 0$  tiene en el intervalo considerado  $(0, l)$  (extremos excluidos) tantos ceros como indica el orden del autovalor en la sucesión, menos uno. Es decir, la función propia correspondiente al valor propio  $\lambda_n$  tiene  $n - 1$  ceros. En seguida veremos la ampliación de estas propiedades a problemas más generales.

**3. Indicaciones sobre la teoría general de autovalores.**— Como se verá en la teoría de ecuaciones en derivadas parciales, gran parte de los problemas de la Física matemática (tratados por el método llamado de separación de variables) conducen a ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden de la forma

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = -\lambda y \tag{1}$$

en la que  $a_0, a_1, a_2$  son constantes o funciones continuas en un intervalo  $[a, b]$ , en cuyo interior supondremos  $a_0 \neq 0$ , mientras  $\lambda$  es un *parámetro indeterminado* introducido en el proceso de cálculo. Las soluciones buscadas deben, en general, satisfacer, en los extremos del intervalo, a condi-

ciones de los tipos indicados en los ejemplos; especialmente frecuentes son :

$$\left. \begin{array}{l} y(a) = 0 \\ y(b) = 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} y'(a) = 0 \\ y'(b) = 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} y(a) = 0 \\ y(b) = 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} y'(a) = 0 \\ y'(b) = 0 \end{array} \right\} \quad [2]$$

$$\text{y algunas veces también (*)} \quad y(a) = y(b) \quad y'(a) = y'(b) \quad [3]$$

Interesa al físico averiguar, en tales casos, si, aparte de la solución trivial  $y=0$ , existen otras soluciones no nulas, dando valores convenientes al parámetro indeterminado  $\lambda$ . La contestación es afirmativa en la mayor parte de los problemas físicos aludidos. Sin entrar en el estudio a fondo de las condiciones de existencia ni en la demostración de la misma, lo que nos llevaría a desarrollos excesivamente prolijos para la finalidad perseguida en esta lección (\*\*), nos limitaremos a dejar consignados los resultados más importantes y el carácter fundamental de las soluciones propias.

Supondremos efectuada en la ecuación [1] la transformación de coeficientes que reducen el primer miembro a la forma canónica  $L[y]$ . Como vimos en la lección anterior (§ 6) basta multiplicar la ecuación por el factor

$r = e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx} \cdot a_0$  y resulta la ecuación llamada de *Sturm-Liouville*

$$\frac{d}{dx}(py') + (q + \lambda r)y = 0 \quad \text{abreviadamente} \quad L[y] + \lambda ry = 0 \quad [4]$$

siendo

$$p = ra_0 = e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx}, \quad q = ra_2, \quad L[y] \equiv \frac{d}{dx}(py') + qy$$

La expresión de  $p$  indica que es  $>0$ ; en particular, si la ecuación [1] es de coeficientes constantes  $p$  es de la forma  $e^{kx}$ .

Como hemos supuesto  $a_0(x)$  continuo y distinto de cero en todo el interior de  $[a, b]$  podemos afirmar que en este intervalo tiene signo fijo que supondremos positivo (basta cambiar de signos toda la ecuación en caso contrario) y por tanto será positivo, en dicho intervalo, el coeficiente  $r = p : a_0$ .

Consideremos, paralelamente al problema de contorno dado [4], [2], el que resulta de la ecuación  $L[y]=0$  con iguales condiciones de contorno, y construyamos la función de Green correspondiente.

Pues bien, en estas condiciones, para todo problema de contorno al que corresponda una función de Green *simétrica* (como ocurre en los casos indicados y en los más generales expuestos en la lección anterior, § 5) existe una infinidad numerable de *valores propios*  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$  que no es acotada; es decir, dado un número  $N$  cualquiera, siempre pueden hallarse

(\*) Condición de periodicidad de la solución (como es fácil comprobar) si a su vez los coeficientes  $a_0, a_1, a_2$  son constantes o periódicos de periodo  $b-a$ .

(\*\*) V., por ejemplo, *Bieberbach*, «Differentialgleichungen»; *Frank-Mises* «Differential und Integralgleichungen der Physik»; *Courant-Hilbert*, «Methoden der mathematischen Physik». La demostración tal vez más breve y elegante de la existencia de autovalores se consigue reduciendo el problema al de una ecuación integral equivalente.



valores propios  $> N$ . Para cada  $\lambda_n$  la ecuación admite una solución por lo menos (eventualmente dos) de la forma  $ky_n$  ( $k$  constante arbitraria). Las funciones  $y_n$  se llaman las *soluciones* o *funciones propias* o *autofunciones* del problema, cuyo carácter esencial es la ortogonalidad, como vamos a ver en seguida.

Digamos de paso que los autovalores correspondientes al problema de contorno de primer género  $y(a)=0$ ,  $y(b)=0$  permiten determinar el número de ceros de toda solución de la ecuación que se anule para  $x=a$ , en virtud del siguiente curioso teorema de Klein llamado *teorema de oscilación*, el cual constituye una generalización de la propiedad III indicada en el párrafo anterior.

Si  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$  es la sucesión de autovalores del problema de contorno de primer género, toda solución de la ecuación [1] que se anule en el origen  $a$  tiene en el intervalo  $(a, b)$  tantos ceros como indica el orden del *menor* autovalor más próximo al valor de  $\lambda$  de la ecuación. Es decir si  $\lambda < \lambda_1$  no tiene la solución ningún cero en el intervalo  $(a, b)$  y si  $\lambda_n < \lambda < \lambda_{n+1}$  tiene la solución indicada  $n$  ceros en dicho intervalo (extremos excluidos).

Finalmente, si  $q(x) > 0$  los autovalores son positivos.

**4. Ortogonalidad de la sucesión de funciones propias.**— Sean  $\lambda_m, \lambda_n$  dos valores propios de la ecuación [4] combinada con alguna de las condiciones de contorno [2] ó [3]; y sean  $y_m, y_n$  dos soluciones propias correspondientes a dichos valores; se verifica, pues,

$$\frac{d}{dx}(py'_m) + (q + \lambda_m r)y_m = 0 \qquad \frac{d}{dx}(py'_n) + (q + \lambda_n r)y_n = 0$$

Multipliquemos la primera por  $y_n$  y la segunda por  $y_m$ ; restemos e integremos entre  $a$  y  $b$

$$\int_a^b y_n d(py'_m) - \int_a^b y_m d(py'_n) + (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b r y_m y_n dx = 0$$

de donde, integrando por partes

$$[p(y_n y'_m - y_m y'_n)]_a^b + (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b r y_m y_n dx = 0$$

Ahora bien, si, como hemos supuesto,  $y_m, y_n$  verifican en  $a, b$  alguna de las condiciones [2] ó [3] el término integrado es nulo y como  $\lambda_m \neq \lambda_n$  se verificará la condición

$$\int_a^b (\sqrt{r} y_m)(\sqrt{r} y_n) dx = 0 \tag{5}$$

mientras para  $m=n$   $\int_a^b r y_m^2 dx \neq 0$  por ser  $r > 0$   $y_m^2 > 0$

Por consiguiente, la sucesión de funciones

$$\sqrt{r} y_1, \quad \sqrt{r} y_2, \quad \dots, \quad \sqrt{r} y_n, \quad \dots \tag{6}$$



es ortogonal. También se suele decir que la sucesión de autofunciones  $y_1, y_2, \dots, y_n$  es ortogonal en  $[a, b]$  respecto del peso o núcleo  $r$ .

En el caso particular en que  $a_0 \equiv 1, a_1 \equiv 0$  podemos tomar  $p=1, r=1$  y resulta:

Las funciones propias de los problemas de contorno relativos a la ecuación

$$y'' + (q(x) + \lambda)y = 0 \quad [7]$$

conjuntamente con las condiciones [2] ó [3] son ortogonales en  $[a, b]$ , pues cumplen la condición

$$\int_a^b y_m y_n dx \begin{cases} = 0 & \text{si } m \neq n \\ \neq 0 & \text{si } m = n \end{cases} \quad [8]$$

Esta ortogonalidad tiene consecuencias del mayor interés en las aplicaciones, pues (como se dijo en el tomo I, lecc. 18) permite desarrollar en serie de Fourier, relativa al sistema de autofunciones, cualquier función que cumpla las condiciones de contorno y además ciertas condiciones muy amplias de continuidad, derivabilidad o integrabilidad, en cuyo análisis no entramos (\*). Es justamente esta posibilidad la que permite el ajuste del problema físico a estructuras iniciales prefijadas, como ocurre en el problema de la cuerda vibrante y en el de la membrana vibrante, en los que la deformación inicial de la cuerda o membrana puede ser arbitraria dentro de las condiciones indicadas; o como ocurre en el problema de la transmisión del calor en un cuerpo cuya distribución inicial de temperaturas puede ser asimismo arbitraria dentro de dichas condiciones.

**5. Casos particulares más notables.**—Los problemas de contorno más notables que presenta la Física Matemática son los que siguen (\*\*)

I. ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO.  $y'' + \lambda y = 0, \quad L[y] = y''$ .

Intervalo:  $-1 \leq x \leq +1$ .

Condiciones:  $y(-1) = y(1) \quad y'(-1) = y'(1)$  Periodicidad.

Valores propios:  $\lambda_{2n-1} = \lambda_{2n} = n^2 \pi^2 \quad (n=1, 2, \dots)$ .

Funciones propias:  $y_{2n-1} = \cos n\pi x \quad y_{2n} = \sin n\pi x$ .

Dan lugar a los desarrollos en serie de Fourier, ya conocidos.

(\*) Usando la terminología empleada en el tomo I podemos decir: Son desarrollables en serie de soluciones propias aquellas funciones que cumplan las condiciones de contorno y respecto de las cuales el sistema de tales soluciones es cerrado. En *Frank-Mises*, «Diff. u. Int. gleichungen der Physik», podrá ver el lector demostrada la desarrollabilidad en serie uniformemente convergente en  $[a, b]$  de toda función con derivada primera y segunda continuas que cumpla las condiciones de contorno (Cap. VII, § 4). En *Courant-Hilbert*, «Methoden der Math. Physik», se demuestra ser suficiente la continuidad de dichas derivadas en intervalos parciales (en número finito); es decir, basta que sean *parcialmente continuas* (Cap. V, § 14).

(\*\*) V «Handbuch der Physik», B. III.

## II. ECUACIÓN DE LEGENDRE.

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \quad L[y] \equiv \frac{d}{dx}(1-x^2)y$$

Intervalo:  $-1 \leq x \leq +1$ .

Condiciones: Finitud en los extremos.

Valores propios:  $\lambda_n = n(n+1)$  ( $n=1, 2, \dots$ )

Funciones propias: Polinomios de Legendre, también conocidos por el tomo I y que volveremos a obtener en la lección siguiente.

## III. ECUACIÓN DE HERMITE.

$$y'' + (1-x^2)y + \lambda y = 0 \quad L[y] \equiv y'' + (1-x^2)y$$

Intervalo:  $-\infty < x < +\infty$ .Condiciones:  $y(-\infty) = y(+\infty) = 0$ .Valores propios:  $\lambda_n = 2n+2$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ )Funciones propias:  $e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$  siendo  $H_n(x)$  los polinomios de Hermite que definiremos en la lección siguiente.

## IV. ECUACIÓN DE BESSEL.

$$xy'' + y' - \frac{\alpha^2}{x}y + \lambda xy = 0 \quad L[y] \equiv \frac{d}{dx}(xy') - \frac{\alpha^2}{x}y, \quad r \equiv x$$

Intervalo:  $0 \leq x \leq 1$ .Condiciones:  $y(0) = 0 \quad y(1) = 0$ .Autovalores: Las raíces de  $J_\alpha(\sqrt{\lambda}) = 0$ . Sean  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n, \dots$ Autofunciones:  $J_\alpha(\sqrt{\lambda_n}x)$  siendo  $J_\alpha$  las funciones de Bessel que construiremos en la lección siguiente.En el caso  $\alpha=0$ , la ecuación

$$xy'' + y' + \lambda xy = 0 \quad \text{con} \quad y(0) = 1 \quad y(1) = 0$$

da lugar a la función de Bessel de orden cero  $J_0(x)$  y a las autofunciones  $J_0(\sqrt{\lambda_n}x)$  donde  $\lambda_n$  son las raíces de  $J_0(\sqrt{\lambda}) = 0$ .

6. Ecuación de Hill.—Finalmente, multitud de problemas interesantes en la Física matemática actual pueden reducirse a ecuaciones del tipo llamado de Hill (\*)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + [\lambda + \Phi(x)] y = 0 \quad [1]$$

en la que  $\Phi(x)$  es una función periódica de período  $2\pi$ . La importancia de esta ecuación justifica que añadamos unas palabras acerca de ella.

(\*) Por haberse presentado a este astrónomo en el estudio del movimiento de la Luna.

Según vimos en el § 6 de la lección 12, los factores característicos de esta ecuación diferencial vienen dados por la ecuación numérica característica

$$s^2 - [y_1(2\pi) + y_1'(2\pi)]s + 1 = 0 \quad [2]$$

en la que  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  indican las soluciones particulares definidas por las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1, & y_1'(0) &= 0 \\ y_2(0) &= 0, & y_2'(0) &= 1 \end{aligned}$$

El discriminante  $\Delta$  de esta ecuación puede escribirse en la forma

$$\Delta \equiv [y_1(2\pi) + y_1'(2\pi) - 2] [y_1(2\pi) + y_1'(2\pi) + 2] \quad [3]$$

Los corchetes son ahora funciones del parámetro  $\lambda$  y pueden escribirse, respectivamente,  $F_1(\lambda)$ ,  $F_2(\lambda)$ ; de modo que

$$\Delta \equiv F_1(\lambda)F_2(\lambda) \quad [4]$$

Propongámonos averiguar si la ecuación [1] admite soluciones periódicas, es decir, si la ecuación [2] admite una raíz real 1 (período  $2\pi$ ) ó  $-1$  (período  $4\pi$ ), en cuyo caso  $s_1 = s_2 = \pm 1$  (por ser [2]  $s_1 s_2 = 1$ ) y la igualdad de las raíces implica la anulación del discriminante  $\Delta$ , o sea

$$[5] \quad F_1(\lambda) = 0 \quad \text{o bien} \quad F_2(\lambda) = 0 \quad [6]$$

Este problema equivale a la resolución del problema de contorno [§ 3, tipo (3)]

$$y(2\pi) = y(0), \quad y'(2\pi) = y'(0) \quad \text{o bien} \quad y(4\pi) = y(0), \quad y'(4\pi) = y'(0)$$

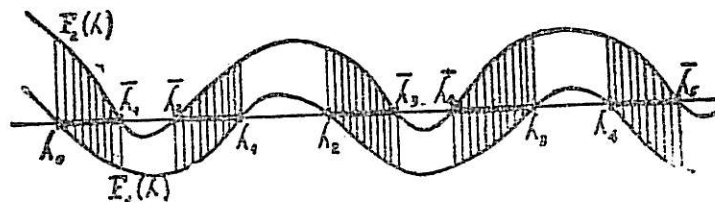
Y su resultado es el siguiente, debido a *Haupt*, y que no demostramos por brevedad:

Las dos ecuaciones [5] y [6] tienen una infinidad numerable de soluciones (valores propios) que, designadas respectivamente por  $\lambda_i$  y  $\bar{\lambda}_i$ , se intercalan del siguiente modo:

$$\lambda_0 < \bar{\lambda}_1 \leq \bar{\lambda}_2 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \bar{\lambda}_3 \leq \bar{\lambda}_4 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \dots$$

es decir, a dos soluciones iguales o distintas de [5] siguen dos de [6] y recíprocamente. Se demuestra, además, que  $F_1(\lambda)$  y  $F_2(\lambda)$  para valores negativos grandes de  $\lambda$  tienen ambas valor positivo.

De aquí resulta que en el supuesto de ser todos los signos  $<$ , es decir, *simples* las raíces de  $F_1 F_2$ , estas funciones presentarían, en cuanto a sus signos se refiere, la disposición siguiente:



y, por tanto,  $\Delta = F_1 \cdot F_2$  será  $< 0$  en los intervalos rayados en que  $F_1 F_2$  son de distinto signo. En resumen (§ 2, lecc. 12).

*Tendremos asegurada la estabilidad sólo en los intervalos comprendidos entre cada dos raíces consecutivas de distinta ecuación.*

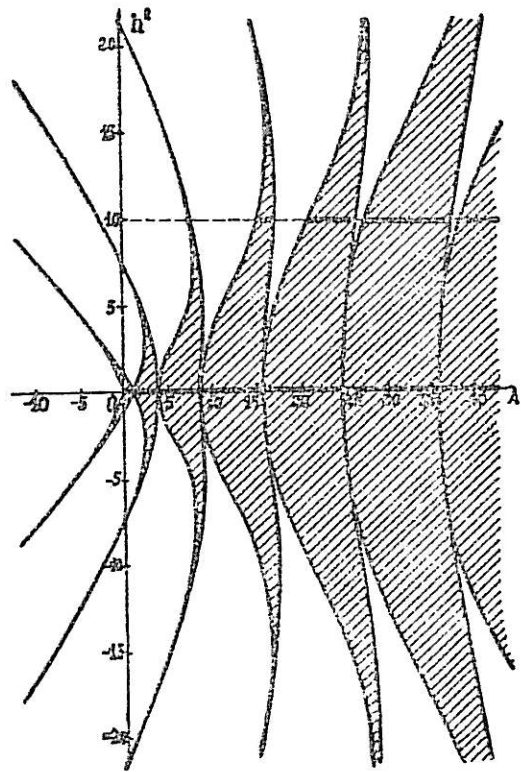
Estos intervalos se empalman en los extremos correspondientes a raíces dobles de  $F_1(\lambda)$  ó  $F_2(\lambda)$ .

**7. Ecuación de Mathieu.**—Caso particular muy frecuente de la ecuación de Hill lo constituye la ecuación de Mathieu, de la forma

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (\lambda - 2h^2 \cos 2x) y = 0$$

Aparece en esta ecuación un nuevo parámetro  $h^2$ . Al variar éste varía la sucesión de intervalos de estabilidad descritos en el párrafo anterior. Para  $h=0$  se obtiene la ecuación del movimiento armónico  $y'' + \lambda y = 0$ , cuyas soluciones son todas periódicas (estables) para  $\lambda > 0$ . Todos los intervalos de estabilidad se empalman sobre el eje de las  $\lambda$ , pero a medida que  $h$  aumenta se presentan intervalos intercalados de estabilidad no asegurada (*labilidad*) que crecen con  $h$  en la forma que indica la adjunta luminosa figura debida a Strutt (\*).

Las zonas rayadas en ella son, en definitiva, las que marcan los valores de  $\lambda$  y  $h^2$  (coordenadas de la figura) para las cuales las soluciones de la ecuación son *estables* (en el sentido lató indicado en el párrafo 2. III de la lección 12).



**8. Aplicación de las funciones propias a la integración de las ecuaciones completas.**—Supongamos resuelto el problema homogéneo

$$L[y] + \lambda y = 0 \tag{1}$$

con las condiciones [2] § 3 y hallada la sucesión de autofunciones ortogonales  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ , correspondientes a los autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ .

Si  $\varphi(x)$  es una combinación lineal de un número finito de ellas (lo que implica que  $\varphi(x)$  cumpla asimismo las condiciones [2]), por ejemplo,

$$\varphi(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$$

es muy fácil obtener una solución de la ecuación completa

$$L[y] = \varphi(x) \tag{2}$$

(\*\*) V. M. J. O. Strutt, «Lamésche-Mathieusche un verwandte Funktionen in Physik und Technik», monografía publicada en la colección Springer «Ergebnisse der Mathematik» en la que el lector encontrará gran número de propiedades y aplicaciones de estas funciones.

pues bastará adoptar como tal.

$$\eta = -\frac{C_1}{\lambda_1} y_1 - \frac{C_2}{\lambda_2} y_2 - \frac{C_3}{\lambda_3} y_3$$

En efecto, aplicando el operador lineal  $L[y]$  a los dos miembros

$$L[\eta] = -\frac{C_1}{\lambda_1} L[y_1] - \frac{C_2}{\lambda_2} L[y_2] - \frac{C_3}{\lambda_3} L[y_3] = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 = \varphi(x)$$

Si  $\varphi(x)$  no es una combinación lineal de autofunciones en número finito, pero cumple las condiciones de contorno, podemos aprovechar la ortogonalidad de éstas para intentar sustituir  $\varphi(x)$  por una combinación lineal aproximada de autofunciones, de acuerdo con lo dicho en el tomo I, lección 18, lo que será suficiente en muchos casos prácticos, y mejor aún desarrollar  $\varphi(x)$  en serie de autofunciones que, supuestas normalizadas, darán

$$\varphi(x) = \sum C_n y_n \quad \text{donde} \quad C_n = \int_a^b \varphi(x) y_n(x) dx \quad [3]$$

Asegurada la convergencia absoluta y uniforme de la serie y sus derivadas, una solución de la ecuación [2] será

$$\eta = -\sum \frac{C_n}{\lambda_n} y_n \quad [4]$$

Serie que será uniformemente convergente al serlo [3] por tender  $\lambda_n \rightarrow \infty$  al crecer  $n$  y formar, por tanto, los módulos de [3] una serie mayorante de [4], a partir de un cierto término

### EJERCICIOS

1. Hallar los autovalores y las autofunciones del problema de contorno

$$\left. \begin{array}{l} y'' + 4\lambda y = 0 \\ y(0) = 0 \quad y'(a) = 0 \end{array} \right\}$$

2. Idem con la misma ecuación y las condiciones  $y'(0) = 0, y(a) = 0$ .
3. Idem con las condiciones de contorno  $y(0) = y(a), y'(0) = y'(a)$ .
4. Idem id.  $y(a) = -y(0), y'(a) = -y'(0)$ . Ver que equivale al caso anterior sustituyendo  $a$  por  $2a$ .
5. Idem id.  $y'(0) = y'(a), y'(0) = y(a)$ .
6. Idem id.  $y(0) = -y(a), y'(a) = 0$ .
7. Idem con las condiciones de contorno  $y(0) = y'(0), y(a) = 0$ . Resolución gráfica de la ecuación transcendente que dá los autovalores en este caso, aplicándola al valor  $a=1$ .
8. Idem con las condiciones  $y(0) = y'(0), y'(a) = 0$ . Resolución gráfica.
9. Si ponemos, por ejemplo, las condiciones de contorno  $y(0) = 1, y'(a) = 0$ , ¿existe propiamente problema de autovalores? ¿Cuál es la causa de ello? Denominando como es costumbre *espectro* al conjunto de los valores de  $\lambda$  para los cuales admite solución el problema de contorno, ¿cómo se presenta el *espectro* en este caso?
10. Comprobar que la función de Green correspondiente al ejercicio primero de la lección anterior puede escribirse

$$G(x, \xi) = x\xi - \frac{l}{2} [x + \xi + |x - \xi|]$$

11. Comprobar que la ecuación  $L[y] \equiv xy'' + y' = 0$  correspondiente a la de Bessel  $xy'' + y' + \lambda xy = 0$ , o sea  $L[y] + \lambda xy = 0$ , con las condiciones de contorno  $y(0)$  finito,  $y(1) = 0$ , admite la función de Green

$$G(x, \xi) = -\log_e \frac{1}{2} [x + \xi + |x - \xi|]$$

## Capítulo V.—SOLUCIONES DEFINIDAS POR SERIES

### LECCIÓN 15.—INTEGRACIÓN POR SERIES. FUNCIONES DE HERMITE, LEGENDRE Y BESSEL

En las lecciones precedentes hemos hecho depender repetidas veces la solución general de una ecuación diferencial lineal, de soluciones particulares linealmente independientes, pero solamente hemos aprendido a hallar éstas en los casos más sencillos: ecuaciones de coeficientes constantes y ecuaciones del tipo Euler (lec. 9.<sup>a</sup>, § 4). Hora es que abordemos la solución del problema en los casos, no tan sencillos de ecuaciones de coeficientes variables, que asimismo presenta la Física matemática. El método más socorrido es el del desarrollo en serie de la solución, del que vamos a dar idea en esta lección.

**1. Métodos de coeficientes indeterminados.**—Dada una ecuación diferencial de la forma  $y'' = f(x, y, y')$  donde  $f$  es desarrollable en serie de Taylor en un entorno de los valores  $x_0, y_0, y'_0$ , el teorema de Cauchy (lecciones 1.<sup>a</sup> y 6.<sup>a</sup>) permite obtener la solución única que toma dichos valores iniciales, mediante un desarrollo en serie de potencias de  $x - x_0$ , el cual será uniformemente convergente en un cierto entorno del valor  $x = x_0$  (v. lec. 11, tomo I).

En particular, las condiciones de existencia y unicidad se cumplen para ecuaciones lineales de la forma

$$y'' = f_1(x)y' + f_2(x)y \quad [1]$$

en que  $f_1$  y  $f_2$  sean desarrollables en series potenciales, es decir, en series de Taylor-Maclaurin en un entorno del punto  $x=0$ . El teorema de Cauchy permitirá construir, por ejemplo, dos soluciones  $y_1(x), y_2(x)$ , respectivamente correspondientes a las condiciones iniciales  $x=0, y_1(0)=0, y'_1(0)=1; y_2(0)=1, y'_2(0)=0$ , que serán linealmente independientes (v. lec. 8.<sup>a</sup>, § 4), puesto que el wronskiano  $y_1y'_2 - y_2y'_1 = -1$  es distinto de cero; y la integral general podrá expresarse por  $y = C_1y_1 + C_2y_2$ . Cualquiera otra solución se obtendrá particularizando convenientemente los valores de las constantes  $C_1, C_2$ . La integración queda, pues, resuelta en función de las dos series  $y_1(x), y_2(x)$  obtenidas por aplicación directa del teorema de Cauchy.

Ahora bien, asegurada la existencia y la unicidad de las series que solucionan la ecuación, los coeficientes de las mismas pueden obtenerse por



método más rápido, llamado de *coeficientes indeterminados*, que consiste en derivar la serie potencial de coeficientes literales:

$$\left. \begin{aligned} y &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots & y(0) &= a_0 \\ y' &= a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + 4 a_4 x^3 + \dots & y'(0) &= a_1 \\ y'' &= 2 a_2 + 2 \cdot 3 a_3 x + 3 \cdot 4 a_4 x^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad [2]$$

sustituir en la ecuación diferencial [1], en la que se supondrán asimismo desarrollados  $f_1(x)$  y  $f_2(x)$ , e identificar las potencias del mismo grado en las series obtenidas en ambos miembros. En esta forma se llega a un sistema de ecuaciones recurrentes para el cálculo de los coeficientes indeterminados, cuya resolución progresiva suele dar dichos coeficientes en función de dos indeterminadas arbitrarias que serán las constantes de integración. Frecuentemente estas constantes son  $a_0, a_1$ , es decir, respectivamente  $y(0)$  e  $y'(0)$ . El método se simplifica notablemente si  $f_1(x)$  y  $f_2(x)$  son polinomios enteros. *A posteriori* se puede determinar el radio de convergencia de la serie y de sus derivadas y, por tanto, el campo de validez de la solución. Un sencillo ejemplo aclarará mejor esta idea general.

**2. Aplicación a la ecuación de Hermite.**—Sea la ecuación diferencial de Hermite

$$y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0 \quad \text{o sea} \quad y'' = 2xy' - 2\alpha y \quad [3]$$

La sustitución de los desarrollos [2] en [3] conduce a

$$\begin{aligned} &2 a_2 + 2 \cdot 3 a_3 x + 3 \cdot 4 a_4 x^2 + 4 \cdot 5 a_5 x^3 + 5 \cdot 6 a_6 x^4 + \dots = \\ = &2 a_1 x + 2 \cdot 2 a_2 x^2 + 2 \cdot 3 a_3 x^3 + 2 \cdot 4 a_4 x^4 + \dots \\ &- 2 \alpha a_0 - 2 \alpha a_1 x - 2 \alpha a_2 x^2 - 2 \alpha a_3 x^3 - 2 \alpha a_4 x^4 - \dots \end{aligned}$$

y por identificación de coeficientes

$$\begin{array}{ll} 2 a_2 = -2 \alpha a_0 & \text{de donde} \quad a_2 = -\alpha a_0 \\ 2 \cdot 3 a_3 = 2(1 - \alpha) a_1 & \text{»} \quad a_3 = -\frac{2(\alpha - 1)}{3!} a_1 \\ 3 \cdot 4 a_4 = 2(2 - \alpha) a_2 & \text{»} \quad a_4 = +\frac{2^2 \alpha (\alpha - 2)}{4!} a_0 \\ 4 \cdot 5 a_5 = 2(3 - \alpha) a_3 & \text{»} \quad a_5 = +\frac{2^2 (\alpha - 1)(\alpha - 3)}{5!} a_1 \\ 5 \cdot 6 a_6 = 2(4 - \alpha) a_4 & \text{»} \quad a_6 = -\frac{2^3 \alpha (\alpha - 1)(\alpha - 4)}{6!} a_0 \end{array}$$

Dejamos al lector la expresión de los coeficientes generales de orden par e impar. Como se ve los primeros se expresan en función de  $a_0$  y los segundos en función de  $a_1$ , constantes que quedan arbitrarias. Agrupando

los términos que dependen de una y otra, podremos escribir la integral general

$$y = a_0 \left[ 1 - \frac{2\alpha}{2!} x^2 + \frac{2^2 \alpha (\alpha - 2)}{4!} x^4 - \frac{2^3 \alpha (\alpha - 2) (\alpha - 4)}{6!} x^6 + \dots \right] \\ + a_1 \left[ x - \frac{2(\alpha - 1)}{3!} x^3 + \frac{2^2 (\alpha - 1) (\alpha - 3)}{5!} x^5 - \frac{2^3 (\alpha - 1) (\alpha - 3) (\alpha - 5)}{7!} x^7 + \dots \right] \quad [4]$$

abreviadamente

$$y = a_0 y_2(x) + a_1 y_1(x)$$

representando por  $y_2(x)$  la primera serie, solución que cumple las condiciones iniciales  $y_2(0)=1$ ,  $y_2'(0)=0$ , y con  $y_1(x)$  la segunda que cumple a su vez las condiciones  $y_1(0)=0$ ,  $y_1'(0)=1$ . Se ve en seguida que ambas series son convergentes para todo valor de  $x$  puesto que la relación de un término al anterior es de la forma  $\pm 2(\alpha - n)x^2 : (n+1)(n+2)$  y tiende a cero al crecer  $n$  infinitamente. Lo mismo ocurre con las derivadas primera y segunda, que serán, por tanto, uniformemente convergentes en todo intervalo finito de  $x$ , de modo que la solución es válida para todo valor de  $x$ .

Si  $\alpha$  es entero par  $= 2p$  la serie primera se convierte en polinomio de grado  $2p$ , y lo mismo le ocurre a la serie segunda para valores enteros impares  $= 2p + 1$  de  $\alpha$ . Para los valores particulares respectivos

$$a_0 = (-1)^p \frac{2p!}{p!} \quad a_1 = (-1)^p \frac{2 \cdot 2p!}{p!}$$

los polinomios resultantes son los llamados *polinomios de Hermite*. Sus productos por  $e^{-\frac{x^2}{2}}$  son soluciones de la ecuación diferencial, también llamada de Hermite,

$$u'' + [(1-x^2) + 2\alpha]u = 0 \quad [5]$$

como podrá comprobar fácilmente el lector haciendo el cambio  $u = e^{-\frac{x^2}{2}}$  en [3]. Y puesto que la ecuación transformada [5] es del tipo de Liouville, tratado en la lección anterior (§ 4, fórmula [7], con el parámetro  $2\alpha$ ), podemos afirmar que los polinomios de Hermite multiplicados por  $e^{-\frac{x^2}{2}}$  constituyen una sucesión ortogonal en el intervalo  $-\infty, +\infty$ , por ser soluciones del problema de contorno formado por la ecuación [5] y las condiciones  $u(-\infty)=0$ ,  $u(+\infty)=0$ .

### 3. Método de Frobenius. Aplicación a la ecuación de Legendre.—

Si de la forma de ecuación [1] pasamos a la forma

$$[6] \quad f_0(x)y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = 0 \quad y'' = -\frac{f_1(x)}{f_0(x)}y' - \frac{f_2(x)}{f_0(x)}y \quad [6 \text{ bis}]$$

no es de extrañar que el método anterior requiera ciertos retoques. Los ce-

ros de  $f_0(x)$  son puntos singulares de los cocientes  $f_1 : f_0$  y  $f_2 : f_0$ , que no pueden ser desarrollados en serie de Taylor en el entorno de dichos puntos. En particular, si  $f_0(0)=0$  la ecuación admite difícilmente soluciones de la forma  $y = \sum_0^{\infty} a_n x^n$  como en el caso anterior. No obstante, en las ecuaciones de este carácter que presenta la Física matemática, la dificultad se ha podido allanar sistemáticamente de modo fácil, ensayando soluciones de la forma

$$y = x^r \sum_0^{\infty} a_n x^n \quad [7]$$

en donde el exponente  $r$  (no precisamente entero) del factor  $x^r$  es indeterminado como los coeficientes  $a_n$ . En el ensayo de soluciones de este tipo consiste el llamado *método de Frobenius*. Como su aplicación quedará aquí reducida a las ecuaciones de Legendre y de Bessel para las que resulta muy fácil comprobar *a posteriori* la validez de las soluciones obtenidas, prescindiremos del estudio general de las condiciones que han de cumplir los coeficientes de la ecuación para asegurar *a priori* la existencia de tales soluciones.

Empecemos, pues, aplicando el método de Frobenius a la *ecuación de Legendre*, que se presenta en el estudio de fenómenos con simetría esférica :

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0 \quad [8]$$

En este caso el punto  $x=0$  no es singular, pero sí el  $x=1$ . Prevemos, pues, la existencia de soluciones en serie potencial de la forma  $y = \sum_0^{\infty} a_n x^n$ , pero adivinamos asimismo que el punto  $x=1$  limitará el radio de convergencia de las series solución ; veámoslo. Desarrollando la serie [7] y sus derivadas se tiene :

$$\begin{aligned} y &= a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + a_3 x^{r+3} + a_4 x^{r+4} + \dots \\ - 2xy' &= - 2a_0 r x^r - 2a_1 (r+1) x^{r+1} - 2a_2 (r+2) x^{r+2} - 2a_3 (r+3) x^{r+3} - \dots \\ y'' &= a_0 r(r-1) x^{r-2} + a_1 (r+1) r x^{r-1} + a_2 (r+2) (r+1) x^r + a_3 (r+3) (r+2) x^{r+1} + \dots \\ - x^2 y'' &= - a_0 r(r-1) x^r - a_1 (r+1) r x^{r+1} - a_2 (r+2) (r+1) x^{r+2} - a_3 (r+3) (r+2) x^{r+3} - \dots \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación se habrá de verificar

$$\begin{aligned} &a_0 r(r-1) x^{r-2} + a_1 (r+1) r x^{r-1} + \\ &+ \sum_0^{\infty} [a_n \alpha(\alpha+1) - 2a_n (r+n) - a_n (r+n)(r+n-1) + a_{n+2} (r+n+2)(r+n+1)] x^{r+n} = 0 \end{aligned}$$

Si suponemos  $a_0 \neq 0$ ,  $a_1 \neq 0$ , la anulación de los dos primeros términos exige  $r=0$ , y la serie se convierte en la potencial ordinaria  $y = \sum_0^{\infty} a_n x^n$  como habíamos previsto. La ecuación recurrente que determina los coeficientes se obtiene anulando el término general (con  $r=0$ )

$$\underbrace{a_n [\alpha(\alpha+1) - 2n - n(n-1)] + a_{n+2} (n+2)(n+1)}_{(\alpha+n+1)(\alpha-n)} = 0$$



de donde resulta,

$$\begin{aligned} \text{para } n=0 & \quad a_2 = - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!} a_0 \\ \text{para } n=1 & \quad a_3 = - \frac{(\alpha+2)(\alpha-1)}{3!} a_1 \\ \text{para } n=2 & \quad a_4 = - \frac{(\alpha+3)(\alpha-2)}{3 \cdot 4} a_2 = + \frac{(\alpha+1)(\alpha+3)\alpha(\alpha-2)}{4!} a_0 \\ \text{para } n=3 & \quad a_5 = - \frac{(\alpha+4)(\alpha-3)}{4 \cdot 5} a_3 = + \frac{(\alpha+2)(\alpha+4)(\alpha-1)(\alpha-3)}{5!} a_1 \\ & \dots \end{aligned}$$

Y en función de las dos constantes  $a_0, a_1$ , que quedan arbitrarias, podemos escribir la solución general:

$$\begin{aligned} y = a_0 \left( 1 - \frac{(\alpha+1)\alpha}{2!} x^2 + \frac{(\alpha+1)(\alpha+3)\alpha(\alpha-2)}{4!} x^4 \dots \right) + \\ + a_1 \left( x - \frac{(\alpha+2)(\alpha-1)}{3!} x^3 + \frac{(\alpha+2)(\alpha+4)(\alpha-1)(\alpha-3)}{5!} x^5 \dots \right) \end{aligned} \quad [9]$$

abreviadamente  $y = a_0 y_2(x) + a_1 y_1(x)$ , habiendo representado la primera serie por  $y_2(x)$ , solución correspondiente a las condiciones iniciales  $y_2(0)=1, y_2'(0)=0$ , y la segunda por  $y_1(x)$  que corresponde a las condiciones  $y_1(0)=0, y_1'(0)=1$ . Se comprueba fácilmente que el radio de convergencia de ambas series y de sus derivadas es 1 y, por tanto, que son uniformemente convergentes en todo intervalo interior al  $[-1, +1]$ , lo que legitima en él la solución obtenida [9]. Esta solución es además la integral general, por ser el wronskiano de  $y_1, y_2$  distinto de cero.

Como ocurría en el ejemplo anterior, para valores particulares de  $\alpha$  las series se convierten en polinomios. Así, si  $\alpha$  es nulo, positivo par o negativo impar,  $y_2(x)$  se reduce a un polinomio, y si  $\alpha$  es positivo impar o negativo par, es polinomio  $y_1(x)$ . Para valores *positivos* de  $\alpha$ , si damos a  $a_1, a_2$  sus valores convenientes para que resulten  $y_1(1)=1, y_2(1)=1$ , obtenemos los *polinomios de Legendre* de que hemos hablado en el tomo I y cuya ortogonalidad en el intervalo  $(-1, +1)$  resulta aquí como consecuencia de ser dichos polinomios soluciones de una ecuación [8] del tipo Liouville (lec. anterior, § 3, parámetro  $\lambda = \alpha(\alpha+1)$ ).

**4. Ecuación de Bessel. Funciones de Bessel de primera especie.—**

Apliquemos ahora el método a la ecuación de Bessel, que se presenta en el estudio de fenómenos con simetría cilíndrica:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - a^2) y = 0 \quad \text{o bien} \quad y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right) y = 0 \quad [10]$$

En ella se observa el punto singular  $x=0$ . El desarrollo de la serie y de sus derivadas da

$$\begin{aligned}
 y &= a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + a_3 x^{r+3} + \dots \\
 -\frac{\alpha^2}{x^2} y &= -a_0 \alpha^2 x^{r-2} - a_1 \alpha^2 x^{r-1} - a_2 \alpha^2 x^r - a_3 \alpha^2 x^{r+1} - \dots \\
 \frac{y'}{x} &= a_0 r x^{r-2} + a_1 (r+1) x^{r-1} + a_2 (r+2) x^r + a_3 (r+3) x^{r+1} + \dots \\
 y' &= a_0 r (r-1) x^{r-2} + a_1 (r+1) r x^{r-1} + a_2 (r+2) (r+1) x^r + a_3 (r+3) (r+2) x^{r+1} + \dots
 \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación se habrá de verificar

$$\begin{aligned}
 &a_0 (r^2 - \alpha^2) x^{r-2} + a_1 [(r+1)^2 - \alpha^2] x^{r-1} + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} [a_{n+2} (r+n+2)^2 - a_{n+2} \alpha^2 + a_n] x^{n+r} = 0
 \end{aligned}$$

La anulacion del primer sumando implica

$$a_0 (r^2 - \alpha^2) = 0 \quad \text{de donde, para } a_0 \neq 0, \quad \boxed{r = \pm \alpha}$$

La anulacion del segundo implicará entonces  $a_1 = 0$  y la fórmula recurrenente que se desprende de la anulacion del término general de la  $\Sigma$  da

$$a_{n+2} = \frac{-a_n}{(r+n+2)^2 - \alpha^2}$$

En consecuencia, son nulos todos los términos impares; y los pares valdrán sucesivamente, para  $r = +\alpha$ ,

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \frac{-a_0}{(\alpha+2)^2 - \alpha^2} = \frac{-a_0}{2 \cdot 2 (\alpha+1)}; \quad a_4 = \frac{-a_2}{(\alpha+4)^2 - \alpha^2} = \frac{-a_2}{2 \cdot 4 (\alpha+2)} = \frac{a_0}{2^2 \cdot 2 \cdot 4 (\alpha+1) (\alpha+2)} \\
 a_6 &= \frac{-a_4}{(\alpha+6)^2 - \alpha^2} = \frac{-a_4}{2 \cdot 6 (\alpha+3)} = \frac{-a_0}{2^3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 (\alpha+1) (\alpha+2) (\alpha+3)} \dots \\
 a_{2n} &= (-1)^n \frac{a_0}{2^{2n} n! (\alpha+1) (\alpha+2) \dots (\alpha+n)}
 \end{aligned}$$

Si damos a  $a_0$  el valor  $1 : 2^\alpha \Gamma(\alpha+1)$  con objeto de completar con los factores  $(\alpha+1) (\alpha+2) \dots (\alpha+n)$  la  $\Gamma(\alpha+n+1)$ , resulta como solución:

$$J_\alpha(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \left[ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2! \Gamma(\alpha+3)} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{3! \Gamma(\alpha+4)} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots \right] \quad [11]$$

Y para  $r = -\alpha$  y  $a_0 = 1 : 2^{-\alpha} \Gamma(-\alpha+1)$  resulta análogamente la solución:

$$J_{-\alpha}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha} \left[ \frac{1}{\Gamma(-\alpha+1)} - \frac{1}{\Gamma(-\alpha+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2! \Gamma(-\alpha+3)} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \dots \right] \quad [12]$$

que puede obtenerse (sin nuevos cálculos) sustituyendo  $\alpha$  por  $-\alpha$  en  $J_\alpha$  (obsérvese que la ecuación es par en  $\alpha$ ).

Formando la relación de un término al anterior en las series de los paréntesis se comprueba fácilmente que tiende a cero al crecer  $n$  en ambas series y, por tanto, que son absolutamente convergentes para todo valor de  $x$ ; la convergencia resulta además muy rápida (para valores no grandes de  $x$ ), de modo que son muy aptas para el cálculo numérico y para la tabulación de estas funciones  $J_\alpha(x)$  y  $J_{-\alpha}(x)$ , llamadas *funciones de Bessel de primera especie*.

I. Si  $\alpha$  no es nulo ni entero ningún denominador se anula y obtenemos así dos soluciones linealmente independientes (\*) y, por tanto, la solución general en la forma

$$y = C_1 J_\alpha(x) + C_2 J_{-\alpha}(x) \quad [13]$$

II. Si  $\alpha$  es nulo ambas soluciones coinciden en la

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots \quad [14]$$

llamada asimismo *función de Bessel de orden cero*.

III. Finalmente, si  $\alpha$  es entero existe una relación muy sencilla entre  $J_{-\alpha}$  y  $J_\alpha$ , que vamos a obtener. Sea  $\alpha$  entero positivo; los términos  $J_{-\alpha}(x)$  son nulos hasta el término  $\alpha^0$  inclusive, por ser iguales a infinito los valores de la función  $\Gamma$  de argumento entero negativo o nulo (v. tomo I, lec. 14, § 2), y quedará:

$$\begin{aligned} J_{-\alpha}(x) &= (-1)^\alpha \left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha} \left[ \frac{1}{\alpha! \Gamma(1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\alpha} - \frac{1}{(\alpha+1)! \Gamma(2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(\alpha+1)} + \frac{1}{(\alpha+2)! \Gamma(3)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(\alpha+2)} - \dots \right] \\ &= (-1)^\alpha \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \left[ \frac{1}{\alpha!} - \frac{1}{(\alpha+1)!1!} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(\alpha+2)!2!} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \dots \right] \end{aligned}$$

es decir,

$$J_{-\alpha}(x) = (-1)^\alpha J_\alpha(x) \quad [15]$$

Al existir entre ambas soluciones una relación lineal no podemos formular en este caso, ni en el anterior, la integral general mediante [13]. Necesitamos otras integrales particulares que pueden obtenerse como sigue.

**5. Funciones de Bessel de segunda especie.**—Nos situamos en el caso  $\alpha$  entero que acabamos de considerar. Puesto que conocemos la integral particular  $J_\alpha$ , podemos hallar la integral general, u otra particular, por aplicación del *método de variación de las constantes*, es decir, buscando una nueva solución de la forma  $y = C J_\alpha(x)$ , donde  $C$  es función de  $x$ . Como el método ha sido ya tratado de un modo general en lec. 8, § 6, no tenemos

(\*) Porque toda relación de la forma  $J_{-\alpha}(x) = k J_\alpha(x)$  implicaría, por ejemplo, la identidad de los términos de menor grado.



más que aplicar el resultado allí obtenido a nuestra ecuación (en la que  $f_1(x) \equiv 1/x$ ), con lo que resulta:

$$C = K \int \frac{dx}{x J_\alpha^2(x)}; \quad \text{y la integral general } y = J_\alpha(x) \left( K_1 + K_2 \int \frac{dx}{x J_\alpha^2(x)} \right)$$

Cabe desarrollar en serie la función primitiva expresada con el signo integral. Eligiendo convenientemente la constante de integración, así como  $A_2$  se obtiene el segundo sumando convertido en la integral particular llamada *función de Bessel de segunda especie*. (Omitimos los cálculos por su longitud (\*).)

$$Y_\alpha(x) = \frac{2}{\pi} \left[ \log_e \frac{x}{2} + \gamma \right] J_\alpha(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\alpha-1} \frac{\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(n+1)} \left( \frac{x}{2} \right)^{-\alpha+2n} \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left( \frac{x}{2} \right)^{\alpha+2n}}{\Gamma(n+1) \Gamma(\alpha+n+1)} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{\alpha+n} \right\} \quad [16]$$

donde aparece la constante de Euler  $\gamma = -\Gamma'(1) = 0,5772$ .

(La primera parte del corchete  $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$  debe suponerse nula para  $n=0$ .)

Para  $\alpha=0$  se obtiene análogamente

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left[ \log_e \frac{x}{2} + \gamma \right] J_0(x) - \frac{2}{\pi} \left[ \left( \frac{x}{2} \right)^2 - \frac{1 + \frac{1}{2}}{(2!)^2} \left( \frac{x}{2} \right)^4 + \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{(3!)^2} \left( \frac{x}{2} \right)^6 - \dots \right] \quad [17]$$

Las series de los corchetes son uniformemente convergentes en todo intervalo finito de  $x$ . Sin embargo, las funciones  $Y_0$  e  $Y_\alpha$  se hacen infinitas para  $x=0$ , debido al término logarítmico. Esta singularidad es, en el fondo, consecuencia de la de los coeficientes de la ecuación.

Estas expresiones se pueden obtener asimismo mediante un paso al límite en la *función de Neumann*

$$N_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x) \cos \alpha \pi - J_{-\alpha}(x)}{\operatorname{sen} \alpha \pi}$$

que por ser combinación lineal de  $J_\alpha$  y  $J_{-\alpha}$  es solución de la ecuación de Bessel para  $\alpha$  no entero ni nulo. Si  $\alpha$  es nulo o entero la función  $N_\alpha(x)$  así definida carece de sentido; pero sí le tiene el  $\lim N_\alpha(x)$  cuando  $\alpha \rightarrow 0$  o cuando  $\alpha$  tiende a un valor entero  $\nu$ . Estos límites son precisamente

$$Y_0(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} N_\alpha(x) \qquad Y_\nu(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \nu} N_\alpha(x)$$

De aquí que también se representen  $Y_0$  e  $Y_\nu$  por  $N_0$  y  $N_\nu$ .

(\*) Puede el lector consultar Burington-Torrance, «Higher Mathematics».

El cálculo se hace de acuerdo con la regla de l'Hôpital

$$Y_\nu(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \nu} \frac{-\pi J_\alpha(x) \operatorname{sen} \alpha\pi + \cos \alpha\pi \frac{\partial J_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{\partial J_{-\alpha}}{\partial \alpha}}{\pi \cos \alpha\pi} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\partial J_\alpha}{\partial \alpha} - (-1)^\nu \frac{\partial J_{-\alpha}}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=\nu}$$

Efectuadas las operaciones, que también son prolijas (\*), se llega a las mismas expresiones antes consignadas. Las derivadas efectuadas con relación al parámetro  $\alpha$  explican la aparición del término logarítmico. En efecto,  $J_\alpha(x)$  es de la forma [11],  $J_\alpha(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha F(x, \alpha)$ , de donde

$$\frac{\partial J_\alpha}{\partial \alpha} = F(x, \alpha) \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \log_e \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha F'_\alpha(x, \alpha) = J_\alpha(x) \log_e \frac{x}{2} + \dots$$

y lo mismo ocurre con la derivada  $J_{-\alpha}$ .

En resumen, la integral general de la ecuación de Bessel

$$y'' + \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0 \quad (\nu \text{ entero}) \text{ será, pues, } y = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x)$$

$$y'' + \frac{y'}{x} + y = 0 \quad (\alpha = 0) \text{ será, pues, } y = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x)$$

En la práctica estas ecuaciones se presentan en la forma

$$y'' + \frac{y'}{x} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0 \quad \text{de integral general } y = C_1 J_\nu(kx) + C_2 Y_\nu(kx)$$

$$y'' + \frac{y'}{x} + k^2 y = 0 \quad \text{» » » } y = C_1 J_0(kx) + C_2 Y_0(kx)$$

como se comprueba mediante el cambio  $kx=t$ , que las reduce a las anteriores.

### EJERCICIOS

1. Integrar mediante desarrollo en serie la ecuación  $y' = x^2 + y$ .
2. Integrar mediante desarrollo en serie  $y'' + 8xy = 0$ .  
(Solución particular correspondiente a las condiciones  $y(0)=1, y'(0)=2$ .)
3. Integrar ídem  $y'' + x^2y = 0$ . Solución part. para  $y(0)=-2, y'(0)=1$ .
4. Idem  $y'' + \frac{2}{x}y' + xy = 0$ . Sol. part. para  $y(0)=y'(0)=1$ .
5. Idem  $xy'' + y' + y = 0$ . Sol. part. para  $y(0)=1, y'(0)=0$ .
6. Idem  $y'' + \frac{a}{x}y' + by = 0$ .
7. Transformar la ecuación  $y'' + \frac{a}{x}y' + k^2y = 0$  en otra de Bessel mediante un cambio de la forma  $z = x^{-\alpha}y$ . Aplicar al ejercicio anterior. Aplicación al caso en que  $\alpha=0, k=1$ .

8. Integrar la ecuación de Gauss, llamada *hipergeométrica*,

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0$$

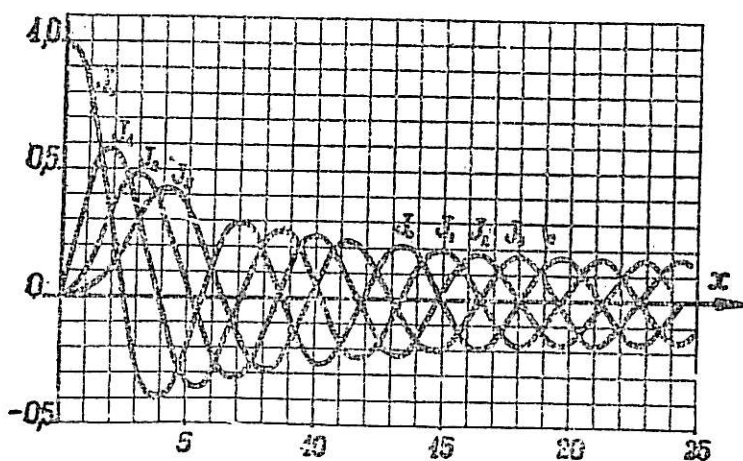
(\*) Este método de cálculo puede verse desarrollado en *Frank-Mises*, «Differential und Integralgleichungen der Physik», y en *Courant Hilbert*. «Methoden der Mathematischen Physik».

## LECCIÓN 16.—PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DE BESSEL

**1. Gráficas de las funciones de Bessel de primera y segunda especies.**

La primera ecuación diferencial del tipo Bessel de que se tiene noticia en la historia de la Matemática se presentó hace más de dos siglos (1732) a uno de los matemáticos de la famosa familia Bernouilli (Daniel), en el estudio de las oscilaciones de una cadena colgada por un extremo. Posteriormente han sido múltiples las cuestiones tratadas por los físicomatemáticos (Euler, Lagrange, Fourier, Poisson...), que han conducido a ecuaciones de este tipo o reducibles a él. Fué en 1824, cuando el astrónomo alemán Bessel hizo un estudio sistemático de tales ecuaciones en relación con un problema de movimiento planetario, lo que motivó el nombre con que se bautizaron. Modernamente han adquirido tan extraordinario relieve en la Técnica, especialmente la de alta frecuencia, que hoy son ya los ingenieros quienes más las necesitan (\*). Ello justifica que dediquemos una lección a dar un muestrario de las propiedades y fórmulas más interesantes para su manejo.

El modo más intuitivo de resumir las propiedades de una función es representarla gráficamente. Empezamos, pues, reproduciendo a continuación las gráficas de las funciones de Bessel de primera especie correspondientes a los primeros órdenes enteros.



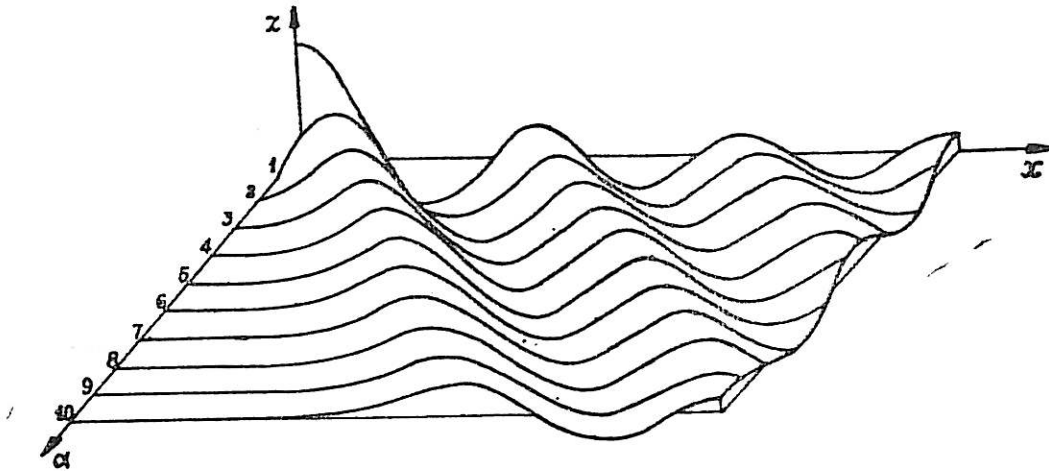
Funciones de Bessel de 1.ª especie y órdenes 0, 1, 2, 3.

Para valores negativos, téngase presente que  $J_\alpha = (-1)^\alpha J_{-\alpha}$ , es decir, habrá que sustituir las curvas de orden impar  $J_1, J_3, \dots$ , por sus simétricas, conservando las de orden par.

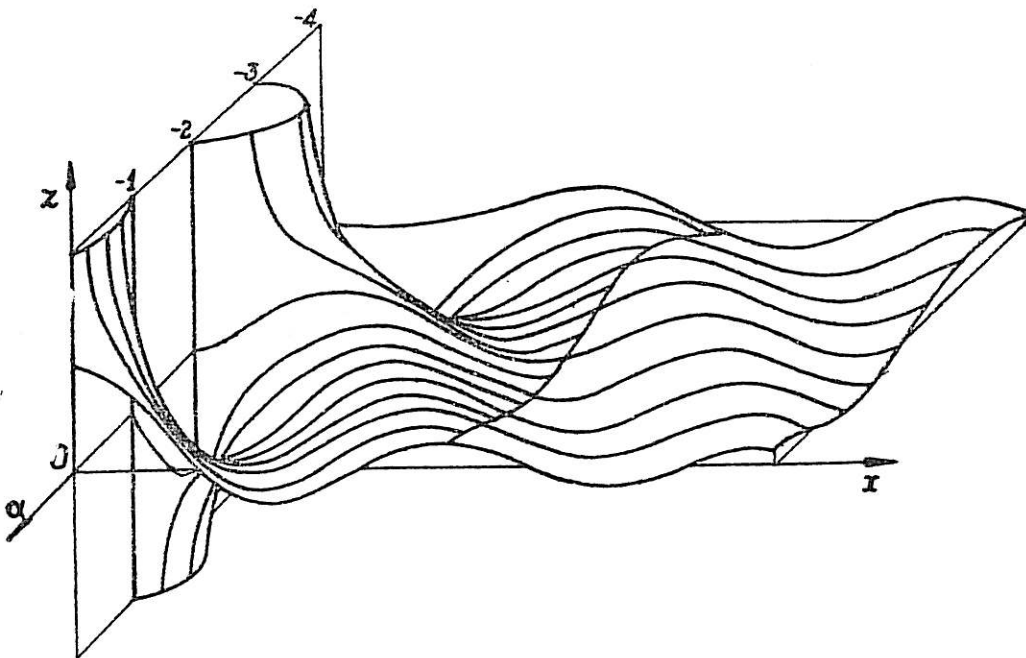
Para valores de  $\alpha$  no entero, las curvas  $J_\alpha(x)$  varían de modo muy distinto, según que sea  $\alpha$  positivo o negativo. Si  $\alpha$  es positivo, al variar de modo continuo, la curva  $J_\alpha(x)$  se deforma asimismo de modo continuo, de manera que la superficie  $z = J_\alpha(x)$ , representación de la función

(\*) En España las dos únicas monografías publicadas sobre funciones de Bessel son de ingenieros industriales. Una del Prof. E. Terradas, en la Enciclopedia Espasa (v. artículo BESSEL) modernamente ampliada en un cursillo autografiado profesado en la Escuela de Ingenieros Industriales de Madrid (año 1945); y otra del Prof. A. Colino, «Funciones de Bessel», donde el lector hallará tablas y gráficos suficientes para la técnica.

de las dos variables  $z, x$ , es continua. La figura da una imagen axonométrica de dicha superficie obtenida sin más que colocar en los planos  $\alpha=0, \alpha=1, \alpha=2, \dots$ , las curvas  $J_0, J_1, J_2, \dots$



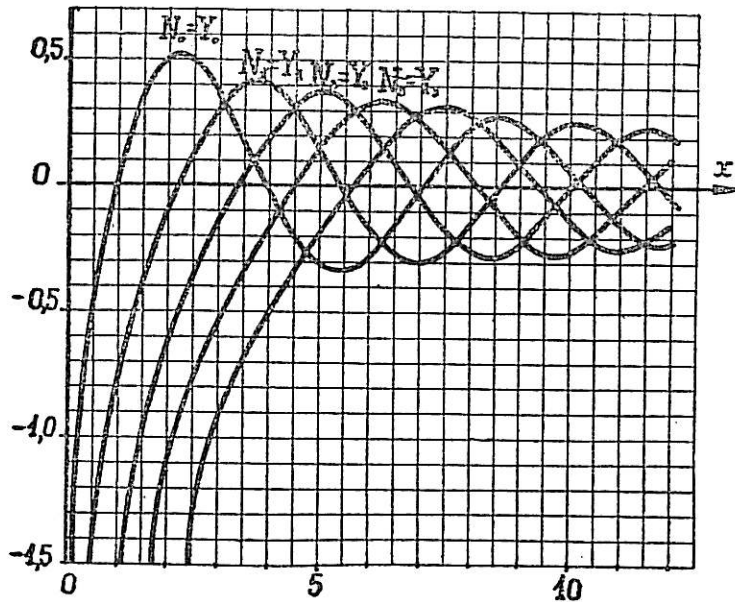
Para valores de  $\alpha$  negativos, la superficie presenta singularidades notables a lo largo del eje  $\alpha$ . En efecto, para  $x=0$  el factor  $(x/2)^{-\alpha}$  del desarrollo [12] de la lección anterior se hace infinito. Si  $\alpha$  es entero, ya vimos que la anulación de  $\alpha$  términos del desarrollo reduce  $J_{-\alpha}$  a  $(-1)^\alpha J_\alpha$  evitándose la singularidad; pero si  $\alpha$  no es entero no se anula término algu-



no de la serie y el punto  $x=0$  es infinito de  $J_{-\alpha}(x)$ . En resumen,  $J_{-\alpha}(x)$  se hace infinita para  $x=0$  excepto en los puntos  $\alpha=0, -1, -2, -3, \dots$ . Esto da a la superficie  $J_{-\alpha}(x)$  el accidentado aspecto de la figura (\*). Obsérvese en ella que las curvas  $J_{-1}(x) = -J_1(x)$ ,  $J_{-2}(x) = J_2(x)$ ,  $J_{-3}(x) = -J_3(x)$ , ... son las únicas que tienen ordenada  $z$  finita para  $x=0$ .

(\*) V. Jahnke Emde, «Funktionentafeln».

A continuación indicamos la representación gráfica de las funciones de segunda especie  $Y_\alpha$  o funciones de Neumann  $N$  equivalentes para órdenes enteros  $\alpha=0, 1, 2, 3, 4$ .



Funciones Bessel de 2.ª especie y órdenes 0, 1, 2, 3.

Omitimos el estudio de tales funciones para valores intermedios de  $\alpha$ , en primer lugar, porque no son necesarias para expresar la integral general (según vimos en la lección anterior, § 4), y en segundo lugar, porque pueden calcularse como combinación lineal de la  $J_\alpha$  y  $J_{-\alpha}$ , según la fórmula (lecc. anterior, § 5).

$$N_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x) \cos \alpha\pi - J_{-\alpha}(x)}{\sin \alpha\pi} \quad [1]$$

**2. Cálculo recurrente de las funciones de Bessel y sus derivadas.**— Dejamos, como ejercicio, al lector comprobar sumando los desarrollos en serie de  $J_{\alpha-1}$  y  $J_{\alpha+1}$  (lecc. anterior, § 4) que

$$J_{\alpha+1}(x) + J_{\alpha-1}(x) = \frac{2\alpha}{x} J_\alpha(x) \quad [2]$$

Esta relación constituye una fórmula recurrente que permite calcular  $J_{\alpha+1}$  conocidas  $J_{\alpha-1}$  y  $J_\alpha$ , o bien,  $J_{\alpha-1}$  conocidas  $J_\alpha$  y  $J_{\alpha+1}$ . Así, por ejemplo, para el cálculo de las funciones de Bessel de primera especie y órdenes enteros bastará tener tabuladas la  $J_0(x)$  y la  $J_1(x)$ . A continuación damos unas tablas de dichas funciones para valores de  $x$  comprendidos entre 0 y 10 variando de décima en décima.

TABLA DE VALORES DE  $J_0$

$x$	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9
0	1,0000	0,9975	0,9900	0,9776	0,9604	0,9385	0,9120	0,8812	0,8463	0,8075
1	0,7652	0,7196	0,6711	0,6201	0,5669	0,5118	0,4554	0,3980	0,3400	0,2818
2	0,2239	0,1666	0,1104	0,0555	0,0025	-0,0484	-0,0968	-0,1424	-0,1850	-0,2243
3	-0,2601	-0,2921	-0,3202	-0,3443	-0,3643	-0,3801	-0,3918	-0,3992	-0,4026	-0,4018
4	-0,3971	-0,3887	-0,3766	-0,3610	-0,3423	-0,3205	-0,2961	-0,2693	-0,2404	-0,2097
5	-0,1776	-0,1443	-0,1103	-0,0758	-0,0412	-0,0068	0,0270	0,0599	0,0917	0,1220
6	0,1506	0,1773	0,2017	0,2238	0,2433	0,2601	0,2740	0,2851	,2931	0,2981
7	0,3001	0,2991	0,2951	0,2882	0,2786	0,2663	0,2516	0,2346	0,2154	0,1944
8	0,1717	0,1475	0,1222	0,0960	0,0692	0,0419	0,0146	-0,0125	-0,0392	-0,0653
9	-0,0903	-0,1142	-0,1367	-0,1577	-0,1768	-0,1939	-0,2090	-0,2218	-0,2323	-0,2403



TABLA DE VALORES DE  $J_1$

x	0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9
0	0,0000	0,0499	0,0995	0,1483	0,1960	0,2423	0,2867	0,3290	0,3688	0,4059
1	0,4401	0,4709	0,4983	0,5220	0,5419	0,5579	0,5699	0,5778	0,5815	0,5812
2	0,5767	0,5683	0,5560	0,5399	0,5202	0,4971	0,4798	0,4416	0,4097	0,3754
3	0,3391	0,3009	0,2613	0,2207	0,1792	0,1374	0,0955	0,0538	0,0128	-0,0272
4	-0,0660	-0,1033	-0,1386	-0,1719	-0,2028	-0,2311	-0,2566	-0,2791	-0,2985	-0,3147
5	-0,3276	-0,3371	-0,3432	-0,3460	-0,3453	-0,3414	-0,3343	-0,3241	-0,3110	-0,2951
6	-0,2767	-0,2559	-0,2329	-0,2081	-0,1816	-0,1538	-0,1250	-0,0953	-0,0652	-0,0349
7	-0,0047	0,0252	0,0543	0,0826	0,1096	0,1352	0,1592	0,1813	0,2014	0,2192
8	0,2346	0,2476	0,2580	0,2657	0,2708	0,2731	0,2728	0,2697	0,2641	0,2559
9	0,2453	0,2324	0,2174	0,2004	0,1816	0,1613	0,1395	0,1166	0,0928	0,0684

Derivando el desarrollo de  $J_\alpha(x)$ , que es de la forma  $J_\alpha(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha [serie S(x)]$  se obtiene  $\frac{d}{dx} J_\alpha(x) = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha-1} S(x) + \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha S'(x)$ . Al multiplicar por  $x$  resulta, como puede comprobar el lector desarrollando  $S'(x)$

$$x \frac{d}{dx} J_\alpha(x) = \alpha J_\alpha(x) - x J_{\alpha+1}(x) \tag{3}$$

Fórmula que permite calcular fácilmente la derivada de una función de Bessel de primera especie combinando esta función con la de orden superior en una unidad. Utilizando además la fórmula recurrente anterior podremos expresar toda derivada de una función  $J_\alpha(x)$  de orden  $\alpha$  entero mediante combinación de  $J_0$  y  $J_1$ . En particular  $J'_0(x) = -J_1(x)$ .

Si multiplicamos ambos miembros de la fórmula [1], que define la función de Neumann por  $\frac{2\alpha}{x}$  y sustituímos en el segundo

$$\frac{2\alpha}{x} J_\alpha \quad y \quad \frac{-2\alpha}{x} J_{-\alpha}$$

respectivamente [2] por  $(J_{\alpha+1} + J_{\alpha-1})$  y  $(J_{-\alpha+1} + J_{-\alpha-1})$

teniendo en cuenta que  $\cos(\alpha \pm 1)\pi = -\cos \alpha\pi$ ,  $\sin(\alpha \pm 1)\pi = -\sin \alpha\pi$ ,

resulta 
$$\frac{2\alpha}{x} N_\alpha(x) = N_{\alpha+1}(x) + N_{\alpha-1}(x) \tag{4}$$

y como al pasar al límite para valores enteros de  $\alpha$  la relación subsiste, vemos que entre las funciones de Bessel de segunda especie existe la misma relación recurrente que entre las de primera, y asimismo derivando [1] se ve que es generalizable a estas funciones la relación [3]

$$x \frac{d}{dx} N_\alpha(x) = \alpha N_\alpha(x) - x N_{\alpha+1}(x) \tag{5}$$

lo que, en definitiva, permitirá expresar las funciones de Bessel de segunda especie y sus derivadas para órdenes enteros en función de  $N_0(x) = Y_0(x)$  y  $N_1(x) = Y_1(x)$ . A continuación damos tablas de valores de estas funciones entre  $0 < x < 10$ .



TABLA DE VALORES DE  $N_0 = Y_0$ .

$x$	0	,1	,2	,3	,4	,5	6	,7	,8	,9
0	$-\infty$	-1,5342	-1,0811	-0,8073	-0,6060	-0,4445	-0,3085	-0,1907	-0,0868	0,0056
1	0,0883	0,1622	0,2281	0,2865	0,3379	0,3824	0,4204	0,4520	0,4774	0,4968
2	0,5104	0,5183	0,5208	0,5181	0,5104	0,4981	0,4813	0,4605	0,4359	0,4079
3	0,3769	0,3431	0,3071	0,2691	0,2296	0,1890	0,1477	0,1061	0,0645	0,0234
4	-0,0169	-0,0561	-0,0938	-0,1296	-0,1633	-0,1947	-0,2235	-0,2494	-0,2723	-0,2921
5	-0,3085	-0,3216	-0,3313	-0,3374	-0,3402	-0,3395	-0,3354	-0,3282	-0,3177	-0,3044
6	-0,2882	-0,2694	-0,2483	-0,2251	-0,1999	-0,1732	-0,1452	-0,1162	-0,0864	-0,0563
7	-0,0259	0,0042	0,0339	0,0628	0,0907	0,1173	0,1424	0,1658	0,1872	0,2065
8	0,2235	0,2381	0,2501	0,2595	0,2662	0,2702	0,2715	0,2700	0,2659	0,2592
9	0,2499	0,2383	0,2245	0,2086	0,1907	0,1712	0,1502	0,1279	0,1045	0,0804

TABLA DE VALORES DE  $N_1 = Y_1$ .

$x$	0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9
0	$-\infty$	-6,4590	-3,3238	-2,2931	-1,7819	-1,4715	-1,2604	-1,1032	-0,9781	-0,8731
1	-0,7812	-0,6991	-0,6211	-0,5485	-0,4791	-0,4123	-0,3476	-0,2847	-0,2237	-0,1644
2	-0,1070	-0,0517	0,0015	0,0523	0,1005	0,1459	0,1884	0,2276	0,2635	0,2959
3	0,3247	0,3496	0,3707	0,3879	0,4010	0,4102	0,4154	0,4167	0,4141	0,4078
4	0,3979	0,3846	0,3680	0,3484	0,3260	0,3010	0,2737	0,2445	0,2136	0,1812
5	0,1479	0,1137	0,0792	0,0445	0,0101	-0,0238	-0,0568	-0,0887	-0,1192	-0,1481
6	-0,1750	-0,1998	-0,2223	-0,2422	-0,2596	-0,2741	-0,2857	-0,2945	-0,3002	-0,3029
7	-0,3027	-0,2995	-0,2934	-0,2846	-0,2731	-0,2591	-0,2428	-0,2243	-0,2039	-0,1817
8	-0,1581	-0,1331	-0,1072	-0,0806	-0,0535	-0,0262	0,0011	0,0280	0,0544	0,0799
9	0,1043	0,1275	0,1491	0,1691	0,1871	0,2032	0,2171	0,2287	0,2379	0,2447

**3. Funciones de Bessel de orden  $n + \frac{1}{2}$  ( $n$  entero).** — Es interesante consignar que las funciones de Bessel de primera especie  $J_\alpha(x)$  se reducen, para valores de  $\alpha = n + \frac{1}{2}$  ( $n$  entero), a combinaciones de funciones  $\sin x$ ,  $\cos x$  y funciones racionales en  $x$  y  $\sqrt{x}$ .

En efecto,

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{2!\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{3!\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} + \dots \right]$$

Pero recordemos (tomo I, lecc. 14) que  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 2}\sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2}\sqrt{\pi}, \dots$$

con lo que sustituyendo

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ 2 - \frac{2x^2}{1 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{2x^4}{2^2 \cdot 2! \cdot 3 \cdot 5} - \frac{2x^6}{2^3 \cdot 3! \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots \right] = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right] \end{aligned}$$

o sea 
$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen} x$$

Análogamente 
$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{cos} x$$

Ahora bien, la fórmula [2] permite obtener

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \frac{1}{x} J_{\frac{1}{2}}(x) - J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left( \frac{1}{x} \operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x \right)$$

Por aplicación reiterada de la fórmula de recurrencia obtendremos  $J_{n+\frac{1}{2}}$  que será de la forma

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} [R_1(x) \operatorname{sen} x + R_2(x) \operatorname{cos} x]$$

siendo  $R_1, R_2$  funciones racionales en  $x$ .

Puesto que para  $\alpha = \frac{1}{2}$  la función de Bessel  $J_{\frac{1}{2}}$  es conocida, es de esperar que la ecuación de Bessel para este valor de  $\alpha$  pueda asimismo reducirse a algún tipo conocido. Así es, en efecto; haciendo en la ecuación  $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$  el cambio  $z = \sqrt{x}$  resulta  $x^2 z'' + (1 - 2\alpha)xz' + \alpha^2 z = 0$ , que para  $\alpha = \frac{1}{2}$  se reduce a  $z'' + z = 0$  de integral general  $z = A \operatorname{cos} x + B \operatorname{sen} x$ . Por tanto, la integral general de la de Bessel será en este caso  $y = z x^{-\alpha} = \frac{1}{\sqrt{x}} (A \operatorname{cos} x + B \operatorname{sen} x)$ .

**4. Problemas de contorno en relación con la ecuación de Bessel. Los ceros de las funciones de primera especie.**—Apliquemos lo dicho en el párrafo 3 de la lección 13 relativo a los problemas sobre funciones y valores propios, tomando como primer miembro de la ecuación [1] de dicho párrafo el primer miembro de la ecuación de Bessel  $y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right)y = 0$ .

Vamos a pasar a una ecuación de la forma

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(\lambda - \frac{\alpha^2}{x^2}\right)y = 0 \quad [6]$$

que se puede escribir en la forma canónica de Liouville sin más que multiplicarla por  $x$  (compárese con Lecc. 13, § 3, ec. 4)

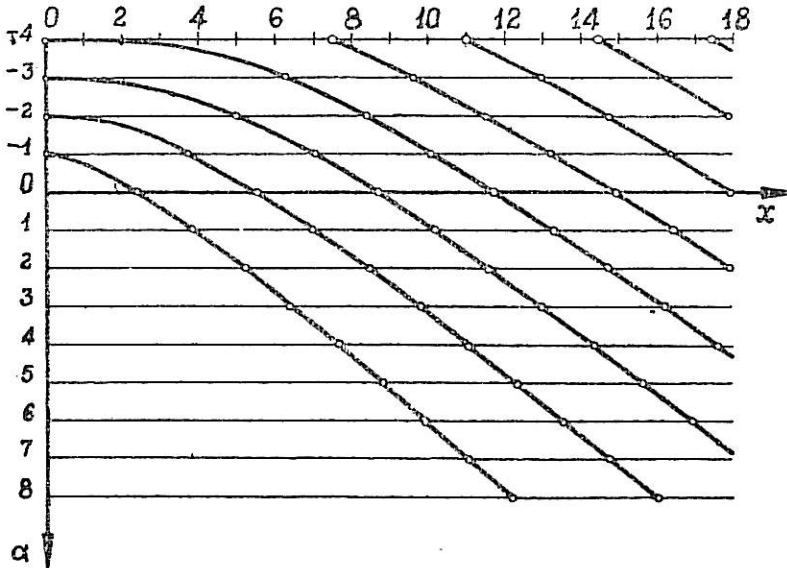
$$\frac{d}{dx}(xy') + \left(-\frac{\alpha^2}{x} + \lambda x\right)y = 0 \quad [7]$$

Si agregamos las condiciones de contorno  $y(0) = 0, y(1) = 0$  veamos cuáles son los autovalores del problema. Sabemos (§ 5 de la Lecc. anterior) que la ecuación [6] se verifica para  $J_\alpha(\sqrt{\lambda}x)$ , función que cumple asimis-

mo la primera condición de contorno. Si queremos que cumpla la segunda, deberá ser

$$J_a(\sqrt{\lambda}) = 0 \tag{8}$$

Las raíces de esta ecuación son los autovalores buscados.



Tiene, pues, gran interés en Física matemática el conocimiento de los ceros de las funciones de Bessel de primera especie, puesto que sus cuadrados

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_n \tag{9}$$

son los autovalores que necesita el ingeniero y el físicomatemático.

Con objeto de hacer más fácilmente visible al lector la disposición de los ceros sucesivos de las funciones de Bessel de primera especie, representamos en la figura la intersección de la superficie  $z = J_a(x)$  de las dos variables  $\alpha, x$  con el plano horizontal  $z = 0$  (v. figura pág. 151). Damos además una tabla de valores de los 10 primeros ceros para los órdenes  $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4$  y  $5$ .

Ceros de las funciones  $J_a$  para  $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4, 5$   
( $n$  número de orden del cero)

$n$	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$\alpha = 4$	$\alpha = 5$
1.º	2,4048	3,8317	5,1356	6,3802	7,5883	8,7715
2.º	5,5201	7,0156	8,4172	9,7610	11,0647	12,3386
3.º	8,6537	10,1735	11,6198	13,0152	14,3725	15,7002
4.º	11,7915	13,3237	14,7960	16,2235	17,6160	18,9801
5.º	14,9309	16,4706	17,9598	19,4094	20,8269	22,2178
6.º	18,0711	19,6159	21,1170	22,5827	24,0190	25,4303
7.º	21,2116	22,7601	24,2701	25,7482	27,1991	28,6266
8.º	24,3525	25,9037	27,4206	28,9084	30,3710	31,8117
9.º	27,4935	29,0468	30,5692	32,0649	33,5371	34,9888
10	30,6346	32,1897	33,7165	35,2187	36,6990	38,1599

Si el lector calcula las diferencias entre dos ceros consecutivos se dará cuenta de que tienden a valer  $\pi$ . Así la diferencia entre las raíces  $40^a$  y  $39^a$  de  $J_1(x) = 0$  es  $\approx 3,141668\dots$

Para más detalles, consúltense las tablas de *Jahnke Emde* o las contenidas en la obra fundamental de *Watson* «A treatise on the Theory of Bessel functions».

**5. Ortogonalidad y desarrollo en funciones Bessel.**—Las funciones propias correspondientes a los autovalores [9] son :

$$J_\alpha(V\bar{\lambda}_1 x) \quad J_\alpha(V\bar{\lambda}_2 x) \dots J_\alpha(V\bar{\lambda}_n x) \dots$$

Aplicando lo visto en el párrafo 4 de la lección 14, podemos, pues, afirmar (teniendo en cuenta que aquí es  $r \equiv x$ ): *La sucesión de funciones*

$$V\bar{x} J_\alpha(V\bar{\lambda}_1 x), \quad V\bar{x} J_\alpha(V\bar{\lambda}_2 x), \quad \dots \quad V\bar{x} J_\alpha(V\bar{\lambda}_n x) \dots$$

*es una sucesión ortogonal en el intervalo [0, 1].*

Es decir,

$$\int_0^1 x J_\alpha(V\bar{\lambda}_m x) J_\alpha(V\bar{\lambda}_n x) dx = 0$$

$$\int_0^1 x J_\alpha^2(V\bar{\lambda}_n x) dx = k_n \neq 0$$

Toda función  $\varphi(x)$  que cumpla las condiciones de contorno  $\varphi(0)=0$ ,  $\varphi(1)=0$ , y además condiciones muy amplias de derivabilidad y continuidad (por ejemplo la de admitir derivadas primera y segunda parcialmente continuas) (\*) podrá ser desarrollada en serie de funciones Bessel de orden  $\alpha$ , en la forma

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i V\bar{x} J_\alpha(V\bar{\lambda}_i x) \quad \text{donde} \quad c_i = \frac{1}{k_i} \int_0^1 \varphi(x) J_\alpha(V\bar{\lambda}_i x) V\bar{x} dx$$

Para  $\alpha = \frac{1}{2}$  la sucesión de autofunciones obtenidas coincide con la de funciones senoidales  $\text{sen } \pi x$ ,  $\text{sen } 2\pi x$ , ... y los desarrollos en serie son del tipo Fourier trigonométrico.

**6. Aproximaciones asintóticas de las funciones de Bessel.**—Hemos dicho que los ceros de las funciones de Bessel  $J_\alpha(x)$  tienden a ser equidistantes a intervalos de amplitud  $\pi$  al crecer  $x$ . La razón de este hecho se comprende al estudiar las llamadas expresiones asintóticas de dichas funciones.

Los desarrollos de las  $J_\alpha(x)$  en serie, obtenidas en la lección anterior, son rápidamente convergentes para valores pequeños de  $x$ ; pero para grandes valores de  $x$  su lenta convergencia las hace impropias para el cálculo numérico y se prefiere entonces sustituirlas por expresiones asintóticas, es decir, expresiones que se aproximan a  $J_\alpha(x)$  al crecer  $x$  y que son más cómodas de calcular.

(\*) V. Lección 13, § 4 y *Courant-Hilbert*, loc. cit.

Son varias las expresiones asintóticas usadas, según la aproximación deseada. Citaremos solamente las siguientes, sumamente cómodas y de aproximación suficiente en las aplicaciones.

$$\text{para } x \text{ grande} \left\{ \begin{array}{l} J_0(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \quad J_\alpha(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ Y_0(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \quad Y_\alpha(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \text{sen}\left(x - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \end{array} \right. \quad [10]$$

cuyos ceros son los de los factores trigonométricos y, por tanto, de período  $\pi$ .

Un cálculo rápido aunque poco riguroso, permite prever la naturaleza de estas expresiones asintóticas, basta ensayar funciones de la forma  $y = x^\alpha e^{\lambda x}$  que casi satisfagan a la ecuación diferencial de Bessel para grandes valores de  $x$ . Así, por ejemplo, sustituyendo esta función en la ecuación  $y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$  (a la que satisface  $J_0(x)$ ) resulta

$$x^\alpha e^{\lambda x} \left[ (1 + \lambda^2) + \lambda \frac{2\alpha + 1}{x} + \frac{\alpha^2}{x^2} \right] = 0$$

La anulación idéntica de todo el paréntesis no puede lograrse, pues sólo disponemos de dos parámetros  $\alpha$  y  $\lambda$ , pero anulando el término en  $\frac{1}{x}$  y el independiente, es decir para  $\lambda = \pm j$ ,  $\alpha = -\frac{1}{2}$  el primer miembro se reduce a  $-\frac{1}{\sqrt{x}} e^{\pm jx} \frac{1}{4x^2}$  que tiende rápidamente a cero al crecer  $x$ . Son, pues, casi soluciones para grandes valores de  $x$  funciones de la forma  $\frac{K_1}{\sqrt{x}} e^{+jx} + \frac{K_2}{\sqrt{x}} e^{-jx}$  o bien  $C_1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\text{sen } x}{\sqrt{x}}$  forma a que pertenecen precisamente las expresiones asintóticas antes indicadas.

**7. Las funciones  $J_\alpha$  de índice entero obtenidas como coeficientes del desarrollo de una función exponencial.**—Otra forma en que también se obtienen las funciones de Bessel de primera especie, particularmente cómoda para la deducción de muchas de sus propiedades, es desarrollando en serie de potencias de  $h$  la función  $e^{\frac{x}{2}\left(h - \frac{1}{h}\right)}$ . Si multiplicamos, en efecto, los dos desarrollos en serie

$$e^{+\frac{1}{2}xh} = 1 + \frac{x}{2}h + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{h^2}{2!} + \left(\frac{x}{2}\right)^3 \frac{h^3}{3!} + \dots$$

$$e^{-\frac{1}{2}\frac{x}{h}} = 1 - \frac{x}{2}\frac{1}{h} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{1}{2!h^2} - \left(\frac{x}{2}\right)^3 \frac{1}{3!h^3} + \dots$$

y recordando los desarrollos de  $J_n$  y  $J_{-n} = (-1)^n J_n$  se comprueba sin dificultad que

$$e^{\frac{1}{2}xh} \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{x}{h}} = J_0(x) + h J_1(x) + h^2 J_2(x) + \dots \\ + \frac{1}{h} J_{-1}(x) + \frac{1}{h^2} J_{-2}(x) + \dots$$

es decir,

$$e^{\frac{x}{2}\left(h-\frac{1}{h}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h^n J_n(x) = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ h^n + \left(\frac{-1}{h}\right)^n \right] J_n(x) \quad [11]$$

Las funciones de Bessel  $J_n(x)$  para  $n$  entero positivo o negativo son, pues, los coeficientes de las potencias (positivas o negativas) de  $h$  en el desarrollo de esta exponencial.

**8. Expresión de las funciones de Bessel de primera especie mediante integrales definidas.**—Si en el desarrollo que acabamos de obtener ponemos

mos  $h = e^{j\varphi}$  ( $j = \sqrt{-1}$ ) se tendrá:  $h - \frac{1}{h} = e^{j\varphi} - e^{-j\varphi} = 2j \operatorname{sen} \varphi$

$$h^n + \left(\frac{-1}{h}\right)^n = \begin{cases} e^{nj\varphi} + e^{-nj\varphi} = 2 \cos n\varphi & \text{para } n=2k \text{ (par)} \\ e^{nj\varphi} - e^{-nj\varphi} = 2j \operatorname{sen} n\varphi & \text{para } n=2k-1 \text{ (impar)} \end{cases}$$

El primer miembro de [11] tomará la forma

$$e^{\frac{x}{2}\left(h-\frac{1}{h}\right)} = e^{jx \operatorname{sen} \varphi} = \cos(x \operatorname{sen} \varphi) + j \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \varphi)$$

y el segundo se convertirá en

$$J_0(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x) \cos 2k\varphi + 2j \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(x) \operatorname{sen}(2k-1)\varphi$$

Igualando las partes reales y las imaginarias se obtienen los siguientes interesantes resultados:

$$\begin{aligned} \cos(x \operatorname{sen} \varphi) &= J_0(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x) \cos 2k\varphi \\ \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \varphi) &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(x) \operatorname{sen}(2k-1)\varphi \end{aligned} \quad [12]$$

Los segundos miembros son, pues, los desarrollos en serie de Fourier de las funciones de  $\varphi$  de los primeros miembros. Los coeficientes satisfacen, por tanto, las relaciones de Euler

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(x \operatorname{sen} \varphi) d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \operatorname{sen} \varphi) d\varphi \quad [13]$$

$$J_{2k}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(x \operatorname{sen} \varphi) \cos 2k\varphi d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \operatorname{sen} \varphi) \cos 2k\varphi d\varphi$$

(por la paridad de la función subintegral), y análogamente

$$J_{2k-1}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{sen}(2k-1)\varphi d\varphi \quad [14]$$



De ambas se desprende para cualquier  $n$  entero

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - x \operatorname{sen} \varphi) d\varphi$$

Pues desarrollando el coseno se desdobra la integral en suma de dos

$$\int_0^{+\pi} \cos n\varphi \cos(x \operatorname{sen} \varphi) d\varphi \quad \int_0^{+\pi} \operatorname{sen} n\varphi \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \varphi) d\varphi$$

la primera de las cuales toma el valor [13] para  $n=2k$  y el valor nulo para  $n=2k-1$  (\*), y la segunda toma el valor [14] para  $n=2k-1$  y el valor nulo para  $n=2k$  (\*\*).

### 9. Funciones relacionadas con las de Bessel, de interés en las aplicaciones.

FUNCIONES DE HANKEL.—Son funciones complejas de variable real, cuyas componentes real e imaginaria son las Bessel de primera y segunda especie, respectivamente. Se distinguen dos clases, según el signo de las componentes imaginarias

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + j Y_\nu(x)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - j Y_\nu(x)$$

Su cálculo se reduce al manejo de las tablas de  $J$  e  $Y$ . Para grandes valores de  $x$  se tendrán, aplicando [10] los valores asintóticos,

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{j\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \quad H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-j\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

FUNCIONES DE BESSEL MODIFICADAS.—Se obtienen las de primera especie  $I_\nu$  sustituyendo en las de Bessel ordinarias la variable real  $x$  por la imaginaria pura  $jx$ , definiéndose así:

$$J_\nu(jx) = j^\nu I_\nu(x).$$

Recordando el desarrollo en serie de  $J_\nu$  se comprueba fácilmente que al sustituir  $x$  por  $jx$  se puede sacar el factor  $j$  ( $\nu$  entero), con lo que queda la serie real

$$I_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}$$

Como función modificada de segunda especie se define para valores no enteros

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\operatorname{sen} \nu\pi}$$

y el límite de esta expresión para  $\nu \rightarrow n$  entero.

(\*) Por ser opuestos los valores del integrando en puntos equidistantes de los extremos  $\cos n(\pi-\varphi) \cos[x \operatorname{sen}(\pi-\varphi)] = -\cos n\varphi \cos(x \operatorname{sen} \varphi) d\varphi$ .

(\*\*) Por análoga razón. En esta forma de integral se le presentaron a Bessel al desarrollar en serie la anomalía excéntrica de un planeta.

Las funciones modificadas satisfacen a la ecuación diferencial

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$$

que resulta de efectuar el cambio indicado ( $x$  por  $jx$ ) en la ecuación de Bessel. Estas funciones ya no oscilan y se comportan como exponenciales.

En particular,  $I_0$  tiene como valor asintótico

$$I_0 \cong \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$$

FUNCIONES *ber*, *bei*, *ker* y *kei*.—Aparecen las funciones *ber* y *bei* (abreviaturas de *bessel real* y *bessel imaginaria*) al considerar las partes real e imaginaria de las funciones de Bessel de primera especie de argumento  $x\sqrt{-j}$ , de modo que

$$J_\nu(x\sqrt{-j}) = ber_\nu x + j bei_\nu x$$

En particular resulta

$$ber_0 x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k}}{(2k!)^2 2^{4k}} \quad bei_0 x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k+2}}{[(2k+1)!]^2 2^{4k+2}}$$

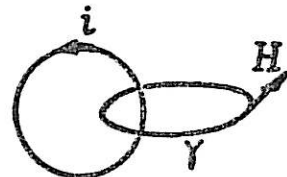
Análogamente se definen las *ker* y *kei* partiendo de las funciones  $K$  para el argumento  $x\sqrt{j}$

$$j^{-\nu} K_\nu(\sqrt{j} x) = ker_\nu x + j kei_\nu x$$

**10. Aplicación de las funciones de Bessel al estudio del efecto pelicular.**—Ya hemos dicho que son innumerables las aplicaciones de las funciones de Bessel, especialmente en fenómenos físicos con simetría cilíndrica. Nos daremos cuenta de la razón de ello al expresar mediante coordenadas cilíndricas ecuaciones en las que aparece el operador laplaciano. Nos limitaremos aquí a exponer una de las recientes aplicaciones a la técnica de alta frecuencia. Se trata del llamado efecto pelicular (*skin-effect*) que se presenta en los conductores recorridos por corrientes de gran frecuencia y en virtud del cual los electrones tienden a circular por la superficie del conductor, disminuyendo prácticamente la sección útil de éste (de aquí el uso de conductores tubulares). Tratemos, pues, de averiguar cómo se distribuye la densidad de corriente en un conductor cilíndrico por el que circula una tal corriente.

Según una ley bien conocida de electromagnetismo, un circuito de intensidad  $I$  crea un campo magnético  $H$  cuya circulación a lo largo de toda curva cerrada  $\gamma$  que dé una vuelta alrededor del conductor vale  $4\pi I$ ; es decir,

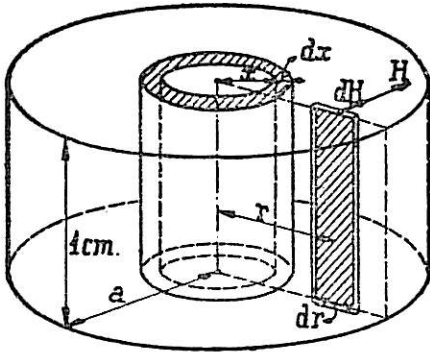
$$\int_{\gamma} H \cdot ds = 4\pi I$$



En particular, si por un tubo de radio  $x$ , espesor  $dx$  y longitud indefinida, circula en un cierto instante una corriente de densidad  $\sigma(x)$ , el campo  $dH$  creado en dicho instante a distancia  $r > x$  cumplirá (por ser  $dH$  perpendicular a  $r$  en cada punto)

$$2\pi r dH = 4\pi \cdot \underbrace{\sigma(x) 2\pi x dx}_{dI} \quad \text{de donde} \quad dH = \frac{4\pi \sigma x}{r} dx$$

Integrando entre 0 y  $r$  y multiplicando por la permeabilidad  $\mu$  tendremos el valor del campo  $H$  creado en el seno del conductor cilíndrico a la distancia  $r$  del eje



$$H = \frac{4\pi\mu}{r} \int_0^r x \sigma dx \quad [1]$$

Veamos ahora otra relación entre  $H$  y la densidad  $\sigma$ , que suponemos variable además con  $t$  (corriente alterna). Consideremos para ello un rectángulo de ancho  $dr$  y largo 1 cm. colocado en el plano meridiano a la distancia  $r$  y atravesado, por tanto, por el flujo  $H dr$ . La derivada de este flujo respecto del tiempo, según otra ley bien conocida, es igual a la f. e. m. engendrada en un circuito elemental de sección  $\omega$  a lo largo del perímetro del referido rectángulo, f. e. m. que puede asimismo

formularse como el incremento  $R di$  de la diferencia de potencial entre los extremos de los lados de dicho rectángulo paralelos al eje. De donde ( $R$  resistencia de cada lado,  $\rho$  resistividad)

$$\frac{\partial H}{\partial t} dr = R di = \frac{\rho}{\omega} \cdot \omega d\sigma = \rho d\sigma \quad \text{o bien} \quad \frac{\partial H}{\partial t} = \rho \frac{\partial \sigma}{\partial r} \quad [2]$$

De las dos relaciones [1] y [2] podemos obtener una ecuación diferencial de  $\sigma$  por derivación previa de [1] respecto de  $r$  y por eliminación posterior de  $H$ . Resulta fácilmente

$$\frac{\partial H}{\partial r} = 4\pi\mu\sigma - \frac{4\pi\mu}{r^2} \int_0^r x \sigma dx = 4\pi\mu\sigma - \frac{H}{r}$$

e igualando la derivada de esta expresión respecto de  $t$  con la derivada de [2], respecto de  $r$ , se elimina la  $H$  quedando

$$4\pi\mu \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial t} = 4\pi\mu \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\rho}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial r} = \rho \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2}$$

Si la corriente variable que circula por el conductor es alterna de la forma  $\sigma = \sigma(r)e^{j\omega t}$  se tendrá,  $\frac{\partial \sigma}{\partial t} = j\omega\sigma$  y, poniendo  $\frac{4\pi\mu\omega}{\rho} = k^2$  queda en definitiva la ecuación que da  $\sigma(r)$ ,

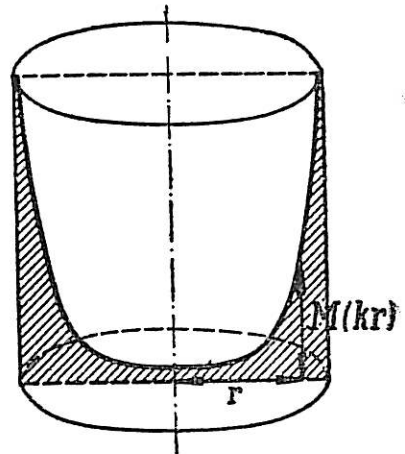
$$\frac{d^2 \sigma}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\sigma}{dr} - jk^2 \sigma = 0$$

ecuación de tipo Bessel cuya solución (teniendo en cuenta que debe ser finita para  $r=0$ , lo que excluye las funciones de segunda especie) es de la forma

$$\begin{aligned} \sigma(r) &= C J_0(\sqrt{-j} kr) = \sigma(a) \frac{J_0(\sqrt{-j} kr)}{J_0(\sqrt{-j} ka)} = \\ &= \sigma(a) \frac{ber_0(kr) + j hei_0(kr)}{ber_0(ka) + j bei_0(ka)} \end{aligned}$$

siendo  $a$  el radio del conductor y  $\sigma(a)$  la densidad de corriente en la superficie.

El módulo  $M(kr)$  del numerador es una función que crece rápidamente con  $r$  para grandes valores de  $k$ , es decir, de  $\omega$  y, por tanto, de la frecuencia. La variación de este módulo es de la forma indicada en la figura para frecuencias del orden de  $10^6$  ciclos por segundo, de tal modo que la mayor parte de la corriente circula por una capa superficial de espesor  $\frac{1}{\delta}$ .



del radio. En cambio, para la frecuencia de usos industriales (50 períodos por segundo) el fenómeno es prácticamente imperceptible.

Junto a las variaciones del módulo  $M(kr)$  es interesante consignar la considerable variación del argumento o fase  $\theta(kr)$  del referido numerador, variación que llega a producir (para grandes frecuencias) la inversión del sentido de la corriente en algunas zonas anulares del conductor (\*).

**11. Fórmulas de interés para el desarrollo en serie de funciones Bessel.** Completando lo dicho en los §§ 4 y 5 veamos el valor de las constantes  $k_n$  que se utilizan en el cálculo de los coeficientes de los desarrollos en series de funciones Bessel concretándonos de momento a los que se obtienen mediante las de orden cero, desarrollos de los que hemos de hacer aplicación más adelante. Recordemos que  $k_n$  viene dada por

$$k_n = \int_0^1 x J_0^2(\xi_n x) dx$$

siendo  $\xi_n$  el enésimo cero positivo de  $J_0(x)$ . Para calcular esta integral hemos de volver sobre una fórmula obtenida en el § 4 de la lección 14.

Sea  $y$  una solución de la ecuación de Liouville  $\frac{d}{dx}(py') + (q + \lambda r)y = 0$  y sea  $y_n$  una solución de la ecuación análoga  $\frac{d}{dx}(py'_n) + (q + \lambda_n r)y_n = 0$ .

Multiplicando la primera por  $y_n$  y la segunda por  $y$ , restando e integrando en un intervalo cualquiera  $[a, b]$  se obtiene, como allí,

$$(\lambda - \lambda_n) \int_a^b r y y_n dx = [p(y y'_n - y_n y')]_a^b$$

Aplicando esta relación en el intervalo  $[0, 1]$  a la ecuación  $\frac{d}{dx}(xy') + \xi^2 xy = 0$ , y a la análoga en  $\xi_n$ , cuyas soluciones son  $J_0(\xi x)$ ,  $J_0(\xi_n x)$ , se tendrá:

$$(\xi^2 - \xi_n^2) \int_0^1 x J_0(\xi x) J_0(\xi_n x) dx = [x(\xi_n J'_0(\xi_n x) J_0(\xi x) - \xi J'_0(\xi x) J_0(\xi_n x))]_0^1$$

Si tomamos como  $\xi_n$  un cero de  $J_0$ , al limitar entre 0 y 1 queda simplemente

$$\int_0^1 x J_0(\xi x) J_0(\xi_n x) dx = \frac{\xi_n J'_0(\xi_n) J_0(\xi)}{\xi^2 - \xi_n^2}$$

y tomando límites para  $\xi \rightarrow \xi_n$  y aplicando la regla de l'Hôpital

$$k_n = \int_0^1 x J_0^2(\xi_n x) dx = \lim_{\xi \rightarrow \xi_n} \frac{\xi_n J'_0(\xi_n) J'_0(\xi)}{2\xi} = \frac{1}{2} [J'_0(\xi_n)]^2$$

(\*) Para más detalles matemáticos sobre tan interesante fenómeno puede consultar el lector la obra de N. W. McLachlan «Bessel functions for Engineers», donde hallará otras muchas aplicaciones de las funciones de Bessel con numerosos ejemplos resueltos.

que puede sustituirse por  $\frac{1}{2} J_1^2(\xi_n)$  recordando que  $J_0' = -J_1$  (§ 2, fórmula [3]).

La fórmula es generalizable a las  $J_\alpha$ . Se obtiene igualmente

$$\int_0^1 x J_\alpha^2(\xi_n x) dx = \frac{1}{2} [J_\alpha'(\xi_n)]^2$$

que resulta también

$$= \frac{1}{2} J_{\alpha+1}^2(\xi_n)$$

como se ve aplicando la relación (3) § 2 para  $x = \xi_n$  y teniendo en cuenta que  $J_\alpha(\xi_n) = 0$ .

### EJERCICIOS

- 1.º Indicar cuáles son las soluciones de la ecuación  $x D(x D y) + a^2 x^2 y = 0$ .
- 2.º Idem  $x D(x D y) + a^2 x^2 y = b x^2$ . Ensáyese  $y = m$  (constante).
- 3.º Integrar  $x^2 y'' + 3x y' + (k^2 x^2 + 1)y = 0$  (cambio  $y = z/x$ ).
- 4.º Integrar  $y'' + \frac{1}{x} y' + 4 \left( x^2 - \frac{n^2}{x^2} \right) y = 0$  (cambio de variable  $u = x^2$ ).
- 5.º Integrar  $y'' + \frac{1}{x} y' + k^2 \frac{y}{x} = 0$  (cambio de variable  $u = \sqrt{x}$ ). Esta ecuación se presenta al estudiar el movimiento de una cadena colgada por un extremo.
- 6.º  $x y'' + y' + 4x y = 0$ . Integral particular que dé  $y(1) = 1$ ,  $y(2, 2) = -3$ .
- 7.º Expresar  $J_1'(x)$ ,  $Y_1'(x)$  respectivamente en función de  $J_1(x)$ ,  $J_0(x)$  y  $Y_1(x)$ ,  $Y_0(x)$ .
- 8.º Integral particular de  $4x^2 y'' + 4x y' + (x^2 - 4)y = 0$  que dé  $y(2) = 3$ ,  $y'(2) = 0$ .
- 9.º Representar las funciones  $J_{\frac{1}{2}}(x)$  y  $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ .
10. Representar las funciones  $J_0(x^2)$  y  $J_1(x^2)$  entre 0 y 3.
11. Integral particular de  $4x^2 + 4x y' + (x^2 - 1)y = 0$  que dé  $y(\pi) = 1$ ,  $y(2\pi) = 0$ .
12. Resolver gráficamente  $x^2 = J_0(x)$ . Idem  $2J_1(x) = 1$ .
13. Resolver gráficamente  $x = Y_0(x) + 1$ . Idem  $Y_1(x) + x^2 = 0$ .
14. Demostrar  $D[x^{n+1} J_{n+1}(x)] = x^{n+1} J_n(x)$ ;  $D[x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x)$ .
15. Demostrar  $x D J_n(x) = x J_{n-1}(x) - n J_n(x)$ .
16. Hallar la expresión de  $J_{-\frac{3}{2}}(x)$  en función de  $\sin x$  y  $\cos x$ .
17. Expresar  $J_3(x)$  y  $J_3'(x)$  en función de  $J_0(x)$  y  $J_1(x)$ .
18. Demostrar manejando los desarrollos en serie que  $2J_n'(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$ . Deducir de esta relación la que da  $J_n$  en función de  $J_n$  y  $J_{n-1}$ .
19. Demostrar que  $\cos x = J_0(x) - 2[J_2(x) - J_4(x) + J_6(x) \dots]$ ;  
 $\sin x = 2[J_1(x) - J_3(x) + J_5(x) - \dots]$
20. Desarrollar en serie de func. Bessel de orden cero la función  $y = 1$  entre 0 y 1;

## Capítulo VI.—SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

### LECCIÓN 17.—GENERALIDADES. SISTEMAS LINEALES

1. **Sistema a que satisface una congruencia de curvas.**— Así como para la génesis de una ecuación diferencial de primer orden, partíamos de un haz de curvas en el plano (Lección 1.<sup>a</sup>), engendramos un sistema de dos ecuaciones de primer orden partiendo de una congruencia de curvas en el espacio.

Llámase *congruencia* de curvas a todo conjunto de curvas dependientes de dos constantes o parámetros

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, z, C_1, C_2) &= 0 \\ \Phi(x, y, z, C_1, C_2) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

de tal modo que por cada punto del espacio pase una curva y sólo una de la congruencia, lo que equivale a decir que el sistema anterior determina unívocamente  $C_1, C_2$  como funciones de  $x, y, z$ .

$$C_1 = f(x, y, z), \quad C_2 = \varphi(x, y, z) \quad [1]$$

Si derivamos este último sistema con respecto a una de las variables considerada como independiente, por ejemplo  $x$ , se obtendrá:

$$\left. \begin{aligned} f_x + f_y \frac{dy}{dx} + f_z \frac{dz}{dx} &= 0 \\ \varphi_x + \varphi_y \frac{dy}{dx} + \varphi_z \frac{dz}{dx} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{de donde } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{D(f, \varphi)}{D(z, x)}}{\frac{D(f, \varphi)}{D(y, z)}}; \frac{dz}{dx} = \frac{\frac{D(f, \varphi)}{D(x, y)}}{\frac{D(f, \varphi)}{D(y, z)}} \quad [2]$$

o de otro modo más sencillo:

$$\frac{dx}{\frac{D(f, \varphi)}{D(y, z)}} = \frac{dy}{\frac{D(f, \varphi)}{D(z, x)}} = \frac{dz}{\frac{D(f, \varphi)}{D(x, y)}} \quad [3]$$

Hemos obtenido un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma normal

$$[4] \left\{ \begin{aligned} y' &= F_1(x, y, z) \\ z' &= F_2(x, y, z) \end{aligned} \right. \text{ o canónica equivalente } \frac{dx}{X(x, y, z)} = \frac{dy}{Y(x, y, z)} = \frac{dz}{Z(x, y, z)} \quad [5]$$

que expresa una propiedad de la tangente, que es común a todas las curvas de la congruencia.



**2. Integración de los sistemas de primer orden.**—Integrar un sistema de la forma [4] ó [5] es recíprocamente *hallar la congruencia de curvas que le satisface.*

Así, por ejemplo, para hallar las líneas de fuerza de un campo vectorial definido por  $X(x, y, z)$ ,  $Y(x, y, z)$ ,  $Z(x, y, z)$  (comp. del vector fuerza) habrá que integrar el sistema canónico  $\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$  que expresa que la tangente a la línea de fuerza en todo punto coincide con la dirección del vector  $(X, Y, Z)$ .

La existencia de la solución de un sistema normal

$$y' = f(x, y, z)$$

$$z' = \varphi(x, y, z)$$

correspondiente a unas condiciones iniciales prefijadas  $x_0, y_0, z_0$ , en un cierto entorno de  $x_0$ , es decir, la existencia de un arco de curva integral que pasa por el punto  $x_0, y_0, z_0$ , se demuestra de manera análoga a lo indicado para las ecuaciones de primero y segundo orden en las lecciones 1.<sup>a</sup> y 6.<sup>a</sup> (v. el § 3 de esta última).

En particular el método de Picard consiste en construir las soluciones  $y, z$  como límites de las sucesiones de funciones  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots, z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$  construídas del siguiente modo:

1. <sup>a</sup> aproximación	2. <sup>a</sup> aproximación	3. <sup>a</sup> aproximación...
$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0, z_0) dx$	$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1, z_1) dx$	$y_3 = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_2, z_2) dx \dots$
$z_1 = z_0 + \int_{x_0}^x \varphi(x, y_0, z_0) dx$	$z_2 = z_0 + \int_{x_0}^x \varphi(x, y_1, z_1) dx$	$z_3 = z_0 + \int_{x_0}^x \varphi(x, y_2, z_2) dx \dots$

Todas las  $y_n$  tienen el valor de  $y_0$  para  $x=x_0$ , y todas las  $z_n$  el valor  $z_0$ .

Se demuestra, como en la lección 1.<sup>a</sup>, que las sucesiones  $y_n$  y  $z_n$  tienden uniformemente a ciertas funciones límites (en cierto entorno de  $x_0$ ) que son soluciones del sistema si  $f$  y  $\varphi$  son continuas en un cierto dominio y verifican en él la condición de Lipschitz respecto a las dos variables  $y, z$ , es decir si existe para  $f$  un número positivo  $M$  (y otro análogo para  $\varphi$ ), tal que se verifique

$$\frac{|f(x, y_1, z) - f(x, y_2, z)|}{|y_1 - y_2|} < M \quad \frac{|f(x, y, z_1) - f(x, y, z_2)|}{|z_1 - z_2|} < M$$

para todo par de valores  $\left\{ \begin{matrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{matrix} \right\}$  de una misma paralela al eje  $\left\{ \begin{matrix} y \\ z \end{matrix} \right\}$  en el dominio considerado. Para que tal condición se cumpla basta, por ejemplo, que sean acotadas en dicho dominio las derivadas  $f_y, f_z$ , y análogamente  $\varphi_y, \varphi_z$ .

La curva así obtenida por el punto  $x_0, y_0, z_0$  es única y se llama solución *particular* del sistema; variando  $x_0, y_0, z_0$  obtendremos la congruencia o *integral general*.

En muchos casos prácticos la determinación de dicha congruencia e in-

tegración del sistema resulta muy fácil, especialmente cuando las ecuaciones [4] ó [5] tienen las variables separadas o acusan inmediatamente una combinación integrable.

EJEMPLO 1.º: Sea  $y' = \frac{y}{x}, z' = 0$  o bien  $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{0}$

La congruencia es evidentemente  $z = C_1, y = C_2 x$ . Rectas paralelas al plano  $xy$ , que cortan al eje  $z$ .

EJEMPLO 2.º: Sea  $y' = -\frac{x}{y}, z' = x$  o bien  $x dx = -y dy = dz$ .

La congruencia es  $x^2 + y^2 = C_1, \frac{1}{2} x^2 - z = C_2$  (cuárticas).

EJEMPLO 3.º: El sistema  $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$  tiene la integral  $z = C_2 x, y = C_1 x$  (rectas por el origen).

Pero la integración no resulta tan sencilla si las variables están mezcladas. Entonces se sigue el método de

### 3. Reducción a una ecuación por eliminación.— Sea el sistema

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y, z) \\ z' &= \varphi(x, y, z) \end{aligned} \quad [6]$$

y derivemos la primera ecuación  $y'' = f_x + f_y y' + f_z z'$ .

Entre estas tres ecuaciones eliminaremos (si nos es posible)  $z, z'$  y obtendremos una ecuación diferencial de segundo orden en  $y$

$$y'' = F(x, y, y')$$

Una vez resuelta y hallada  $y = \psi(x, C_1, C_2)$  podemos sustituir esta función y su derivada en la primera ecuación para hallar  $z$  (si es posible resolverla).

EJEMPLO: Sea el sistema  $y' = 3x + y + z, z' = x - 2y - z$ .

Se consigue la eliminación de  $z$  sumando

$$y' + z' = 4x - y$$

y sumando nuevamente con  $y'' = 3 + y' + z'$  resulta

$$y'' + y = 4x + 3$$

Integrando se obtiene  $y = A \cos x + B \sin x + 4x + 3$  y sustituyendo en la primera  $z = y' - y - 3x = (B - A) \cos x - (A + B) \sin x - 7x + 1$ .

### 4. Generalización a más de dos funciones. Integrales primeras. — El procedimiento es generalizable a un sistema de tres ecuaciones

$$[7] \begin{cases} y' = f(xyzu) & \text{derivando dos veces} & y'' = F_1(xyzu, y', z', u') & y''' = F_2(x, y, \dots, u', y'', z'', u'') \\ z' = \varphi(xyzu) & \text{» una vez} & z'' = \Phi(xyzu, y', z', u') \\ u' = \psi(xyzu) & \text{» una vez} & u'' = \Psi(xyzu, y', z', u') \end{cases}$$

Si entre las siete ecuaciones podemos eliminar  $z, z', z'', u, u', u''$  quedará una ecuación de tercer orden en  $y$

$$y''' = F_3(x, y, y', y'')$$

Obtenida su integral  $y = F(x, C_1, C_2, C_3)$  y sustituyendo  $y$  e  $y'$  en las tres ecuaciones del sistema y en la  $y'' = F_1$ , obtendremos cuatro ecuaciones para hallar  $z, u, z', u'$ .

Análogamente un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden conducirán a una de cuarto, y en general  $n$  ecuaciones conducirán a una de orden  $n$ , completándose la determinación de las restantes funciones por simple eliminación.

Claro es que el sistema normal [7] puede ponerse en la forma canónica equivalente  $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{f} = \frac{dz}{\varphi} = \frac{du}{\psi}$  y que a estos sistemas puede aplicarse lo dicho en el párrafo 2.

Dado un sistema

$$\frac{dx}{X(x, y, \dots, u)} = \frac{dy}{Y(x, y, \dots, u)} = \dots = \frac{du}{U(x, y, \dots, u)}$$

toda relación de la forma  $\Phi(x, y, \dots, u) = C$  (constante) que quede idénticamente satisfecha por las soluciones del sistema se llama integral *primera* del mismo.

**5. Generalización a sistemas de orden superior.**—Dado un sistema de orden superior que supondremos resuelto en las derivadas de orden máximo

$$\begin{aligned} y^{(m)} &= f(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}, z, z', \dots, z^{(n-1)}) \\ z^{(n)} &= \varphi(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}, z, z', \dots, z^{(n-1)}) \end{aligned}$$

podemos reducirlo a un sistema de  $m+n$  ecuaciones de primer orden sin más que considerar como nuevas funciones incógnitas las derivadas sucesivas, que aparecen en los segundos miembros, es decir, poniendo

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y' & \frac{dy'}{dx} &= y'' & \dots & \frac{dy^{(m-2)}}{dx} &= y^{(m-1)} & \frac{dy^{(m-1)}}{dx} &= f(x, y, y' \dots y^{(m-1)}, z, z' \dots z^{(n-1)}) \\ \frac{dz}{dx} &= z' & \frac{dz'}{dx} &= z'' & \dots & \frac{dz^{(n-2)}}{dx} &= z^{(n-1)} & \frac{dz^{(n-1)}}{dx} &= \varphi(x, y, y' \dots y^{(m-1)}, z, z' \dots z^{(n-1)}) \end{aligned}$$

sistemas de primer orden. Y aplicando lo anterior, vemos que puede reducirse a una ecuación de orden  $m+n$ , por ejemplo en  $y$ .

Pero podemos obtener directamente ésta eliminando  $z$  por derivación de la primera ecuación  $n$  veces (orden de la derivada máxima de  $z$  en la segunda) y derivando la segunda ecuación  $n-1$  veces (orden de la derivada máxima de  $z$  en la primera). Obtendremos así, en total,  $2+n+n-1 = 2n+1$  ecuaciones para eliminar las  $2n$  funciones  $z, z', z'' \dots, z^{2n-1}$  y quedará una ecuación en  $y$  de orden  $m+n$ .

EJEMPLO: Las ecuaciones

$$\begin{aligned}x'' - 2y' + 3x &= 0 \\ y'' + x' - 2y &= e^{2t}\end{aligned}\quad [2]$$

en las que  $x, y$  son funciones incógnitas de la variable  $t$  (tiempo), permiten eliminar  $y$  derivando la primera *dos* veces y la segunda *una* vez.

Resulta  $x''' - 2y'' + 3x' = 0$ ,  $x^{IV} - 2y''' + 3x'' = 0$ ,  $y''' + x'' - 2y' = 2e^{2t}$ .

Eliminando  $y'''$  entre las dos últimas resulta  $x^{IV} - 4y' + 5x'' = 4e^{2t}$ .

Eliminando ahora  $y'$  entre éste y [1] queda

$$x^{IV} + 3x'' - 6x = 4e^{2t}$$

ecuación diferencial de cuarto orden lineal y de coeficientes constantes como las dadas.

Por generalización a lo antes dicho llamaremos *integral primera* de un sistema toda relación conteniendo una constante que verifiquen las funciones incógnitas y sus derivadas hasta un orden *inferior en una unidad* al orden del sistema.

Así, en un sistema de segundo orden

$$y'' = f(x, y, y', z, z') \quad z'' = \varphi(x, y, y', z, z')$$

llamaremos *integral primera* toda relación de la forma

$$F(x, y, z, y', z') = C$$

que sea verificada por las soluciones del sistema.

**6. Sistemas de la Dinámica.**—Las ecuaciones de la Dinámica del punto material son de la forma

$$mx'' = X(x, y, z, t, x', y', z') \quad my'' = Y(\dots) \quad mz'' = Z(\dots)$$

En el caso más general, las componentes  $X, Y, Z$  de la fuerza son funciones de la posición del punto ( $x, y, z$ ), de su velocidad ( $x', y', z'$ ) (caso de resistencia de medio) y del tiempo (caso de campo variable). Pero corrientemente  $X, Y, Z$  son funciones sólo de  $x, y, z$ , que, además, admiten función potencial  $U$  (campos newtonianos mecánicos, eléctricos, etc.). En este caso se obtiene fácilmente una integral primera multiplicando las ecuaciones respectivamente por  $x' dt = dx, y' dt = dy, z' dt = dz$ , y sumando queda

$$m(x''x' + y''y' + z''z')dt = X dx + Y dy + Z dz$$

o sea

$$\frac{1}{2} m d(x'^2 + y'^2 + z'^2) = dU$$

e integrando  $m \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2) - U = C$  (constante)

que expresa la constancia de la suma de la energía cinética  $\frac{1}{2}$  la energía potencial  $-U$ .

**7. Integración de los sistemas lineales.**—Se observa que la eliminación en sistemas lineales y de coeficientes constantes conduce a ecuaciones asimismo lineales y de coeficientes constantes. Procediendo, por ejemplo, por derivación y sustitución es fácil ver que no se altera dicho carácter.

La eliminación se consigue muy rápidamente utilizando las propiedades algebraicas del operador derivada  $D$  (recuérdese lección 10).

Así, por ejemplo, el sistema del ejemplo del párrafo anterior puede escribirse simbólicamente

$$\begin{aligned}(D^2 + 3)x - 2Dy &= 0 \\ Dx + (D^2 - 2)y &= e^{2t}\end{aligned}$$

en donde  $D$  representa ahora derivaciones respecto de la variable independiente  $t$  (tiempo).

Si aplicamos a los dos miembros de la primera ecuación la operación  $D^2 - 2$  y a los dos miembros de la segunda ecuación la operación  $2D$  y sumamos, se elimina la función  $y$  y queda la ecuación en  $x$

$$(D^2 - 2)(D^2 + 3)x + 2D^2x = 2De^{2t} = 4e^{2t}$$

es decir

$$D^4x + 3D^2x - 6x = 4e^{2t}$$

que coincide con la antes hallada.

Obsérvese que el método es exactamente el mismo que se seguiría en álgebra elemental para eliminar  $y$  en el sistema propuesto suponiendo que  $D$  representara en él un número en vez de un operador. La identidad de procedimiento se debe a la validez de las propiedades formales algebraicas (distributiva y conmutativa con un factor constante) de dicho operador.

Generalizando, si se nos da un sistema de ecuaciones lineales de *coeficientes constantes* con tantas ecuaciones como funciones incógnitas, por ejemplo,

$$\left. \begin{aligned}P_{11}(D)x + P_{12}(D)y + P_{13}(D)z &= f_1(t) \\ P_{21}(D)x + P_{22}(D)y + P_{23}(D)z &= f_2(t) \\ P_{31}(D)x + P_{32}(D)y + P_{33}(D)z &= f_3(t)\end{aligned} \right\} \quad [1]$$

en el que  $x, y, z$  son las funciones incógnitas de la variable  $t$ , podemos eliminar las funciones  $y, z$  aplicando a las tres ecuaciones, respectivamente, los operadores en  $D$  que resultan de calcular los adjuntos  $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}$  de  $P_{11}, P_{21}, P_{31}$  en el determinante (operador) del sistema

$$\Delta(D) = \begin{vmatrix} P_{11}(D) & P_{12}(D) & P_{13}(D) \\ P_{21}(D) & P_{22}(D) & P_{23}(D) \\ P_{31}(D) & P_{32}(D) & P_{33}(D) \end{vmatrix} \quad [2]$$

y sumándolas. En efecto, las identidades algebraicas

$$\begin{aligned} \alpha_{11}P_{11} + \alpha_{21}P_{21} + \alpha_{31}P_{31} &= \Delta \\ \alpha_{11}P_{12} + \alpha_{21}P_{22} + \alpha_{31}P_{32} &= 0 \\ \alpha_{11}P_{13} + \alpha_{21}P_{23} + \alpha_{31}P_{33} &= 0 \end{aligned}$$

indican que al sumar, sólo quedará en el primer miembro el operador  $\Delta(D)$  aplicado a la función  $x$ .

$$\Delta(D)x = \alpha_{11}f_1 + \alpha_{21}f_2 + \alpha_{31}f_3 \quad [3]$$

mientras el segundo miembro es la suma algebraica de los resultados de aplicar respectivamente los operadores  $\alpha_{11}(D)$ ,  $\alpha_{21}(D)$ ,  $\alpha_{31}(D)$  a los segundos miembros  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$ .

Obtenemos así una ecuación diferencial lineal en  $x$  de coeficientes constantes, cuyo orden es el grado de  $\Delta(D)$ . Las restantes funciones  $y$  y  $z$  pueden obtenerse análogamente, o por eliminación de sus derivadas una vez hallada  $x$ .

EJEMPLO: Sea el sistema

$$\left. \begin{aligned} x' + 6x + 3y - 14z &= 0 \\ y' - 4x - 3y + 8z &= 0 \\ z' + 2x + y - 5z &= \text{sen } t \end{aligned} \right\} \text{ o bien } \left\{ \begin{aligned} (D+6)x + 3y - 14z &= 0 \\ -4x + (D-3)y + 8z &= 0 \\ 2x + y + (D-5)z &= \text{sen } t \end{aligned} \right. \quad [4]$$

en el que

$$\Delta(D) = \begin{vmatrix} D+6 & 3 & -14 \\ -4 & D-3 & 8 \\ 2 & 1 & D-5 \end{vmatrix} = D^3 - 2D^2 - D + 2 = (D-1)(D+1)(D-2)$$

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} D-3 & 8 \\ 1 & D-5 \end{vmatrix} \quad \alpha_{21} = - \begin{vmatrix} 3 & -14 \\ 1 & D-5 \end{vmatrix} \quad \alpha_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -14 \\ D-3 & 8 \end{vmatrix} = 14D - 18$$

La eliminación de  $y$ ,  $z$  conduce a la ecuación de tercer orden en  $x$

$$(D-1)(D+1)(D-2)x = (14D-18) \text{sen } t = 14 \cos t - 18 \text{sen } t$$

cuya integral general es  $x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t} + \cos t - 5 \text{sen } t$  [5]

Sustituyendo en la primera ecuación se obtiene

$$3y - 14z = -x' - 6x = 31 \text{sen } t - \cos t - 7C_1 e^t - 5C_2 e^{-t} - 8C_3 e^{2t}$$

Por otra parte, derivando la primera ecuación del sistema y sustituyendo  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  por sus expresiones deducidas del mismo, queda

$$x'' + 4x + 5y - 10z - 14 \text{sen } t = 0 \quad \text{de donde} \quad 5y - 10z = 14 \text{sen } t - x'' - 4x,$$

y sustituyendo  $x$  y  $x''$  por sus expresiones deducidas de [5]

$$5y - 10z = 29 \text{sen } t - 3 \cos t - 5C_1 e^t - 5C_2 e^{-t} - 8C_3 e^{2t}$$

Resolviendo ahora el sistema obtenido en  $y$ ,  $z$  resulta finalmente

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2} C_2 e^{-t} - \frac{4}{5} C_3 e^{2t} + \frac{12}{5} \text{sen } t - \frac{4}{5} \cos t \\ z &= \frac{1}{2} C_1 e^t + \frac{1}{4} C_2 e^{-t} + \frac{2}{5} C_3 e^{2t} - \frac{17}{10} \text{sen } t - \frac{1}{10} \cos t \end{aligned} \quad [6]$$



Una vez obtenidas las soluciones generales, para hallar las particulares correspondientes a condiciones iniciales dadas, habrá que calcular los valores de las constantes resolviendo el sistema numérico que expresa el cumplimiento de dichas condiciones.

Por ejemplo, si estas condiciones son en el ejemplo anterior  $x(0)=1$ ,  $y(0)=1$ ,  $z(0)=0$ , el sistema en  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  será

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = C_1 + C_2 + C_3 + 1 \\ -1 = -\frac{1}{2} C_2 - \frac{4}{5} C_3 - \frac{4}{5} \\ 0 = \frac{1}{2} C_1 + \frac{1}{4} C_2 + \frac{2}{5} C_3 - \frac{1}{10} \end{array} \right. \quad \text{que da} \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 = 0 \\ C_2 = -\frac{2}{3} \\ C_3 = \frac{2}{3} \end{array} \right.$$

**8. Integración directa de los sistemas homogéneos de coeficientes constantes.**—Si el sistema es homogéneo  $f_1=f_2=f_3=0$ , la ecuación [3] en  $x$ , resultante de eliminar  $y$ ,  $z$ , será también homogénea; sus soluciones serán de la forma  $\lambda e^{rt}$ ; y como las ecuaciones análogas en  $y$  y en  $z$  son idénticas podemos ensayar directamente en el sistema soluciones de la forma

$$x = \lambda e^{rt} \quad y = \mu e^{rt} \quad z = \nu e^{rt} \quad [7]$$

Sea, por ejemplo, el sistema

$$\begin{aligned} x' &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ y' &= a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ z' &= a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{aligned}$$

en el que  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  son constantes, y hagamos en él la sustitución [7].  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $r$  deberán cumplir

$$\left. \begin{array}{l} (a_1 - r)\lambda + b_1\mu + c_1\nu = 0 \\ a_2\lambda + (b_2 - r)\mu + c_2\nu = 0 \\ a_3\lambda + b_3\mu + (c_3 - r)\nu = 0 \end{array} \right\}$$

Si queremos que este sistema en  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  tenga una solución distinta de la  $\lambda=\mu=\nu=0$  (que da la solución trivial  $x \equiv 0$ ,  $y \equiv 0$ ,  $z \equiv 0$ ) se habrá de verificar

$$\begin{vmatrix} a_1 - r & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - r & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - r \end{vmatrix} = 0 \quad [10]$$

ecuación cúbica tiene tres raíces distintas  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$ , éstas, sustituidas en [7] ternas de valores para  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$

$$\begin{aligned} r_1 &\text{ dará } \lambda_1 \mu_1 \nu_1 \\ r_2 &\text{ " } \lambda_2 \mu_2 \nu_2 \\ r_3 &\text{ " } \lambda_3 \mu_3 \nu_3 \end{aligned}$$

(determinados salvo factor constante) y por tanto los tres ternas de soluciones correspondientes

$$\begin{array}{lll} x_1 = \lambda_1 e^{r_1 t} & y_1 = \mu_1 e^{r_1 t} & z_1 = \nu_1 e^{r_1 t} \\ x_2 = \lambda_2 e^{r_2 t} & y_2 = \mu_2 e^{r_2 t} & z_2 = \nu_2 e^{r_2 t} \\ x_3 = \lambda_3 e^{r_3 t} & y_3 = \mu_3 e^{r_3 t} & z_3 = \nu_3 e^{r_3 t} \end{array}$$

La solución general del sistema se obtiene, como en las ecuaciones ordinarias, formando combinaciones lineales de las  $x_i$ , las  $y_i$  y las  $z_i$ , es decir

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 \lambda_1 e^{r_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{r_2 t} + C_3 \lambda_3 e^{r_3 t} \\ y &= C_1 \mu_1 e^{r_1 t} + C_2 \mu_2 e^{r_2 t} + C_3 \mu_3 e^{r_3 t} \\ z &= C_1 \nu_1 e^{r_1 t} + C_2 \nu_2 e^{r_2 t} + C_3 \nu_3 e^{r_3 t} \end{aligned} \right\} \quad [11]$$

NOTA.—No es difícil probar que si  $r_1, r_2, r_3$  son distintas, este sistema determina las  $C_1, C_2, C_3$  para un sistema de condiciones iniciales dadas  $t_0, x_0, y_0, z_0$ .

Si las raíces no son distintas, la solución exige buscar nuevas soluciones de modo parecido a lo hecho para las ecuaciones ordinarias. No nos detendremos en completar la discusión, prefiriendo resolver el problema por eliminación, como se ha expuesto en párrafos anteriores.

**9. Método de variación de las constantes.**—Si, finalmente, el sistema dado no es homogéneo, es decir

$$\left. \begin{aligned} x' - a_1 x - b_1 y - c_1 z &= f_1(t) \\ y' - a_2 x - b_2 y - c_2 z &= f_2(t) \\ z' - a_3 x - b_3 y - c_3 z &= f_3(t) \end{aligned} \right\} \quad [12]$$

se puede aplicar el método de variación de las constantes, considerando  $C_1, C_2, C_3$  en [11] como *funciones convenientes* de  $x$  a determinar para que la terna

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 \\ y &= C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 \\ z &= C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 \end{aligned} \right\} \quad [13]$$

sea integral de [12].

Derivando

$$\left. \begin{aligned} x' &= C_1 x'_1 + C_2 x'_2 + C_3 x'_3 + C'_1 x_1 + C'_2 x_2 + C'_3 x_3 \\ y' &= C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + C_3 y'_3 + C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + C'_3 y_3 \\ z' &= C_1 z'_1 + C_2 z'_2 + C_3 z'_3 + C'_1 z_1 + C'_2 z_2 + C'_3 z_3 \end{aligned} \right\}$$

y sustituyendo en [12], teniendo en cuenta que las ternas  $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3$  satisfacen el sistema homogéneo, queda

$$\left. \begin{aligned} x_1 C'_1 + x_2 C'_2 + x_3 C'_3 &= f_1(t) \\ y_1 C'_1 + y_2 C'_2 + y_3 C'_3 &= f_2(t) \\ z_1 C'_1 + z_2 C'_2 + z_3 C'_3 &= f_3(t) \end{aligned} \right\} \quad [14]$$

sistema que determina

$$C'_1 = \varphi_1(t) \quad C'_2 = \varphi_2(t) \quad C'_3 = \varphi_3(t)$$

y por integración

$$C_1 = \int \varphi_1(t) dt + K_1 \quad C_2 = \int \varphi_2(t) dt + K_2 \quad C_3 = \int \varphi_3(t) dt + K_3$$

que sustituidos en [11] dan la integral general de [8].

EJEMPLO: Apliquemos el método al sistema del ejemplo del § 7, considerando primero el sistema homogéneo, cuya ecuación característica [10] coincide con  $\Delta(r)=0$ , o sea

$$\begin{vmatrix} -6-r & -3 & 14 \\ 4 & 3-r & -8 \\ -2 & -1 & 5-r \end{vmatrix} = 0 \quad r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0$$

Sustituyendo las raíces de esta ecuación 1, -1, 2 en lugar de  $r$  en el sistema [9] se obtiene tres sistemas que dan, respectivamente,

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \quad \mu_1 = 0 \quad \nu_1 = 1 \\ \lambda_2 = 4 \quad \mu_2 = -2 \quad \nu_2 = 1 \\ \lambda_3 = 5 \quad \mu_3 = -4 \quad \nu_3 = 2 \end{array} \right\} \text{de donde} \left\{ \begin{array}{l} x = 2 C_1 e^t + 4 C_2 e^{-t} + 5 C_3 e^{2t} \\ y = \quad \quad - 2 C_2 e^{-t} - 4 C_3 e^{2t} \\ z = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + 2 C_3 e^{2t} \end{array} \right. \quad [15]$$

Solución del sistema homogéneo al que podemos aplicar el método de variación de las constantes para obtener la solución del sistema dado [12]. El sistema [14] resulta aquí

$$\left. \begin{array}{l} 2 C_1' e^t + 4 C_2' e^{-t} + 5 C_3' e^{2t} = 0 \\ \quad \quad \quad - 2 C_2' e^{-t} - 4 C_3' e^{2t} = 0 \\ C_1' e^t + C_2' e^{-t} + 2 C_3' e^{2t} = \text{sen } t \end{array} \right\}$$

de donde

$$C_1' e^t = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ \text{sen } t & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-6 \text{ sen } t}{-6} = \text{sen } t$$

$$C_1 = \int e^{-t} \text{sen } t \, dt + K_1 = -\frac{e^{-t}}{2} [\text{sen } t + \cos t] + K_1$$

Análogamente

$$C_2' e^{-t} = -\frac{4}{3} \text{sen } t \quad C_2 = -\frac{4}{3} \int e^t \text{sen } t \, dt = -\frac{2}{3} e^t (\text{sen } t - \cos t) + K_2$$

$$C_3' e^{2t} = \frac{2}{3} \text{sen } t \quad C_3 = \frac{2}{3} \int e^{-2t} \text{sen } t \, dt = -\frac{2 e^{-2t}}{15} (2 \text{sen } t + \cos t) + K_3$$

La sustitución de estos valores en [15] dan la integral general

$$x = 2 K_1 e^t + 4 K_2 e^{-t} + 5 K_3 e^{2t} - 5 \text{sen } t + \cos t$$

$$y = \quad \quad - 2 K_2 e^{-t} - 4 K_3 e^{2t} + \frac{12}{5} \text{sen } t - \frac{4}{5} \cos t$$

$$z = K_1 e^t + K_2 e^{-t} + 2 K_3 e^{2t} - \frac{17}{10} \text{sen } t - \frac{1}{10} \cos t$$

que coincide con la solución hallada en el § 7 (salvo las constantes arbitrarias  $K_1 = \frac{1}{2} C_1$ ,  $K_2 = \frac{1}{4} C_2$ ,  $K_3 = \frac{1}{5} C_3$ ).

**10. Aplicación de los sistemas lineales a los pequeños movimientos alrededor de posiciones de equilibrio.**—Consideremos, para fijar las ideas, un sistema de primer orden de la forma

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, z) \quad \frac{dy}{dt} = \varphi(x, y, z) \quad \frac{dz}{dt} = \psi(x, y, z) \quad [1]$$

en el que la variable  $t$  suponemos que no figura en los segundos miembros. Se com-

prueba en seguida que toda terna de números  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  que satisfaga el sistema

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \quad \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \quad \psi(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \quad [2]$$

proporciona soluciones *estacionarias* (constantes) del sistema.

$$x = \alpha \quad y = \beta \quad z = \gamma \quad [3]$$

Estos puntos,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , designan, pues, posiciones de *equilibrio* del punto móvil cuyas ecuaciones de movimiento son [1]. Con objeto de averiguar si este equilibrio es o no estable estudiemos las soluciones en un entorno diferencial de dichos puntos. Para ello pongamos

$$x = \alpha + \xi \quad y = \beta + \eta \quad z = \gamma + \zeta$$

$\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  van a ser ahora las nuevas variables (supuestas infinitesimales) y el sistema [1] se transformará en el sistema *lineal* en  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  de coeficientes constantes.

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= f(\alpha + \xi, \beta + \eta, \gamma + \zeta) = f_\alpha \xi + f_\beta \eta + f_\gamma \zeta \\ \frac{d\eta}{dt} &= \varphi_\alpha \xi + \varphi_\beta \eta + \varphi_\gamma \zeta \quad \frac{d\zeta}{dt} = \psi_\alpha \xi + \psi_\beta \eta + \psi_\gamma \zeta \end{aligned} \quad [4]$$

cuyas soluciones son de la forma  $\sum a_i e^{s_i t}$ , donde  $s_i$  son raíces de la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} f_\alpha - s & f_\beta & f_\gamma \\ \varphi_\alpha & \varphi_\beta - s & \varphi_\gamma \\ \psi_\alpha & \psi_\beta & \psi_\gamma - s \end{vmatrix} = 0$$

Si los coeficientes de esta ecuación cumplen la condición de Hurwitz, la parte real de todas las  $s_i$  es negativa, es decir,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  tenderán a  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , y este punto marcará una posición de *equilibrio estable*.

*Nota.*—Obsérvese que de [1] se desprende el sistema diferencial que define las trayectorias

$$\frac{dx}{f(x, y, z)} = \frac{dy}{\varphi(x, y, z)} = \frac{dz}{\psi(x, y, z)}$$

Los puntos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  son puntos singulares en la congruencia de tales trayectorias puesto que anulan los tres denominadores. El sistema [4] define paramétricamente dicha congruencia en las inmediaciones de tales puntos. Aplicado el método al movimiento plano (dos variables) podríamos repetir aquí la discusión efectuada en la lección 1.ª, §§ 7 y 8, acerca de la naturaleza de los puntos singulares.

**11. Los sistemas en la Biología matemática.**—Una de las aplicaciones más recientes y brillantes de los sistemas de ecuaciones diferenciales la constituye el estudio de las variaciones de población en varias especies biológicas coexistentes en un mismo medio vital. Según que estas especies se nutran del medio o unas de otras, las ecuaciones se formulan de distinta manera.

Sean, por ejemplo, dos especies, una de las cuales  $X$  se nutre de la otra  $Y$ . Los números de individuos  $x$ ,  $y$  de una y otra especie variarán según leyes de crecimiento que, en primera aproximación, pueden formularse así:

$$\frac{dx}{dt} = -mx + nxy \quad \frac{dy}{dt} = py - qxy \quad [1]$$

Las velocidades de crecimiento constan de un término proporcional a la población respectiva (término que se ha formulado negativo en la especie  $x$  devorante ( $-mx$ ) para significar que irían muriendo sus individuos en ausencia de la especie  $y$ ) y de otro término proporcional al número de *encuentros*,  $y$ , por tanto, proporcional al producto  $xy$ . Este término es, naturalmente, positivo en la especie devorante y negativo en la devorada.

La integración cuantitativa de este sistema tiene dificultades (obsérvese que no es lineal), pero en cambio suministra fácilmente leyes cualitativas de variación que han originado multitud de experiencias e investigaciones estadísticas de comprobación. Una de estas leyes viene dada por la *integral primera* que resulta eliminando  $t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{py - qxy}{-mx + nxy} \quad \text{puntos singulares} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \quad y = 0 \\ x = \frac{p}{q}, y = \frac{m}{n} \end{array} \right. \quad [2]$$

de cuya integración se obtiene fácilmente  $e^{qx+ny} = Cx^p y^m$ .

La construcción de estas curvas indica que se trata de curvas *cerradas*. Interpretadas como trayectorias del movimiento de un punto definido por [1] dan un movimiento periódico alrededor del punto singular  $x=p/q$ ,  $y=m/n$ , y por consiguiente las fluctuaciones de las poblaciones  $x$  e  $y$  de ambas especies tienen carácter periódico. Esta ley, hallada por Volterra en sus investigaciones sobre las variaciones en la densidad de población de ciertos peces en el mar Adriático (\*), y otras resultantes en problemas análogos, han sido objeto reciente de investigaciones múltiples por su interés de aplicación a la agricultura (plagas del campo combatidas por otras especies parásitas), a la higiene (enfermedades infecciosas) y a la biología en general (\*\*).

Sin necesidad de construir las curvas, se comprende pronto que carecen de ramas infinitas por cuanto la función exponencial primer miembro  $e^{qx+ny}$  crece a partir de ciertos valores de  $x$  e  $y$  más rápidamente que la potencial del segundo y no puede igualarse a él, lo que indica que toda la curva queda en el interior de un cierto círculo. El carácter periódico alrededor del punto singular  $x=p/q$ ,  $y=m/n$  se aprecia pronto aplicando lo dicho en el párrafo anterior.

En los ejercicios que se proponen a continuación conviene que el lector haga uso de los distintos procedimientos de integración de sistemas indicados en esta lección, eligiendo en cada caso el que estime más breve.

### EJERCICIOS

Integrar los sistemas siguientes (los acentos indican derivadas respecto a  $t$ ):

$$1. \begin{cases} x' + x - y = 0 \\ y' + x - y = 0 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x' + 7x - y = 0 \\ y' + 2x + 5y = 0 \end{cases} \quad 3. \begin{cases} x'' + y' - 4x + 12 = 0 \\ y'' - 10x' - y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x' - 3x - y = e^{2t} \\ y' + (1-a^2)x - y = 0 \end{cases} \quad 5. \begin{cases} x' + 4x + 3y = t \\ y' + 2x + 5y = e^t \end{cases} \quad 6. \begin{cases} x' + 3y - 14z + 6x = 0 \\ y' - 3y + 8z - 4x = 0 \\ z' + y - 5z + 2x = 0 \end{cases}$$

7.º Resolver el sistema 6 substituyendo el segundo miembro de la primera ecuación por  $t$ . Idem por  $e^{2t}$ .

8.º Hallar las ecuaciones del movimiento de un punto definido por:  $x' = 3x - y$ ,  $y' = x + y$ , sabiendo que en el origen de tiempos se encuentra en el punto (1, 2).

(\*) Puede hallarse la discusión de la forma de las curvas antedichas en sus bellas «Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie». París, 1931.

(\*\*) El lector curioso puede consultar además del libro de Volterra citado, el sustancioso manualito de *Kostitzin*, «Biologie mathématique», de la colección Armand Colin.

9.º Eliminar la  $y$  en el sistema del § 11 y reducir el orden de la ecuación en  $x$  resultante.

10. Naturaleza de los puntos singulares de la ecuación [2] del mismo § 11.

11. Movimientos infinitesimales alrededor del punto singular  $x=p/q$ ,  $y=m/n$  en el sistema (1) del § 11, interpretado como ecuaciones del movimiento de una partícula.

12. Plantear y resolver las ecuaciones del movimiento de un proyectil lanzado en el vacío y sometido a un campo de fuerzas constante. Expresar la ecuación de la trayectoria en función del ángulo de tiro (inclinación con la horizontal). Hallar el alcance y la altura máxima a que llega el proyectil. Ángulo de máximo alcance.

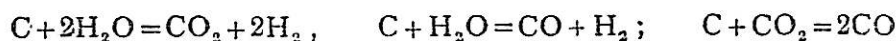
13. Movimiento del proyectil suponiendo que el aire le ofrece una resistencia proporcional a la velocidad.

14. Movimiento de una partícula atraída por una fuerza proporcional a la distancia al origen de coordenadas. Forma de las trayectorias.

15. Movimiento de una partícula material atraída por un centro newtoniano. (Pásele a polares, y recuérdese la ley de las áreas hallada en tomo I, lección 27.)

16. Un cuerpo a 100º se sumerge en un calorímetro perfectamente aislado cuya agua está inicialmente a 10º. Al cabo de un minuto el cuerpo está a 50º y después de muy largo tiempo (prácticamente largo, teóricamente infinito) queda a 40º. Hallar la ley de enfriamiento del cuerpo y de calentamiento del agua. Calcular la temperatura de uno y otra al cabo de medio minuto. (Se admitirá que la velocidad de descenso de temperatura del cuerpo es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el agua.)

17. Una corriente de vapor al pasar sobre carbón enrojecido forma gas de agua, es decir, una mezcla de vapor, óxido de carbono, anhídrido carbónico e hidrógeno, según las reacciones



He aquí datos experimentales obtenidos, durante un proceso de esta índole, sobre las cantidades coexistentes de vapor y de  $CO_2$  (en volumen) a distintos tiempos (no consignados) (\*).

Volumen de vapor	$x=1,000$	0,906	0,709	0,556	0,376	0,056
Volumen de $CO_2$	$y=0,000$	0,041	0,100	0,123	0,099	0,0242

Teniendo en cuenta que la acción del carbón es sólo superficial no influye en la velocidad de reacción las variaciones de la cantidad de C (suponiéndole suficiente para mantener constante la superficie de contacto con el vapor). En estas condiciones compruébese que el sistema que da las variaciones teóricas de las cantidades tabuladas es de la forma  $y' = ax - by$ ,  $x' = -2ax - cy$

Dedúzcase e intégrese la ecuación diferencial que relacione  $x$  y  $y$ . Determinése las constantes de integración con los datos experimentales necesarios, comprobando con la ley obtenida los restantes.

18. Eliminar la intensidad  $i_2$  en el sistema siguiente que se presenta en la teoría del transformador

$$(L_1 D + R_1) i_1 + M D i_2 = E \text{ sen } \omega t, \quad M D i_1 + (L_2 D + R_2) i_2 = 0$$

19. Si en los primeros miembros del problema anterior ponemos  $L_1=3$  henrios,  $L_2=6$  henrios,  $M=4$  henrios,  $R_1=7$  ohmios,  $R_2=10$  ohmios, y para  $t=0$  suponemos  $i_1=2$ ,  $i_2=3$  amperios, hallar las oscilaciones *libres* de las intensidades  $i_1$ ,  $i_2$ , es decir, suponiendo también nulo el segundo miembro de la primera ecuación.

20. El movimiento de un electrón de masa  $m$  y carga  $e$  en un campo electro-magnético constante de intensidades de campo respectivas  $E$  y  $H$  viene dado por las ecuaciones

$$m x'' + H e y' = E e, \quad m y'' - H e x' = 0$$

Sabiendo que  $m$ ,  $e$ ,  $H$  y  $E$  son constantes, y suponiendo  $x=x'=y=y'=0$  para  $t=0$ , probar que las trayectorias del electrón son *cicloides*.

(\*) F. L. Hitchcock y C. S. Robinson, «Diff equations in applied Chemistry»



LECCIÓN 18.—LA TRANSFORMACIÓN DE LAPLACE. APLICACION A  
REDES ELÉCTRICAS

Hemos dicho en la lección 13 que una vez obtenida la integral general de la ecuación diferencial o sistema a que obedece un fenómeno, el físico y el técnico suelen caracterizar la solución que conviene al caso *particular* estudiado dando *condiciones de contorno* o *condiciones iniciales*. Estudiados (aunque muy someramente) los más característicos problemas de contorno en las lecciones 13 y 14 vamos ahora a dedicar unas líneas a la moderna técnica de resolución de los problemas con condiciones iniciales, especialmente en lo que concierne a las ecuaciones y sistemas lineales.

Esta técnica, fundada en el uso de la transformación de Laplace, tiene su origen en los métodos operacionales iniciados (un tanto empíricamente) por Heaviside (\*), de los que hemos justificado algunas reglas, por vía estrictamente elemental, en la lección 10. Posteriormente todos estos métodos han tenido su más riguroso y pleno desarrollo con el uso de la llamada «transformación de Laplace».

**1. La transformación de Laplace.**—Sea  $y(x)$  una función continua en todo el semieje  $x$  positivo, y supongamos que su producto por  $e^{-px}$  sea integrable entre 0 e  $\infty$  en un cierto campo de  $p$ ; la función  $\eta$  del parámetro  $p$  que esta integral define en tal campo

$$\eta(p) = \int_0^{\infty} e^{-px} y(x) dx \quad [1]$$

se llama *transformada Laplace* de  $y(x)$ , mientras la función  $y$  se llamará *generatriz Laplace* de  $\eta$ , y escribiremos

$$\eta(p) = \mathcal{L}[y(x)] \quad y(x) = \mathcal{L}^{-1}[\eta(p)] \quad [2]$$

Ambas transformaciones, directa e inversa, son operaciones lineales, es decir:

I. Son distributivas:

$$\mathcal{L}[y_1 + y_2] = \mathcal{L}[y_1] + \mathcal{L}[y_2] \quad \text{y por tanto} \quad \mathcal{L}^{-1}[\eta_1 + \eta_2] = \mathcal{L}^{-1}[\eta_1] + \mathcal{L}^{-1}[\eta_2] \quad [3]$$

II. Son permutables con un factor independiente de la variable

$$\mathcal{L}[ay] = a \mathcal{L}[y] \quad \mathcal{L}^{-1}[a\eta] = a \mathcal{L}^{-1}[\eta] \quad [4]$$

---

(\*) Electrotécnico inglés de fines del siglo pasado.

**2. Transformadas de algunas funciones elementales.**

TRANSFORMADA DE UNA EXPONENCIAL.—Como ejemplo empecemos transformando una exponencial de la forma  $y(x) = ke^{ax}$  que cumple las condiciones exigidas para  $p > a$ . Se tendrá

$$\mathcal{L}[ke^{ax}] = k \int_0^{\infty} e^{-(p-a)x} dx = \frac{k}{p-a} \quad (\text{para } p > a) \quad [5]$$

Análogamente

$$\mathcal{L}[ke^{-ax}] = \frac{k}{p+a} \quad (\text{para } p > -a) \quad [6]$$

En particular, para  $a=0$  tendremos la transformada de una constante

$$\mathcal{L}[k] = \frac{k}{p} \quad \mathcal{L}[1] = \frac{1}{p} \quad (\text{para } p > 0) \quad [7]$$

TRANSFORMADAS DEL SENO Y COSENO.—Lo mismo  $\sin \omega x$  que  $\cos \omega x$  cumplen las condiciones exigidas a  $y(x)$ , y recordando las expresiones de las integrales de  $e^{ax} \sin \omega x$ ,  $e^{ax} \cos \omega x$  (tomo I, lec. 6.ª, § 7) resulta (\*)

$$\mathcal{L}[\sin \omega x] = \int_0^{\infty} e^{-px} \sin \omega x dx = \frac{1}{p^2 + \omega^2} [e^{-px} (-p \sin \omega x - \omega \cos \omega x)]_0^{\infty} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \quad [8]$$

$$\mathcal{L}[\cos \omega x] = \int_0^{\infty} e^{-px} \cos \omega x dx = \frac{1}{p^2 + \omega^2} [e^{-px} (\omega \sin \omega x - p \cos \omega x)]_0^{\infty} = \frac{p}{p^2 + \omega^2} \quad [9]$$

De estas transformadas se deducen inmediatamente las de  $e^{-ax} \sin \omega x$ ,  $e^{-ax} \cos \omega x$ , pues al integrar  $e^{-(p+a)x} \sin \omega x$  resulta la transformada de  $\sin \omega x$  con el parámetro  $p+a$ . Por tanto

$$\mathcal{L}[e^{-ax} \sin \omega x] = \frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2} \quad \text{y análogamente} \quad \mathcal{L}[e^{-ax} \cos \omega x] = \frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$$

Finalmente, desarrollando  $\cos(\omega x + \psi)$  y  $\sin(\omega x + \psi)$  y aplicando las propiedades I y II del párrafo 1, resulta

$$\mathcal{L}[\sin(\omega x + \psi)] = \frac{\omega \cos \psi + p \sin \psi}{p^2 + \omega^2} \quad \mathcal{L}[\cos(\omega x + \psi)] = \frac{p \cos \psi - \omega \sin \psi}{p^2 + \omega^2}$$

TRANSFORMADA DE LA FUNCIÓN POTENCIAL  $x^n$ .—Recordando la definición de la función  $\Gamma$  resulta, para  $n+1 > 0$ ,  $p > 0$ , con el cambio  $px = \xi$

$$\mathcal{L}[x^n] = \int_0^{\infty} x^n e^{-px} dx = \frac{1}{p^{n+1}} \int_0^{\infty} \xi^{(n+1)-1} e^{-\xi} d\xi = \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}} \quad [10]$$

(\*) También pueden deducirse formalmente de las anteriores aplicando las fórmulas de Euler

$$\sin \omega x = \frac{1}{2i} (e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}), \quad \cos \omega x = \frac{1}{2} (e^{i\omega x} + e^{-i\omega x})$$

y para  $n$  entero y positivo

$$\mathfrak{L}[x^n] = \frac{n!}{p^{n+1}} \tag{11}$$

Esta regla y las I, II del párrafo anterior permitirán hallar la transformada de un polinomio.

**3. Transformada de una derivada.**—La propiedad más interesante para las aplicaciones es que : *Al DERIVAR la función  $y(x)$  la transformada queda MULTIPLICADA por su variable  $p$  y disminuída en  $y(0)$ .* Es decir

$$\text{Si } \mathfrak{L}[y(x)] = \eta(p) \text{ es } \mathfrak{L}[y'(x)] = p \mathfrak{L}[y] - y(0) = p \eta(p) - y(0) \tag{12}$$

Claro es que se supone que  $y'(x)$  sigue cumpliendo las condiciones de integrabilidad exigidas a  $y(x)$ . En este supuesto, resulta en efecto,

$$\int_0^\infty e^{-px} y'(x) dx = [e^{-px} y(x)]_0^\infty + p \int_0^\infty e^{-px} y(x) dx = -y(0) + p \eta(p)$$

pues la integrabilidad de  $e^{-px}y(x)$  entre 0 e  $\infty$  exige la anulaci3n de esta funci3n para  $x \rightarrow \infty$ .

La aplicaci3n reiterada de [12] nos dar3

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[y''(x)] &= p \mathfrak{L}[y'] - y'(0) = p^2 \eta(p) - py(0) - y'(0) \\ \mathfrak{L}[y'''(x)] &= p \mathfrak{L}[y''] - y''(0) = p^3 \eta(p) - p^2 y(0) - py'(0) - y''(0) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

La transformada de la derivada  $n^a$  de una funci3n (supuesta existente) es igual al producto de la transformada de esta funci3n por  $p^n$  menos un polinomio en  $p$  de grado  $n-1$  cuyos coeficientes, ordenados seg3n las potencias decrecientes de  $p$ , son los valores iniciales  $y(0), y'(0), \dots, y^{n-1}(0)$  de la funci3n y de sus  $n-1$  primeras derivadas. Es decir

$$\mathfrak{L}[y^{(n)}(x)] = p^n \eta(p) - p^{n-1} y(0) - p^{n-2} y'(0) - \dots - py^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0)$$

**4. Transformada de una integral.**—Inversamente, si la  $\int_0^x y(x) dx$  cumple las condiciones impuestas a  $y(x)$  para ser transformable, podremos escribir, integrando por partes

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^x y dx\right] = \int_0^\infty e^{-px} dx \int_0^x y dx = \left[-\frac{1}{p} e^{-px} \int_0^x y dx\right]_0^\infty + \frac{1}{p} \int_0^\infty e^{-px} y dx = \frac{\eta(p)}{p}$$

*La transformada de la integral indefinida de una funci3n (supuesta existente) es el cociente de la transformada de la funci3n por su variable  $p$ .*

**5. Producto de transformadas.**—Sean  $\eta_1(p)$  y  $\eta_2(p)$  las transformadas de  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  de modo que

$$\eta_1(p) = \int_0^\infty e^{-px} y_1(x) dx \qquad \eta_2(p) = \int_0^\infty e^{-p\xi} y_2(\xi) d\xi$$

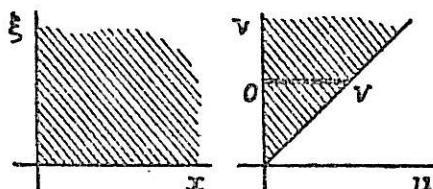
y multipliquémoslas transformando el producto de integrales en integral doble

$$\eta_1(p) \eta_2(p) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-p(x+\xi)} y_1(x) y_2(\xi) dx d\xi$$

Cambiemos de variables en esta integral doble tomando como variables nuevas  $w=x$ ,  $v=x+\xi$ , es decir,  $x=u$ ,  $\xi=v-u$  con lo que el jacobiano de la

transformación vale  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ .

En cuanto al recinto de integración (cuadrante positivo  $x>0$ ,  $\xi>0$ ) se transforma en el  $u>0$ ,  $v>u$ , que es el ángulo de 45° rayado en la figura. Por tanto



$$\eta_1(p) \eta_2(p) = \int_0^\infty e^{-pv} dv \int_0^v y_1(u) y_2(v-u) du$$

La operación combinada entre las dos funciones  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  consistente en tomar la integral del producto  $y_1(x)y_2(v-x)$  entre 0 y  $v$ , conduce a una función de  $v$  designada en los tratados alemanes por  $y_1(x)*y_2(x)$  y llamada «Faltung» (plegamiento) que podemos traducir por *producto compuesto*. Con esta notación escribiremos

$$\eta_1(p) \cdot \eta_2(p) = \mathcal{L}[y_1(x) * y_2(x)] \quad \text{de donde} \quad \mathcal{L}^{-1}[\eta_1 \eta_2] = y_1 * y_2$$

La transformada del *producto compuesto* de dos funciones es el producto ordinario de sus transformadas. Y, por tanto, *la generatriz del producto ordinario de dos funciones es el producto compuesto de sus generatrices*.

**6. Aplicación a las ecuaciones diferenciales lineales.**—La transformación de Laplace convierte, como se ha dicho, la operación de *integrar* en una *división* por la nueva variable, y la de *derivar* en una *multiplicación* (salvo el polinomio sustractivo de que hemos hablado en el párrafo 3), es decir, reduce las operaciones analíticas  $\int$  y  $D$  a operaciones *algebraicas* efectuadas sobre las transformadas. Toda función cuyas derivadas o integrales tengan que cumplir ciertas relaciones de *carácter lineal* (como es el caso de una ecuación diferencial lineal o sistema) se transformará de este modo en otra cuyos productos o cocientes por la variable tendrán que cumplir relación análoga (por el carácter lineal de la transformación). Ello permitirá calcular *algebraicamente* la función transformada y sólo restará hallar la transformada inversa o generatriz del resultado obtenido. Para facilitar esta tarea, las obras especiales dedicadas a esta novísima técnica de cálculo, que se ha impuesto en esta última década, contienen ya extensas tablas de funciones y sus transformadas (\*).

(\*) V., por ejemplo: *Doetsch*: «Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation»; *Carslow, and Yüger*: «Operational Methods in Applied Mathematics»; *Churchill*: «Modern Operational Mathematics in Engineering».

Estamos, pues, en lo que a la transformación de Laplace se refiere, en un mo-

Para empezar vamos a aplicar el método a un ejemplo sencillo resuelto ya en la lección 11.

Tratemos de hallar la variación de intensidad en un circuito de resistencia  $R$ , autoinducción  $L$  y capacidad  $C$  por el que circula inicialmente una corriente  $i(0)=i_0$ , al conectarlo súbitamente con un generador de corriente alterna cuya f. e. m. tiene por ecuación (referida al instante inicial  $t=0$  de cierre)  $y=a \operatorname{sen} \Omega t$ . La ecuación será (v. Lec. 11, §§ 3 y 4)

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = a \operatorname{sen} \Omega t$$

En lugar de buscar  $i(t)$  calculemos su transformada  $\eta(p)$ , que habrá de verificar la ecuación que resulta de aplicar el operador  $\mathfrak{L}$  a los dos miembros

$$L[p\eta - i(0)] + R\eta + \frac{1}{Cp} \eta = a \mathfrak{L}[\operatorname{sen} \Omega t] = a \frac{\Omega}{p^2 + \Omega^2}$$

ecuación algebraica lineal en  $\eta$  de la que resulta

$$\eta = \frac{a \Omega p/L}{(p^2 + \Omega^2) \left( p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{CL} \right)} + \frac{i_0 p}{p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{CL}}$$

Sólo resta hallar la *generatriz Laplace* de esta fracción algebraica en  $p$ . Para ello la descompondremos en suma de fracciones simples, suponiendo que  $\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{CL} < 0$ , es decir, que el circuito es *oscilante*. Las raíces del trinomio del denominador son, pues, imaginarias, y este trinomio puede escribirse en la forma  $\left( p + \frac{R}{2L} \right)^2 + \frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}$  de modo que suponiendo  $\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2} = \omega^2$  se obtiene

$$\eta(p) = \frac{Ap + B}{p^2 + \Omega^2} + \frac{A_1(p + R/2L) + B_1}{\left( p + \frac{R}{2L} \right)^2 + \omega^2}$$

donde los coeficientes  $A, B, A_1, B_1$  son coeficientes fáciles de obtener en función de las constantes  $C, R, L, \Omega, a$ .

Recordando las transformaciones obtenidas en el párrafo 2 será

$$i(t) = A \cos \Omega t + \frac{B}{\Omega} \operatorname{sen} \Omega t + e^{-\frac{R}{2L} t} \left[ A_1 \cos \omega t + \frac{B_1}{\omega} \operatorname{sen} \omega t \right]$$

mento del Análisis análogo al momento aritmético de comienzos del siglo XVII cuando la creación de las tablas logarítmicas. Consisten éstas, como sabe el lector, en la transformación de un campo numérico en otro (logarítmico) en el que ciertas operaciones (multiplicar, dividir, potencia, extraer raíces) resultan notablemente simplificadas. Operando en este campo precisa hallar luego el antilogaritmo del resultado.

Los dos primeros sumandos constituyen la intensidad *permanente*. Con el tercer sumando forman el régimen transitorio

Lo ventajoso del método estriba en que *hemos obtenido directamente la solución particular que se ajusta a la condición inicial prefijada*  $i(0)=i_0$

Otro ejemplo.  $y''+y'-2y=x$  con las condiciones iniciales  $y(0)=2$ ,  $y'(0)=-1$ . Su transformada deberá verificar

$$p^2 \eta - 2p + 1 + p \eta - 2 - 2\eta = \frac{1}{p^2} \quad \eta(p^2 + p - 2) = \frac{1}{p^2} + 2p + 1$$

de donde

$$\eta = \frac{2p^3 + p^2 + 1}{p^2(p^2 + p - 2)} = -\frac{1/2}{p^2} - \frac{1/4}{p} + \frac{4/3}{p-1} + \frac{11/12}{p+2}$$

cuya generatriz es

$$y(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{4}{3}e^x + \frac{11}{12}e^{-2x}$$

función que para  $x=0$  vale efectivamente

$$-\frac{1}{4} + \frac{4}{3} + \frac{11}{12} = 2$$

y cuya derivada  $y'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{4}{3}e^x - \frac{11}{6}e^{-2x}$  para  $x=0$  vale  $-1$ .

**7. Aplicación a los sistemas.**—El método expuesto puede aplicarse a los sistemas de ecuaciones, con idéntica ventaja de proporcionar las soluciones convenientes a las condiciones iniciales prefijadas, y otra ventaja de mayor interés todavía, que vamos a poner de manifiesto mediante casos prácticos.

Ejemplo 1.º Trátese, por ejemplo, de hallar las funciones  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ , que satisfacen al sistema lineal (resuelto por otros procedimientos en la lección anterior, párrafos 7 y 9)

$$\begin{aligned} x' + 6x + 3y - 14z &= 0 \\ y' - 4x - 3y + 8z &= 0 \\ z' + 2x + y - 5z &= \text{sen } t \end{aligned}$$

y que para  $t=0$  tiene los valores  $x(0)=1$ ,  $y(0)=-1$ ,  $z(0)=0$ .

Llamemos  $\xi(p)$ ,  $\eta(p)$ ,  $\zeta(p)$  las respectivas transformadas Laplace, las cuales habrán de satisfacer al sistema transformado según las reglas del § 2.

$$\begin{aligned} p\xi - 1 + 6\xi + 3\eta - 14\zeta &= 0 & \text{o sea} & \quad (p+6)\xi + 3\eta - 14\zeta = 1 \\ p\eta + 1 - 4\xi - 3\eta + 8\zeta &= 0 & \text{o sea} & \quad -4\xi + (p-3)\eta + 8\zeta = -1 \\ p\zeta + 2\xi + \eta - 5\zeta &= \frac{1}{p^2+1} & \text{o sea} & \quad 2\xi + \eta + (p-5)\zeta = \frac{1}{p^2+1} \end{aligned}$$



sistema algebraico en  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , del que se deduce

$$\xi = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -14 \\ -1 & p-3 & 8 \\ \frac{1}{p^2+1} & 1 & p-5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p+6 & 3 & -14 \\ -4 & p-3 & 8 \\ 2 & 1 & p-5 \end{vmatrix}} = \frac{p^3 - 4p^2 + 3p + 12}{(p+1)(p-2)(p^2+1)} =$$

$$= -\frac{2}{3} \frac{1}{p+1} + \frac{2}{3} \frac{1}{p-2} + \frac{p-5}{p^2+1}$$

La función generatriz  $x(t)$  solución será, por tanto (§ 2),

$$x(t) = -\frac{2}{3} e^{-t} + \frac{2}{3} e^{2t} + \cos t - 5 \sin t$$

que, en efecto, toma para  $t=0$  el valor de  $x(0)=1$ .

Análogamente calcularíamos  $y(t)$  y  $z(t)$ . Obsérvese que no sólo el método da *directamente* las funciones  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ , que satisfacen a las condiciones iniciales dadas, sino que, además, *estas funciones se pueden calcular independientemente unas de otras*, lo que no ocurre empleando los métodos clásicos.

Para resolver el mismo problema mediante la determinación previa de las soluciones generales, tal como se hizo en los párrafos 7 ó 9 de la lección anterior, fué preciso, como se recordará, hallar las constantes de integración *a posteriori*, resolviendo el sistema numérico que resultaba de expresar el cumplimiento de dichas condiciones, lo que, en definitiva, impedía el cálculo por separado de cada una de las funciones incógnitas.

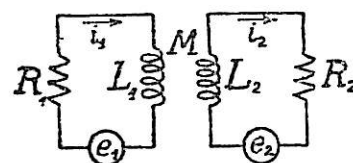
**8. Aplicación al cálculo de regímenes transitorios en los circuitos y redes eléctricas.**— Cuando varios circuitos están conectados entre sí, o simplemente próximos, la variación de intensidad de cada uno de ellos (con la consiguiente variación del campo magnético creado) induce fuerzas electromotrices en los demás, de modo que la ecuación diferencial que regula la variación en la intensidad en cada uno de los circuitos contiene asimismo las derivadas de las intensidades en todos los demás. Es decir, estas ecuaciones constituyen *sistemas* lineales de tantas ecuaciones como circuitos.

Así, por ejemplo, consideremos dos circuitos próximos, de autoinducciones  $L_1$ ,  $L_2$  resistencias óhmicas  $R_1$ ,  $R_2$  y capacidades despreciables, respectivamente excitados por fuerzas electromotrices  $e_1(t)$ ,  $e_2(t)$ . Y tratemos de hallar las intensidades variables  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$  en ellos, cada una de las cuales inducirá en el otro circuito una f. e. m. respectivamente proporcional a sus derivadas  $\frac{di_1}{dt}$  y  $\frac{di_2}{dt}$ . El coeficiente de proporcionalidad es el llamado *coeficiente de inducción mutua* entre ambos circuitos, que representaremos con la letra  $M$  (y cuyo valor depende exclusivamente de la forma geométrica de

ambos circuitos, supuesta fija la permeabilidad magnética del medio), de modo que las ecuaciones diferenciales a que obedecen  $i_1$  e  $i_2$  son

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + R_1 i_1 = e_1(t)$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + R_2 i_2 = e_2(t)$$



Si en un instante dado, adoptado como inicial, conocemos las intensidades  $i_1(0)$  e  $i_2(0)$  que recorren ambos circuitos, las ecuaciones algebraicas a que satisfarán las transformadas Laplace  $\eta_1(p)$ ,  $\eta_2(p)$  de ambas funciones serán

$$L_1(p \eta_1 - i_1(0)) + M(p \eta_2 - i_2(0)) + R_1 \eta_1 = \varepsilon_1(p)$$

$$L_2(p \eta_2 - i_2(0)) + M(p \eta_1 - i_1(0)) + R_2 \eta_2 = \varepsilon_2(p)$$

donde  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  son las transformadas Laplace de  $e_1(t)$  y  $e_2(t)$ .

Resuelto este sencillo sistema obtendremos  $\eta_1 = \varphi_1(p)$ ,  $\eta_2 = \varphi_2(p)$ , y las generatrices de estas funciones darán las intensidades buscadas en cada circuito. Así se resuelven para dos circuitos en presencia, los problemas de determinación del régimen transitorio durante la apertura o cierre de uno o ambos circuitos. La apertura de un circuito supone la anulación de la f e m correspondiente y el cierre la anulación de su intensidad inicial.

En general, si tenemos  $n$  circuitos conectados formando red, cada uno excitado por una f. e. m.  $e_k(t)$  y recorrido por la intensidad  $i_k(t)$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) y designamos por  $R_{kk}$ ,  $L_{kk}$ ,  $C_{kk}$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) la resistencia, autoinducción y capacidad propia del circuito  $k^o$ , así como por  $R_{kl}$ ,  $L_{kl}$ ,  $C_{kl}$  la resistencia, autoinducción y capacidad mutua entre el circuito  $k^o$  y el  $l^o$ , la ecuación a que conduce la segunda ley de Kirschhoff aplicada a dicho circuito será (\*)

$$R_{k1} i_1 + L_{k1} \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_{k1}} \int_0^t i_1 dt + R_{k2} i_2 + \dots + R_{kk} i_k + L_{kk} \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C_{kk}} \int_0^t i_k dt +$$

$$+ R_{kn} i_n + L_{kn} \frac{di_n}{dt} + \frac{1}{C_{kn}} \int_0^t i_n dt = e_k(t) \quad k=1, 2, \dots, n \quad [1]$$

Las  $n$  ecuaciones análogas que podríamos escribir variando  $k$  de 1 a  $n$  constituyen el sistema que nos determinará las intensidades en todos los circuitos en función del tiempo, en cuanto conozcamos los valores iniciales de las mismas  $i_1(0)$ ,  $i_2(0)$ , ...,  $i_n(0)$ .

Problemas de este carácter son los que tiene que resolver el ingeniero electrotécnico cuando se propone estudiar el régimen transitorio que se produce en tales redes al conectar un circuito cualquiera a la red o al

(\*) Suponemos nulas, para simplificar, las cargas iniciales. De lo contrario habrá que restar de los segundos miembros las diferencias de tensión inicial producidas por el efecto de capacidad.

aplicar súbitamente en él una determinada f. e. m. o cuando se corta súbitamente uno de los circuitos por avería, etc. .

Para resolver este sistema por los métodos clásicos tendríamos que :

1.º Derivar las ecuaciones para eliminar los signos integral, con lo que tendríamos un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales de segundo orden ;

2.º Hallar por los métodos expuestos en la lección anterior la solución general, es decir, el conjunto de  $n$  funciones  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$  ...,  $i_n(t)$  dependientes de  $2n$  constantes arbitrarias que satisfacen el sistema.

3.º Calcular estas  $2n$  constantes con los valores dados de  $i_1(0)$ ,  $i_2(0)$ , ...,  $i_n(0)$  y los de  $i'_1(0)$ ,  $i'_2(0)$ , ...,  $i'_n(0)$ , que resultan del sistema [1] haciendo en él  $t=0$ .

Todos estos cálculos son, en general, de una longitud extraordinariamente enojosa, sobre todo por el hecho de que *para calcular el régimen transitorio en un punto determinado de la red, como interesa frecuentemente en la práctica, es necesario, en general, calcular simultáneamente el régimen en todos los circuitos de que consta.*

*El método de Laplace evita este grave inconveniente, pues permite calcular cualquiera de las  $i_k$  independientemente de las restantes, dando, además, directamente la solución particular correspondiente a las condiciones iniciales  $i_1(0)$ ,  $i_2(0)$ , ...,  $i_n(0)$  de la red en el momento de producirse en ella la perturbación estudiada.*

Llamando  $\eta_k(p)$  las transformadas Laplace de las  $i_k(t)$ , el sistema transformado (algebraico) del [1] será

$$R_{k1}\eta_1 + L_{k1}[p\eta_1 - i_1(0)] + \frac{1}{C_{k1}} \frac{\eta_1}{p} + R_{k2}\eta_2 + \dots + R_{kk}\eta_k + L_{kk}[p\eta_k - i_k(0)] + \frac{1}{C_{kk}} \frac{\eta_k}{p} + \dots + R_{kn}\eta_n + L_{kn}[p\eta_n - i_n(0)] + \frac{1}{C_{kn}} \frac{\eta_n}{p} = \varepsilon_k(p) \quad [2]$$

donde  $\varepsilon_k$  es la transformada de  $e_k$ .

Si deseamos conocer solamente el régimen transitorio en el circuito  $m^o$ , calcularemos en este sistema (lineal en las  $\eta_k$ ) solamente la  $\eta_m = \varphi_m(p)$  y su *generatriz Laplacé* será la  $i_m(t)$  deseada.

Como las f. e. m.  $e_k(t)$  que la práctica presenta son constantes o funciones senoidales, sus transformadas (§ 2) son *funciones racionales* de  $p$ , y al resolver el sistema [2] obtendremos expresiones para  $\eta_k$ , asimismo racionales. Descompuestas éstas en fracciones simples de la forma conocida, éstas resultan ser (v. § 2) transformadas Laplace de funciones fácilmente expresables mediante exponenciales, senos y cosenos. Este tipo de funciones generatrices será, pues, el que dará los regímenes transitorios investigados (\*).

(\*) Para más detalles sobre la aplicación de este método puede consultar el lector las obras antes mencionadas.

NOTA.—Todo lo dicho se aplica, naturalmente, sólo a circuitos llamados de *constantes localizadas*, es decir, de extensión relativamente corta para poder suponer el circuito fragmentado esquemáticamente en un número finito de elementos a cada uno de los cuales se atribuye una resistencia (sin autoinducción ni capacidad), una autoinducción (sin resistencia ni capacidad) o una capacidad (sin resistencia ni autoinducción). Pero en rigor, las cosas no ocurren de modo tan sencillo, pues en cada elemento  $dx$  de línea se producen oscilaciones de la energía entre los campos eléctricos y magnético, por efecto de la capacidad y de la autoinducción, así como pérdidas de energía por efecto de la resistencia (y aun de la conductancia lateral) y en líneas de transporte de energía de gran longitud ya no es posible plantear el fenómeno al modo anterior sin cometer errores inadmisibles. Las constantes consideradas deben tratarse como se presentan en la realidad, es decir, uniformemente distribuidas a lo largo de la línea, con lo que las ecuaciones diferenciales que rigen el fenómeno dependen de las dos variables, tiempo  $t$  y distancia  $x$  del elemento de línea a un extremo. Son, en definitiva, ecuaciones *en derivadas parciales*, de las que nos ocuparemos más adelante.

9. **Una interpretación geométrica de la transformación de Laplace.**—Ante todo advertiremos que se trata aquí de dar una *interpretación intuitiva*, de la que no hemos de obtener por el momento ulteriores consecuencias teóricas. Por tanto se nos permitirá prescindir de excesivas preocupaciones rigoristas que carecerían de objeto para este simple fin.

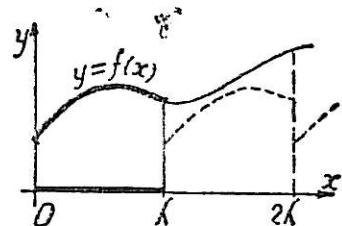
Desarrollemos en serie de Fourier la función  $f(x)$  en el intervalo  $0, \lambda$ , supuesta efectivamente desarrollable, es decir, formemos la serie

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} \left( a_n \cos n \frac{2\pi}{\lambda} x + b_n \operatorname{sen} n \frac{2\pi}{\lambda} x \right) \quad [1]$$

coeficientes vienen dados por

$$a_n = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) \cos n \frac{2\pi}{\lambda} x dx \quad [2]$$

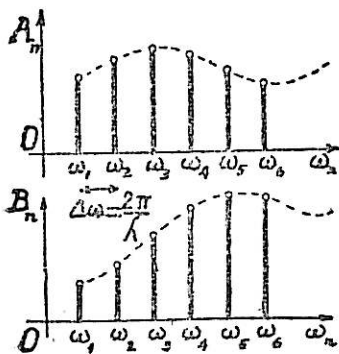
$$b_n = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) \operatorname{sen} n \frac{2\pi}{\lambda} x dx$$



que escribiremos mejor con  $\omega_n = n \frac{2\pi}{\lambda}$

$$A_n = \frac{\lambda}{2} a_n = \int_0^{\lambda} f(x) \cos \omega_n x dx \quad B_n = \frac{\lambda}{2} b_n = \int_0^{\lambda} f(x) \operatorname{sen} \omega_n x dx \quad [3]$$

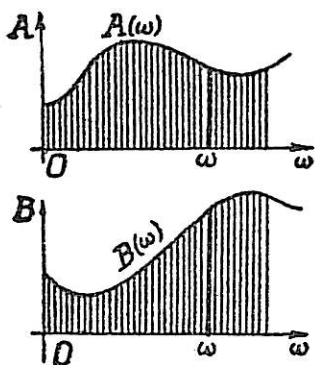
Fuera del intervalo  $0, \lambda$ , la serie Fourier repite periódicamente los valores de  $f(x)$  en él y, por tanto, ya no tiene, en general, nada que ver con los verdaderos valores de esta función.



Podemos representar cada armónico por el par de valores  $A_n, B_n$  en función de la pulsación  $\omega_n$  correspondiente, obteniendo así, como indican las figuras, *dos sucesiones indefinidas discontinuas* de puntos cuyo conjunto puede constituir *otra representación geométrica indirecta* de la función  $f(x)$  en el intervalo  $0, \lambda$ . Por analogía con las bandas espectrales obtenidas en un espectroscopio (correspondientes a las frecuencias de las ondas separadas por él) llamaremos a tales sucesiones de puntos, o mejor de ordenadas, *los espectros* de la función  $f(x)$  en el intervalo  $0, \lambda$ .

Notemos que en esta representación gráfica del desarrollo de Fourier el intervalo que separa cada pulsación de la anterior es  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{\lambda}$ .

Supongamos ahora que  $f(x)$  cumple, por ejemplo, las condiciones de Dirichlet en todo intervalo positivo finito (v. Tomo I, lec. 17). A medida que aumenta  $\lambda$  iremos obteniendo desarrollos en serie válidos, representativos de la función cada vez en intervalos más amplios, al tiempo que las rayas de los espectros se van aproximando tendiendo a cero el intervalo  $\Delta\omega$  que las separa. Admitamos que estos espectros al tender  $\lambda \rightarrow \infty$  tiendan a dibujar ciertas curvas continuas, que llamaremos *espectros continuos* de  $f(x)$ , y que serán representativas de la función en todo el semieje  $x > 0$ . ¿Qué ecuación tendrán estas curvas?



Un punto de abscisa  $\omega$  puede considerarse como el límite del de abscisa  $\omega_n = \frac{n2\pi}{\lambda}$ , tomando para  $n$  valo-

res enteros  $n = E\left[\frac{\lambda\omega}{2\pi}\right]$  (\*). Las funciones  $A_n, M_n$  de  $\omega_n$  se convertirán en el límite (verificadas todas las hipótesis necesarias para la existencia de tales límites) en

$$A(\omega) = \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x \, dx \qquad B(\omega) = \int_0^{\infty} f(x) \sin \omega x \, dx$$

Si imaginamos ahora una transformación Laplace de parámetro  $p = j\omega$  imaginario puro y designamos, como antes, por

$$\eta(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{j\omega x} f(x) \, dx$$

será

$$\eta(j\omega) = \int_0^{\infty} f(x) (\cos \omega x + j \sin \omega x) = A(\omega) + j B(\omega)$$

Es decir, la transformada Laplace de  $f(x)$  de parámetro imaginario puro  $j\omega$  tiene por componentes real e imaginaria los espectros continuos de  $f(x)$ .

Como es sabido, cada armónico puede representarse gráficamente por un vector de componentes cartesianas  $a_n, b_n$  o polares  $M_n, \varphi_n$  (amplitud y fase) y los espectros obtenidos relativos a las componentes  $a_n, b_n$  pueden sustituirse por los correspondientes a la amplitud y la fase de cada armónico (\*\*), espectros que darán análogamente el módulo y el argumento de la transformada Laplace de  $f(x)$ .

Si el parámetro de la transformación es complejo  $p = a + j\omega$  será  $e^{-pf(x)} = e^{-a x} e^{-j\omega x} f(x)$  y las componentes real e imaginaria, de la transformada Laplace (que ahora será función de  $a$  y  $\omega$ ) son los espectros continuos de  $e^{-a x} f(x)$ .

10. Interpretación física del teorema de producto de transformadas.—Nos parece interesante interpretar además físicamente el teorema (§ 5) del producto de transformadas, aplicándolo a la integración de la ecuación diferencial de un circuito excitado por una f. e m. variable, dándole un significado relacionado con el principio físico de superposición de efectos.

(\*)  $E[\ ]$  significa la parte entera con lo que  $n = \frac{\lambda\omega}{2\pi} + \epsilon$ , siendo  $\epsilon < 1$ , y, por tanto

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \omega_n = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left( \omega + \frac{2\pi\epsilon}{\lambda} \right) = \omega$$

(\*\*) Se obtienen así las curvas llamadas «frequency pictures» por *Pilcher* en un ingenioso artículo «A physical interpretation of the modern treatment of Heaviside's operational calculus», del que hemos recogido la idea central. (V. The Metropolitan Vickers Gazette, junio-julio 1949.) La demostración rigurosa de estos resultados se consigue con el llamado teorema de Mellin.



Comparemos para ello las intensidades producidas en el circuito por la inserción de una f. e. m. -unidad (salto unidad) y por la f. e. m. variable  $e(t)$ , ambas con idénticas condiciones iniciales  $i(0)=\dot{i}(0)=0$ . Las ecuaciones respectivas serán de la forma

$$P(D)i=1 \qquad P(D)i=e(t)$$

Sea  $i_1(t)$  la intensidad engendrada en el primer caso, que se hallará mediante su transformada Laplace  $\eta_1 = \frac{1}{p P(p)}$ , de modo que  $i_1 = L^{-1}(\eta_1)$ .

Si llamamos  $\varepsilon(p)$  la transformada de  $e(t)$  será, análogamente, en el segundo caso (véase § 5).

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\varepsilon(p)}{P(p)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ p \varepsilon(p) \cdot \frac{1}{p P(p)} \right] = e'(t) * i_1(t) = \int_0^t i_1(t-\tau) e'(\tau) d\tau$$

y como  $e'(\tau)d\tau = de$ , incremento experimentado por la f. e. m. excitante en el intervalo  $d\tau$ , la fórmula nos dice que la intensidad  $i(t)$  en el circuito en el instante  $t$  es la suma de las intensidades  $i_1(t-\tau)$  de provocadas por los saltos sucesivos de f. e. m. desde el instante inicial hasta dicho instante  $t$ .

Véase, pues, cuán rica de contenido físico es esta transformación aparentemente tan abstracta.

### EJERCICIOS

1. Calcular las transformadas Laplace de  $\text{Sh } \omega x$  y de
2. Calcular la transformada de  $x \text{ sen } \omega x$ .
3. Idem de  $\text{sen } \omega x \text{ cos } \omega x$ .
4. Idem de  $\text{sen } \omega x \text{ Sh } \omega x$  y de  $\text{cos } \omega x \text{ Ch } \omega x$ .
5. Idem de  $x^n e^{ax}$ .
6. Calcular la función generatriz de  $\frac{1}{p^4 - a^4}$
7. Idem de  $\frac{p}{p^4 - a^4}$
8. Idem de  $\frac{p^2}{p^4 - a^4}$
9. Idem de  $\frac{p^3}{p^4 - a^4}$
10. Idem de  $\frac{p^2}{p^3 + a^3}$
11. Idem de  $\frac{1}{p^3 + a^3}$
12. Idem de  $\frac{p}{p^3 - a^3}$
13. Idem de  $\frac{1}{\sqrt{p^2 - 1}}$  (Téngase en cuenta la tabla).
14. Empleando la transformación de Laplace, hallar la integral de  $y'' - 3y' + 2y = e^x$  que para  $x=0$  da  $y=0$ ,  $y'=0$ .
15. Idem  $y'' + 4x = 2 \text{ sen } 2x$  para  $x=0$ ,  $y=1$ ,  $y'=0$ .
16. Idem  $y'' - y' = x^2$  para  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $y'=1$ .
17. Idem  $y''' + y = x e^x$  con  $y=y'=y''=0$  para  $x=0$ .
18. Idem  $y'' + y = x \text{ cos } 2x$  con  $y=y'=0$  para  $x=0$ .
19. Integrar el sistema ( $t$  variable independiente).
 
$$\left. \begin{aligned} 3x' + y + 2x &= 1 \\ x' + 4y' + 3y &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ con } x=y=0 \text{ para } t=0$$



20. Idem  $x' - x - 2y = t$      $y' - y - 2z = t$      $x = 2$      $y = 4$     para  $t = 0$ .

21. Idem 
$$\left. \begin{aligned} x + 3y - 14z + 6x &= e^{2t} \\ y - 3y + 8z - 4x &= 0 \\ z' + y - 5z + 2x &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ con } x = 1 \ y = -1 \ z = 0 \text{ para } t = 0.$$

22. Obtener los coeficientes  $A, B, A_1, B_1$  del ejemplo del § 6 y verificar el resultado con lo expuesto en lección 11.

23. Aplicar el § 8 a la teoría del transformador con  $e_1(t) = A \text{ sen } \omega t$ ,  $e_2(t) = 0$ .

TABLA DE ALGUNAS TRANSFORMADAS LAPLACE

GENERATRIZ	TRANSFORMADA	GENERATRIZ	TRANSFORMADA
$k$	$\frac{k}{p}$	$x^n e^{ax}$	$\frac{\Gamma(n+1)}{(p-a)^{n+1}}$ $n > -1$ $p > a$
$ke^{ax}$	$\frac{k}{p-a}$ $p > -a$	$\frac{1 - e^{-x}}{x}$	$l\left(1 + \frac{1}{p}\right)$
$\text{sen } \omega x$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$lx$	$\frac{\Gamma'(1)}{p} = \frac{l p}{p}$
$\text{cos } \omega x$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{\text{cos } a \sqrt{x}}{\pi \sqrt{x}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi p}} e^{-\frac{a^2}{4p}}$
$e^{-ax} \text{ sen } \omega x$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$ $p > -a$	$\frac{\text{sen } a \sqrt{x}}{\pi}$	$\frac{a}{2\sqrt{\pi p^{3/2}}} e^{-\frac{a^2}{4p}}$
$e^{-ax} \text{ cos } \omega x$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$ $p > -a$	$\frac{\text{Ch } a \sqrt{x}}{\pi \sqrt{x}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi p}} e^{-\frac{a^2}{4p}}$
$\text{cos } (\omega x + \psi)$	$\frac{p \text{ cos } \psi - \omega \text{ sen } \psi}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{\text{Sh } a \sqrt{x}}{\pi}$	$\frac{a}{2\sqrt{\pi p^{3/2}}} e^{-\frac{a^2}{4p}}$
$x^n$	$\frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}$ $n+1 > 0$ $p > 0$	$J_0(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$
$\text{Sh } \omega x$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$	$J_\nu(x)$	$\frac{(\sqrt{1+p^2} - p)^\nu}{\sqrt{1+p^2}}$ $\nu > -1$
$\text{Ch } \omega x$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	$J_0(a\sqrt{x})$	$\frac{1}{p} e^{-\frac{a^2}{4p}}$
$x \text{ sen } \omega x$	$\frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}$	$J_\nu(ax)$	$\frac{(\sqrt{p^2 + a^2} - p)^\nu}{\nu a^\nu}$ $\nu > 0$
$\text{sen } \omega x \text{ Sh } \omega x$	$\frac{2\omega^2 p^2}{p^4 + 4\omega^4}$	$x^\nu J_\nu(ax)$	$\frac{(2a)^\nu \Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} (p^2 + a^2)^{\nu + \frac{1}{2}}}$ $\nu > -1$
$\text{cos } \omega x \text{ Ch } \omega x$	$\frac{p^3}{p^4 + 4\omega^4}$		

En todas las transformadas en las que no se indica cota inferior de  $p$  se sobreentenderá  $p > 0$

**Capítulo VII.—METODOS APROXIMADOS PARA LA INTEGRACION DE ECUACIONES Y SISTEMAS**

**LECCIÓN 19.—MÉTODOS GRÁFICOS**

Ya hemos visto cuán limitado es el número de tipos de ecuaciones diferenciales integrables elementalmente. Los desarrollos en serie nos han permitido resolver la dificultad y tabular algunas trascendentes nuevas de frecuente aplicación técnica, definidas por ecuaciones diferenciales no elementales. Pero no siempre es fácil obtener desarrollos en serie de convergencia suficientemente rápida para las necesidades prácticas, y no siempre al plantear un fenómeno mediante una ecuación diferencial se conoce la expresión analítica de los coeficientes, funciones de  $x$ , que en ella intervienen, como ocurre cuando la variación de tales coeficientes viene dada por una gráfica o por una tabla experimental. Interesa en tales casos habilitar nuevos recursos para obtener la función integral que cumple condiciones iniciales prefijadas.

Las demostraciones de los teoremas de existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales indicadas en las lecciones 1.<sup>a</sup>, 6.<sup>a</sup> y 17.<sup>a</sup> consisten, como recordará el lector, en construir soluciones aproximadas de aproximación creciente (series en el método de Cauchy, polígonos en el de Euler, integrales en el de Picard) y en demostrar la convergencia del proceso; es decir, la posibilidad de hacer el error menor que un límite prefijado. Tales demostraciones contienen, pues, en germen métodos de integración aproximada a los que sólo falta dar forma práctica.

Realizada esta tarea en lo que concierne al desarrollo en serie de la solución, empezaremos aquí por los métodos de integración gráfica, cuyo fundamento, sin duda el más sencillo conceptualmente, radica en la construcción del polígono de Euler.

**1. Construcción gráfica del polígono de Euler mediante el haz de isoclinas.**—Recordemos que toda ecuación diferencial de primer orden

$$y' = f(x, y)$$

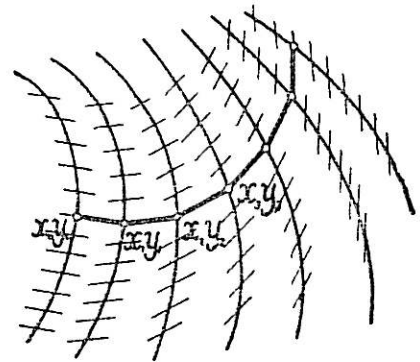
en la que suponemos  $f(x, y)$  uniforme y continua, hace corresponder a cada punto del plano  $x, y$  un valor de  $y'$ , que es la pendiente de la tangente a la curva integral que pasa por él, es decir, define un *campo de direcciones* que se puede imaginar representado trazando por cada punto un segmentito orientado según dicha dirección. Todo polígono formado por tales segmentitos se llama *polígono de Euler* y constituye una solución aproximada de la ecuación, de aproximación *teórica* tanto mayor cuanto más

pequeños sean dichos segmentos. Decimos aproximación *teórica* porque por otra parte la acumulación de errores fortuitos de construcción aumenta con el número de construcciones y, por tanto, con la pequeñez de los intervalos elegidos, siendo además tales errores mucho más difíciles de acotar que los errores teóricos inherentes al método. Por todas estas razones la construcción de las curvas integrales mediante polígonos de Euler se reserva a los estudios en que sólo interese una idea cualitativa (o cuantitativa de grosera aproximación) de la *marcha del haz integral*, como ocurre en algunos problemas de meteorología, hidráulica, etc. En tales casos es de utilidad construir el *haz de isoclinas* del campo de direcciones, haz definido, como se recordará, por la ecuación

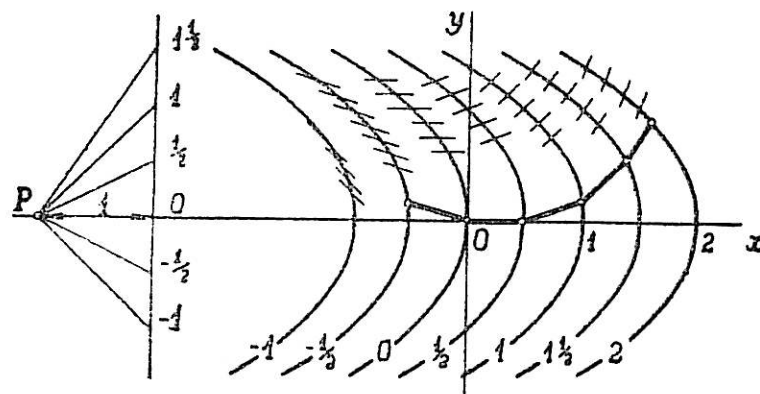
$$k = f(x, y)$$

al variar  $k$ . Cada curva une los puntos en los que la dirección del campo es constante ( $y' = k$ ) y el polígono de Euler que parte de un punto  $x_0, y_0$  se obtendrá trazando un trozo de tangente que pase por él hasta cortar a la isoclina siguiente en  $x_1, y_1$  por donde trazaremos el segundo trozo de tangente, y así sucesivamente hasta cortar a todas las isoclinas trazadas dentro del campo de variabilidad que nos interese.

EJEMPLO: Aplicando este procedimiento a la ecuación  $y' = y^2 + x$  resulta como isoclinas el haz de parábolas  $x = -y^2 + k$  y la construcción de la solución particular correspondiente a la condición inicial  $x_0 = 0, y_0 = 0$ , es decir, la curva integral que pasa por el origen, puede obtenerse como indica la figura.



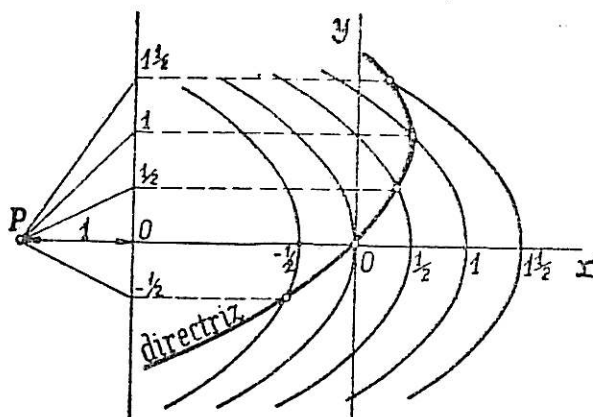
Se facilita la construcción trazando aparte el haz de direcciones correspondientes a las isoclinas, numerando éstas y aquéllas con los valores de



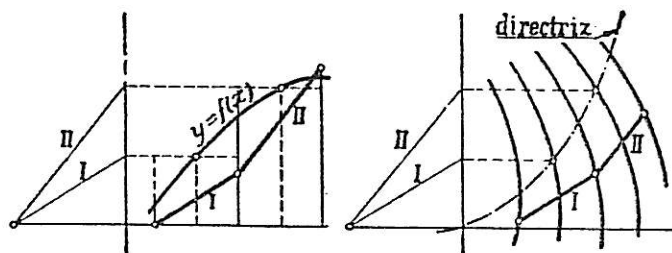
dichas pendientes, como indica la figura (en la que no había necesidad de trazar segmentitos de igual pendiente a lo largo de cada isoclina).

Para hacer más visible la correlación entre las curvas y sus direcciones, Ocagne aconseja la construcción de la curva que llama *directriz* de

la integración, obtenida, como se ve en la figura, uniendo los puntos de cada isoclina cuya ordenada es el valor de la pendiente  $k$  correspondiente a ella, es decir, la curva  $y=f(x, y)$ . En el ejemplo anterior esta curva es  $y=y^2+x$  (asimismo parábola de eje horizontal).

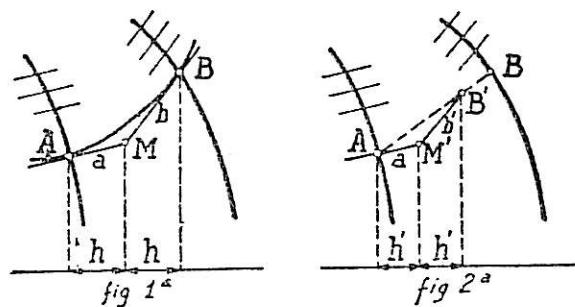


La construcción del polígono de Euler recuerda la del polígono integral de una curva  $y=f(x)$  (v. tomo I, lec. 12, § 7) y efectivamente para una ecuación diferencial de la forma  $y'=f(x)$  las isoclinas  $k=f(x)$  son rectas paralelas al eje  $y$ , y la directriz de la integración es  $y=f(x)$ , es decir, la propia curva que se integra.



*Observaciones complementarias.*—Del mismo modo que en los métodos gráficos de cuadratura no se toma como valor de la pendiente de la curva integral en cada intervalo la ordenada origen de la curva dada, sino una intermedia adecuada (fig. 1), convendrá aquí trazar los lados del polígono integral de modo que la pendiente de cada lado sea la correspondiente a una isoclina intermedia entre las que pasan por sus extremos (fig. 2), o, lo que es lo mismo, ir cortando las isoclinas dadas por lados del polígono integral limitando éstos en puntos intermedios entre estas isoclinas convenientemente elegidos.

Ocagne concreta los puntos en que conviene limitar los referidos lados del modo siguiente: Asimilemos la curva integral entre dos isoclinas a



una parábola de eje vertical (lo que equivale a tomar los tres primeros términos de su desarrollo en serie) y recordemos que las tangentes  $a$ ,  $b$  en los extremos de un arco de tal parábola (fig. 1) se cortan en un punto  $M$  de abscisa media. Partiendo, pues, del punto  $A$  de una isoclina  $v$  la tangente  $a$  correspondiente,

hallaremos el punto  $B$  de la inmediata (por el que procede trazar la nueva tangente  $b$ ), formando un triángulo  $AM'B'$

(semejante al  $AMB$ ) definido por las direcciones de los lados  $AM'$  y  $M'B'$  y por la igualdad de sus proyecciones horizontales, y hallando luego el homotético  $AMB$  con el vértice  $B$  en la segunda isoclina. Véase la obtención de  $B$  en la figura 2.<sup>a</sup> Esta sencilla construcción permitirá obtener las curvas integrales por puntos y tangentes con aproximación aceptable.

**2. Método de las curvas isopolares.**—El método de las isoclinas tal como lo hemos descrito exige el trazado de paralelas, es decir el uso del juego de escuadras. Más sencillos y por ende menos expuestos a errores de construcción serán los métodos que sólo exijan el uso exclusivo de la regla. Para conseguirlo, en lugar de construir las isoclinas del campo de direcciones (es decir los lugares de puntos de *direcciones paralelas*) construyamos curvas que llamaremos *isopolares* lugares de puntos cuyas correspondientes *direcciones sean concurrentes* en puntos propios (*polos* de ellas) convenientemente elegidos.

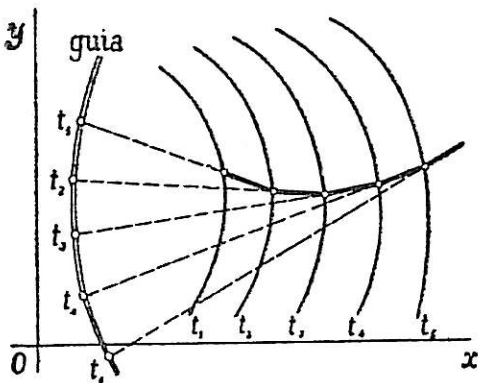
En la lección 4.<sup>a</sup>, § 3 vimos, por ejemplo, que en una ecuación diferencial lineal  $y' = f(x)y + \varphi(x)$  son isopolares las paralelas al eje  $y$ , y el lugar de sus polos, es decir de los puntos de concurso de las direcciones a lo largo de cada paralela en cuestión, es la curva que allí llamábamos *guía* de la ecuación. Numeradas correlativamente las referidas paralelas y sus polos en la curva *guía*, vimos cuan sencilla era la construcción de un polígono euleriano integral.

Generalizando la idea, dada una ecuación diferencial cualquiera de primer orden  $y' = f(x, y)$ , si es posible elegir una curva de polos

$$\xi = \xi(t) \quad \eta = \eta(t)$$

graduada según el parámetro  $t$  y su haz de isopolares correspondiente

$$\frac{y - \eta(t)}{x - \xi(t)} = f(x, y) \quad (= y')$$



que resulte de fácil construcción, podemos hacer uso de él para la construcción del polígono euleriano que pasa por un punto  $x_0 y_0$  de forma análoga a como hemos utilizado la curva guía en las ecuaciones lineales.

Ejemplo. La ecuación  $y' = \frac{y}{x} \left(1 - \frac{y}{x}\right)$  admite como serie guía la serie rectilínea  $\xi = 0 \quad \eta = t$ , a la que corresponde el sencillo haz de isopolares

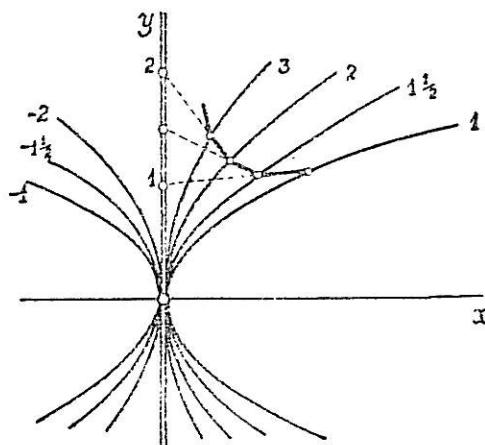
$$\frac{y - t}{x} = \frac{y}{x} \left(1 - \frac{y}{x}\right) \quad \text{es decir} \quad y^2 = tx$$

parábolas indicadas en la figura de la página siguiente.



Podemos plantearnos, recíprocamente, el problema ¿Qué tipos de ecuaciones diferenciales darán lugar a haces de isopolares y a curvas guías de forma sencilla?

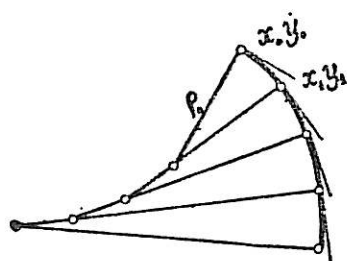
Desconocedores de antecedentes sobre este método que nos ha sugerido una inmediata generalización del método de Czuber desarrollado en el párrafo 3 de la lección 4.<sup>a</sup> para las ecuaciones lineales, nos limitamos aquí a brindar el tema al lector curioso (\*). Por ejemplo, las curvas que resultan para una serie guía rectilínea y un haz de rectas isopolares proyectivo por dicha serie, son las curvas llamadas *W*, de muy notables propiedades (\*\*).



**3. Integración gráfica de las ecuaciones de segundo orden.**—Una generalización del método del polígono para ecuaciones de primer orden nos conduce al método de los arcos de círculo osculador para las de segundo orden.

Sea  $y'' = f(x, y, y')$  la ecuación de segundo orden dada. Y sean  $x_0, y_0, y'_0$  los valores iniciales dados.

Calcularemos  $y''_0 = f(x_0, y_0, y'_0)$  y con estos valores obtendremos el radio de curvatura  $\rho_0 = \frac{[1 + y'^2_0]^{3/2}}{y''_0}$  de la curva integral en el punto  $x_0, y_0$ .



Tracemos con este radio y hacia el lado que indique la concavidad de la curva por el signo de  $y''$ , un arco pequeño de circunferencia tangente en el punto  $x_0, y_0$  a la recta de pendiente  $y'_0$  que pasa por él. Sean  $x_1, y_1$  las coordenadas del extremo de dicho arco e  $y'_1$  la pendiente de la tangente en él. Con la terna de nuevos valores  $x_1, y_1, y'_1$  haremos lo mismo que con la terna anterior, y así sucesivamente tendremos una curva formada por arcos de circunferencia tangente cada uno a los inmediatos y que representará aproximadamente la curva integral.

Se mejora notablemente la aproximación de este procedimiento mediante correcciones del radio análogas a las efectuadas con la pendiente en la integración de ecuaciones de primer orden. Por ejemplo: Con el valor de  $\rho$  correspondiente al punto medio del arco anterior, trácese un nuevo arco próximamente de igual amplitud, y repítase la misma construcción y corrección en cada arco. La tarea es doble, pero la aproximación se mejora grandemente.

Estas construcciones son particularmente indicadas en aquellas ecuaciones diferenciales que proceden de asignar a la curva condiciones de curvatura, es decir aquellas en que se da  $\rho$  como función de  $x, y, y'$  u

(\*) De todos modos, la generalización es tan natural que juzgamos improbable no haya sido considerada antes de ahora.

(\*\*) V., por ejemplo, Araújo, «Las curvas *W*». Publicaciones del Laboratorio y Seminario Matemático.—Tomo III. Madrid.



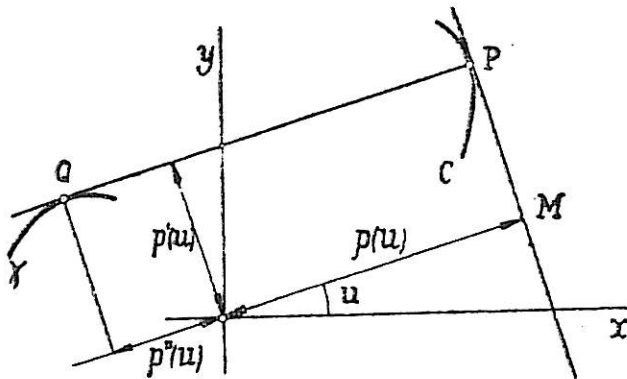
otros elementos (tal ocurre con las radiodes, curvas elásticas, curvas de capilaridad, etc.).

Cuando la ecuación diferencial no da  $\rho$  sino  $y''$  el cálculo de los valores de  $\rho$  para cada punto resulta largo. Puede abreviarse utilizando tablas circulares para pasar de la pendiente  $y'$  a la inclinación  $\alpha = \arctg y'$  con lo que resulta  $\rho = \frac{[1+y'^2]^{3/2}}{y''} = \frac{1}{y'' \cos^3 \alpha}$ , pero aún así el cálculo punto por punto resulta enojoso, y puede sustituirse por el siguiente ingenioso recurso.

4. Método de la antipodaria.—Debido a Meissner (\*), consiste en esencia en lo siguiente. Sea  $p = p(u)$  una función definida por la ecuación diferencial

$$p'' = f(u, p, p')$$

y las condiciones iniciales  $u_0, p_0, p'_0$ . Consideremos  $u$  y  $p$  como coordenadas o parámetros definidores de una recta normal a la de argumento  $u$ , a distancia de  $p$  origen, recta que en coordenadas cartesianas tendrá por ecuación



$$x \cos u + y \sin u - p = 0 \quad [1]$$

Una relación  $p = p(u)$  definirá un haz de rectas, y por tanto su envolvente  $c$ , cuya ecuación cartesiana resultaría de derivar respecto a  $u$

$$-x \sin u + y \cos u - p'(u) = 0 \quad [2]$$

y eliminar  $u$  entre [1] y [2].

En particular para un valor determinado de  $u$  el sistema [1] y [2] define las coordenadas cartesianas del punto de contacto  $P$ , y la ecuación [2] representa una recta evidentemente normal a la anterior, que pasa por dicho punto y dista del origen  $p'(u)$ .

Análogamente, la envolvente  $\gamma$  de la recta [2] tendrá con ella un punto de contacto  $Q$  definido por [2] y por

$$-x \cos u - y \sin u - p''(u) = 0 \quad [3]$$

que representa a su vez una recta perpendicular a la anterior y que dista  $p''(u)$  del origen.

Obsérvese que por ser  $\gamma$  evoluta de  $c$  será  $\rho = p(u) + p''(u) = PQ$  el radio de curvatura de la curva buscada  $c$ . De esta elegante y sencilla expresión del radio de curvatura se deduce la construcción de la curva.

El par inicial  $u_0, p_0$  define la recta inicial  $PM$ . El valor inicial  $p'_0$ , con su signo, da el punto de contacto o punto inicial  $P$  de la curva.

Calcúlese  $p'' = f(u_0, p_0, p'_0)$  y con radio igual a  $p''_0 + p_0$  (cuyo signo dirá la región de la tangente a que debe llevarse) trácese el primer arco. Su extremo  $\gamma$  y la tangente en él definen los nuevos valores  $u_1, p_1, p'_1$ , de los cuales se deducirá  $p''_1 = f(u_1, p_1, p'_1)$  y luego  $\rho_1 = p_1 + p''_1$ , con los cuales se podrá trazar el nuevo arco, y así sucesivamente.

Podemos aplicar aquí las mismas observaciones que en el método anterior para

(\*) Véase Hort, «Differential u. Integraigleichungen des Ingenieurs».

obtener mayor aproximación. Meissner aconseja tomar intervalos para  $u$  de  $5^\circ$  a  $15^\circ$ , según la variación de  $\rho$  (\*).

Las coordenadas  $p$  y  $u$  de la curva  $c$  así obtenida darán la integral, que puede representarse luego, si se quiere mayor claridad, en coordenadas cartesianas.

Obsérvese que trazando desde el origen las perpendiculares a las tangentes, el lugar de sus pies  $M$  o *podaria* de  $c$  es precisamente la representación en *coordenadas polares* de la función  $p(u)$  buscada. Es decir, que el método se resume en estos términos: *Se efectúa la integración gráfica en polares, pero determinando en lugar de la curva integral buscada su antipodaria (\*\*).*

**5. Aplicación a los sistemas.**—Dado un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden, de la forma

$$y' = f(x, y, z) \quad z' = \varphi(x, y, z) \quad [1]$$

$y, z$  funciones incógnitas,  $x$  variable, en el que supondremos que  $f$  y  $\varphi$  cumplen las condiciones que indican los teoremas de existencia, ya hemos visto (Lec. 17, § 3) su reducción a una ecuación de segundo orden en  $y''$

$$y'' = \psi(x, y, y') \quad [2]$$

por eliminación de  $z, z', z''$  entre las ecuaciones [1] y las que resultan de derivarlas una vez. Cuando tal eliminación es posible, podremos pues hallar las funciones  $y, z$ , correspondientes a unas condiciones iniciales dadas  $x_0, y_0, z_0$ , pues de [1] se obtiene  $y'_0$  y por tanto las condiciones iniciales  $x_0, y_0, y'_0$  correspondientes a la ecuación [2]. Para la integración gráfica de dicha ecuación podemos aplicar lo dicho en el párrafo precedente, y una vez obtenida la función  $y$  podemos deducir  $z$  de [1] o por eliminación análoga de  $y$ .

Si tales eliminaciones no fueran posibles podemos preguntarnos en qué medida los métodos gráficos expuestos para hallar en el plano el haz integral de una ecuación de primer orden son generalizables al espacio para hallar la congruencia de curvas integrales del sistema [1]. Observemos que tal sistema determina análogamente en el espacio un campo de direcciones definidas en cada punto por los cosenos directores

$$\frac{\cos \alpha}{dx} = \frac{\cos \beta}{dy} = \frac{\cos \gamma}{dz} \quad \text{y por tanto} \quad \cos \alpha = \frac{\cos \beta}{f(x, y, z)} = \frac{\cos \gamma}{\varphi(x, y, z)}$$

y representable asimismo mediante segmentos orientados, uno por cada punto. Pero si imaginamos tales segmentos proyectados en un sistema de representación (por ejemplo, diédrico, con la línea de tierra en el eje  $x$  y planos de proyección  $xy, xz$ ) las proyecciones de tales segmentos ya no constituirían en general campos planos de dirección como los de las ecuaciones ordinarias, puesto que en cada punto de una y otra proyección se proyectan todos los puntos del campo situados en la misma recta proyectante y a cada uno de ellos corresponde su segmento orientado.

(\*) Véase en *Hort*, Loc. cit., indicaciones para cuando el radio de curvatura varía lenta o rápidamente.

(\*\*) Esta observación nos ha inducido a dar al método el nombre de método de la *antipodaria*.

Por otra parte las curvas isoclinas, lugares de los puntos de direcciones asociadas paralelas no forman aquí un haz sino un complejo dependiente de los dos parámetros  $h$  y  $k$  definidores de cada dirección

$$h = f(x, y, z) \quad k = \varphi(x, y, z)$$

de modo que para generalizar aquí el método expuesto en el párrafo 1, habría que dar el complejo espacial de curvas isoclinas y además una radiación de direcciones, acotando cada una de sus semirrectas con los mismos parámetros  $h$  y  $k$  de la isoclina correspondiente. Con estos elementos procederíamos en el espacio como con el haz de curvas isoclinas y el de rectas correspondientes en el plano, pero no es fácil dar carácter práctico de dibujo a esta concepción espacial, y por ello se prefieren los métodos numéricos, de los que vamos a dar inmediatamente idea.

Cosa parecida ocurre con el método de las isopolares. Todas las tangentes del complejo o campo definido por [1] que pasan por un polo  $\xi, \eta, \zeta$  parten de puntos  $x, y, z$ , que han de satisfacer a las dos ecuaciones

$$\frac{y - \eta}{x - \xi} = f(x, y, z) \quad \frac{z - \zeta}{x - \xi} = \varphi(x, y, z) \quad [3]$$

y constituyen, por tanto, una curva. Como la dirección de la tangente depende de dos parámetros hemos de variar el polo sobre una superficie (superficie guía)  $\xi = f_1(s, t)$ ,  $\eta = f_2(s, t)$ ,  $\zeta = f_3(s, t)$ , y sustituyendo en [3] resultará el complejo correspondiente de curvas isopolares, que acotaríamos con el mismo par de coordenadas  $s, t$  que el punto correspondiente de la superficie guía. Las dificultades de traducción gráfica son las mismas que antes, y suben de punto para sistemas de más de dos funciones.

## EJERCICIOS

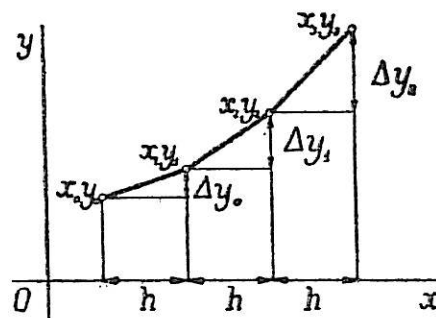
1. Demostrar que las curvas isoclinas de una ecuación diferencial siguen siendo isoclinas de todo haz isogonal al definido por dicha ecuación.
2. ¿Qué curva es la envolvente de las isoclinas de  $F(x, y, y') = 0,2$ . (V. lección 5.<sup>a</sup>, § 5, II).
3. Dada la ecuación  $y' = P(x, y)/Q(x, y)$  hállese la ecuación diferencial del haz de isoclinas y compárense los puntos singulares de una y otra.
4. Naturaleza de los puntos singulares del haz de isoclinas. Obsérvese lo que ocurre en la ecuación homogénea  $y' = \frac{mx + ny}{px + qy}$ .
5. Construcción de las isoclinas de la ecuación  $y' = y - x$  y determinación gráfica de la curva integral que pasa por el punto  $x=0, y=-2$ . Compárese con la solución teórica integrando la ecuación.
6. Aplicar a la ecuación anterior el método de la *curva guía*.
7. Aplicar el método de los arcos de círculo osculador para hallar las curvas cuyo radio de curvatura es inversamente proporcional a la cuerda que une cada punto con un punto fijo de la curva. Compárese con la solución teórica obtenida en la lección 7.<sup>a</sup>, §4.
8. Aplíquese el método del círculo osculador a integrar la ecuación  $y'' + 0,5 y' + \operatorname{sen} y = 0$ . (V. *Hort*. Loc. cit.)
9. Representadas en dos escalas paralelas la  $y$  y la  $x$  de una relación  $y = f(x)$  y unidos los puntos correspondientes, la envolvente de las rectas así obtenidas será una representación gráfica de  $y = f(x)$ . ¿Qué interpretación geométrica tiene en esta representación la derivada  $y'$ ? Dedúzcase de esta interpretación un nuevo procedimiento de integración gráfica de una ecuación de primer orden  $y' = f(x, y)$  dados dos valores iniciales correspondientes  $x_0$  e  $y_0$ .

LECCIÓN 20.—INTEGRACIÓN NÚMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

**1. Cálculo numérico del polígono de Euler.**—Si queremos mejorar la limitada aproximación que nos proporcionan los métodos gráficos de integración de una ecuación diferencial  $y' = f(x, y)$  hemos de sustituirlos por procedimientos numéricos de cálculo que nos den las coordenadas de los puntos de las curvas integrales, es decir, tablas de valores correspondientes de la variable  $y$  de la función buscada.

Así, por ejemplo, la construcción del polígono de Euler que parte de  $x_0, y_0$  tal como ha sido expuesto en el párrafo 4.º de la lección 1.ª puede sustituirse por el cálculo sucesivo de los  $\Delta y$  correspondientes a incrementos  $\Delta x$  fijados, de acuerdo con el siguiente esquema de operaciones sucesivas, en las que suponemos  $\Delta x = h$  constante,  $x_0, y_0$  datos iniciales:

$x$	$y$	$y'$	$\Delta y$
$x_0$	$y_0$	$y'_0 = f(x_0, y_0)$	$\Delta y_0 = y'_0 h$
$x_1 = x_0 + h$	$y_1 = y_0 + \Delta y_0$	$y'_1 = f(x_1, y_1)$	$\Delta y_1 = y'_1 h$
$x_2 = x_1 + h$	$y_2 = y_1 + \Delta y_1$	$y'_2 = f(x_2, y_2)$	$\Delta y_2 = y'_2 h$
.....	.....	.....	.....



Partiendo de estos datos el operador puede ir llenando las filas sucesivas efectuando los cálculos indicados en el orden de izquierda a derecha.

Aun cuando ya dijimos que el polígono definido por la sucesión de vértices  $x_i, y_i$  tiende a una curva solución cuando  $h \rightarrow 0$ , en un cierto dominio, si  $f(x, y)$  es uniforme y continua en él, se comprende que el procedimiento da poca aproximación para intervalos  $h$  que no sean muy pequeños, lo que haría interminables las operaciones.

**2. Métodos de Runge.**—La falta de aproximación se debe a sustituir en cada punto el arco de curva por un trozo de tangente. Corrijamos, pues, la pendiente de ésta en forma a aproximarla mejor a la pendiente de la cuerda.

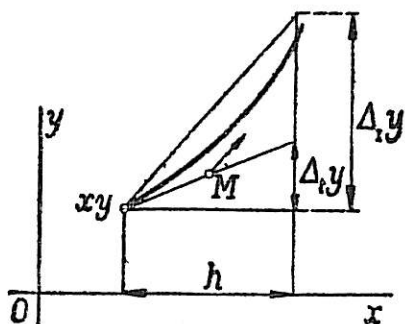
**PRIMERA FÓRMULA DE RUNGE.**—Intuitivamente se comprende que se mejora la aproximación si en lugar de tomar el incremento sobre la tangente

$$\Delta_i y = h y' = h f(x, y)$$

adoptamos el incremento modificado

$$\Delta_r y = h f\left(x + \frac{1}{2} h, y + \frac{1}{2} h f\right) \quad [1]$$

tomando la pendiente del campo en el punto medio  $M$  del trozo de tangente anterior (v. figura).



Comprobemos, en efecto, que el error que se comete con esta expresión de  $\Delta y$  es de tercer orden, mientras la expresión anterior daba un error de segundo orden.

Desarrollemos, por ello, en serie de Taylor la expresión  $\Delta_I y$  designando abreviadamente por  $f, f_x, f_y, f_{x^2}, \dots$  los valores de  $f(x, y)$  y sus derivadas parciales sucesivas en el origen del intervalo,

$$\Delta_I y = hf + \frac{h^2}{2} (f_x + f_y f) + \frac{h^3}{8} (f_{x^2} + 2 f_{xy} f + f_y^2 f^2) + \dots \quad [2]$$

y comparémosla con el desarrollo del incremento verdadero (ténganse en cuenta las expresiones de  $y'', y''', \dots$  obtenidas en la lección 1.<sup>a</sup>, § 3)

$$\Delta y = hf + \frac{h^2}{2} (f_x + f_y f) + \frac{h^3}{3!} (f_{x^2} + 2 f_{xy} f + f_y^2 f^2 + f_y (f_x + f_y f)) + \dots \quad [3]$$

Se observa la coincidencia de ambos incrementos hasta el término en  $h^2$  inclusive. De acuerdo con [1] el cálculo progresivo de los incrementos  $\Delta_I y$  a partir del punto inicial  $x_0 y_0$  se dispondrá ahora así

$x$	$y$	$f(x, y)$	$\Delta_I y = hf$
$x_0$	$y_0$	$f(x_0 y_0)$	$\Delta_I y_0 = hf(x_0 y_0)$
$x_1 = x_0 + h$	$y_1 = y_0 + \Delta_I y_0$	$f(x_1 y_1)$	$\Delta_I y_1 = hf(x_1 y_1)$
$x_2 = x_1 + h$	$y_2 = y_1 + \Delta_I y_1$	$f(x_2 y_2)$	.....
$f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{\Delta_I y}{2}\right)$		$\Delta_I y$	
$f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{\Delta_I y_0}{2}\right)$		$\Delta_I y_0 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{\Delta_I y_0}{2}\right)$	
$f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{\Delta_I y_1}{2}\right)$		$\Delta_I y_1 = hf\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{\Delta_I y_1}{2}\right)$	
.....		.....	

SEGUNDA FÓRMULA DE RUNGE.—Se obtiene otra expresión del incremento, también aproximada hasta el término  $h^2$  corrigiendo dos veces  $\Delta y$  según el siguiente proceso

$$k = \Delta_I y = hf(x, y) \quad k_1 = hf(x + h, y + k) \quad k_2 = hf(x + h, y + k_1)$$

y tomando como incremento el promedio de  $k, k_2$ , es decir, adoptando

$$\Delta_{II} y = \frac{h}{2} f(x, y) + \frac{h}{2} f(x + h, y + k_1) \quad [4]$$



En efecto, desarrollando en serie de Taylor el segundo término queda

$$\Delta_{II}y = \frac{h}{2} f + \frac{h}{2} f + \frac{h}{2} (hf_x + k_1 f_y) + \frac{h}{2 \cdot 2!} (h^2 f_{xx} + 2hk_1 f_{xy} + k_1^2 f_{yy}) + \dots \quad [5]$$

y sustituyendo a su vez  $k_1 = hf(x+h, y+hf)$  por su desarrollo en serie

$$k_1 = hf + h^2 (f_x + f_y f) + \frac{h^3}{2} (f_{xx} + 2f_{xy} f + f_{yy} f^2) + \dots \quad [6]$$

resulta en definitiva

$$\Delta_{II}y = hf + \frac{h^2}{2} (f_x + f_y f) + \frac{h^3}{2} \left( f_x f_y + f_y^2 f + \frac{1}{2} f_{xx} + f_{xy} f + \frac{1}{2} f_{yy} f^2 \right) + \dots \quad [7]$$

que coincide asimismo con [3] hasta el término en  $h^2$  inclusive.

El lector formará fácilmente el cuadro esquemático de cálculos a que conduce la obtención de los  $\Delta_I$  sucesivos según [4].

NOTA.—Si aplicamos la fórmula [1] de  $\Delta_I$  y a una ecuación diferencial de la forma  $y' = f(x)$ , es decir, al cálculo de la primitiva de  $f(x)$  re-

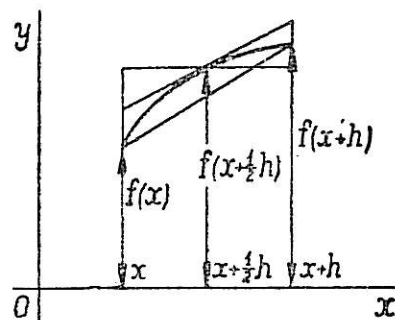
sulta  $\Delta_I y = hf \left( x + \frac{1}{2} h \right)$  que equivale a tomar

como valor del área  $\Delta y = \int_x^{x+h} f(x) dx$  la del rectán-

gulo de altura  $f \left( x + \frac{1}{2} h \right)$ , igual a la del trapecio

limitado, entre  $x$  y  $x+h$ , por la tangente a la

curva  $y = f(x)$  en el punto de abscisa media. Por esto algunos autores alemanes llaman esquema de cálculo de los incrementos  $\Delta_I$  y «Tangentertrapezverfahren».



Aplicando, en cambio, el cálculo [4] de  $\Delta_{II}$  y resulta ser

$$k = hf(x), \quad k_1 = k_2 = hf(x+h), \quad \Delta_{II}y = h \frac{f(x) + f(x+h)}{2}$$

que es el área del trapecio limitado por la cuerda, por lo que este segundo cálculo es llamado por los mismos autores «Sehnentrapezverfahren».

Si la curva fuese una *parábola*, la verdadera área se obtendría sumando al trapecio limitado por la cuerda el área del segmento parabólico, que es los  $\frac{2}{3}$  de la diferencia entre este trapecio y el de la tangente en el punto medio (paralela a la cuerda). Es decir, sería

$$\Delta y = \Delta_{II} + \frac{2}{3} (\Delta_I - \Delta_{II}) = \frac{2}{3} \Delta_I + \frac{1}{3} \Delta_{II}$$

Esto sugiere la siguiente nueva aproximación.



**3. Aproximación de tercer orden de Runge.**—Formemos análogamente el nuevo incremento

$$\Delta_{III}y = \frac{2}{3} \Delta_I y + \frac{1}{3} \Delta_{II} y \quad [8]$$

y resulta, combinando [2] y [7]

$$\Delta_{III}y = hf + \frac{h^2}{2} (f_x + f_y f) + \frac{h^3}{6} (f_{xx} + 2f_{xy} f + f_{yy} f^2 + f_x f_y + f_y^2 f) + \dots$$

que coincide con el desarrollo [3] de  $\Delta y$  hasta el término en  $h^3$  inclusive. El cálculo de los incrementos por la fórmula de  $\Delta_{III}$  es, naturalmente, mucho más detenido que los anteriores a cambio de una notable mejora en la aproximación. Por la forma geométrica en que nos ha sido sugerida esta aproximación se comprende que desempeñe papel análogo al de la fórmula de Simpson en la integración ordinaria. A esta fórmula conduce, en efecto, para ecuaciones de la forma  $y' = f(x)$ .

**4. Fórmula de Kutta.**—Todavía se puede afinar más la aproximación aumentando las correcciones y, por consiguiente, la longitud de los cálculos. He aquí, por ejemplo, el proceso de cálculo de Kutta que aproxima hasta el término en  $h^4$  inclusive, es decir, da un error de quinto orden.

Obténganse sucesivamente los siguientes incrementos corregidos

$$k = hf(x, y) \quad (\text{Euler})$$

$$k_1 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k}{2}\right) \quad (= \Delta_I \text{ de Runge})$$

$$k_2 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf(x + h, y + k_2)$$

y tómese como nuevo valor aproximado de  $\Delta y$

$$\Delta_k y = \frac{1}{6} k + \frac{1}{3} k_1 + \frac{1}{3} k_2 + \frac{1}{6} k_3 \quad [9]$$

La demostración de que, en efecto, el desarrollo en serie de este incremento coincide con el desarrollo en serie de  $\Delta y$  hasta el término en  $h^4$  no ofrece dificultades substanciales; pero como el cálculo es prolijo y no encierra ya novedad metodológica alguna, remitimos al lector que quiera comprobarlo a las obras especiales de cálculo numérico (\*).

**5. Aplicación a las ecuaciones de orden superior y a los sistemas.**—Según vimos en la lección 6.<sup>a</sup>, una ecuación diferencial de orden  $n$  se puede reducir a un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden

(\*) V. por ejemplo, *Runge König*, «Numerisches Rechnen».

con  $n$  funciones, bastando, para ello, considerar como nuevas funciones incógnitas las  $n-1$  primeras derivadas de la función primera. Así, por ejemplo, la ecuación de segundo orden en  $y$

$$y'' = \varphi(x, y, y') \tag{1}$$

se reduce, poniendo  $y' = z$ , al sistema de dos ecuaciones de primer orden con dos funciones

$$y' = z \quad z' = \varphi(x, y, z) \tag{2}$$

Los métodos numéricos expuestos en los párrafos anteriores se generalizan sin dificultad (omitimos las demostraciones) a los sistemas  $y$ , por tanto, mediante ellos podremos integrar ecuaciones de orden superior.

Así, por ejemplo, el primer método de Runge aplicado al sistema

$$y' = f(x, y, z) \quad z' = \varphi(x, y, z) \tag{3}$$

a partir de las condiciones iniciales  $x_0, y_0, z_0$  conduce al siguiente proceso de cálculo:

$x$	$y$	$z$	$k = hf$	$l = h\varphi$
$x_0$	$y_0$	$z_0$	$k_0 = hf(x_0, y_0, z_0)$	$l_0 = h\varphi(x_0, y_0, z_0)$
$x_1 = x_0 + h$	$y_1 = y_0 + \Delta_I y_0$	$z_1 = z_0 + \Delta_I z_0$	$k_1 = hf(x_1, y_1, z_1)$	$l_1 = h\varphi(x_1, y_1, z_1)$
.....	.....	.....	.....	.....

$$\Delta_I y = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k}{2}, z + \frac{l}{2}\right)$$

$$\Delta_I z = h\varphi\left(x + \frac{h}{2}, \dots\right)$$

$$\Delta_I y_0 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, \dots\right)$$

$$\Delta_I z_0 = h\varphi\left(x_0 + \frac{h}{2}, \dots\right)$$

$$\Delta_I y_1 = hf\left(x_1 + \frac{h}{2}, \dots\right)$$

$$\Delta_I z_1 = h\varphi\left(x_1 + \frac{h}{2}, \dots\right)$$

En particular, para el sistema [2] equivalente a la ecuación de segundo orden [1] se simplificará el cálculo del cuadro al ser  $f(x, y, z) \equiv z$ .

Con la aplicación de este cuadro la columna  $z$  dará los valores de la derivada  $y'$  simultáneamente a los de la función  $y$  buscada, lo que permitirá trazar la gráfica integral con buena aproximación (puntos y tangentes).

Si la ecuación de segundo orden dada es del tipo lineal, es decir

$$y'' = A(x)y' + B(x)y + C(x) \tag{4}$$

(caso el más frecuente en las aplicaciones) el sistema equivalente será de la forma

$$y' = z \quad z' = A(x)z + B(x)y + C(x)$$

y una vez tabulados los coeficientes  $A(x)$ ,  $B(x)$ ,  $C(x)$  para la sucesión de valores de  $x$  elegida  $x_0, x_1=x_0+h, x_2=x_0+2h \dots$ , el esquema de cálculo sólo comportará productos y sumas o restas, pudiendo efectuarse con relativa comodidad con las sumadoras y multiplicadoras automáticas. Las modernas calculadoras electrónicas permiten efectuar procesos de cálculo de esta índole con velocidades increíbles, de modo que prácticamente la ciencia actual ya no queda detenida ante una ecuación diferencial no resoluble por los procedimientos elementales.

A título de ejemplo reproducimos a continuación las primeras filas del cálculo numérico según el primer método de Runge aplicado a la ecuación de La Cierva (véase lección 12, § 5) para  $m=0,5$  y  $\lambda=1$

$$my'' + \left(\frac{3}{4} + \lambda \operatorname{sen} x\right) y' + \left(m + \lambda \cos x + \frac{3}{4} \lambda^2 \operatorname{sen} 2x\right) y = 0 \quad [6]$$

cuyo estudio había de ilustrar al inventor del autogiro acerca de la estabilidad del movimiento de las palas del mismo. Como se dijo en la lección 12, hay que calcular para ello los valores al final del período de las soluciones particulares definidas: 1.º por las condiciones iniciales  $y(0)=0$   $y'(0)=1$ ; 2.º por  $y(0)=1$   $y'(0)=0$ .

En el sistema equivalente [5] es ahora

$$A(x) = -(1,5 + 2 \operatorname{sen} x) \quad B(x) = -(1 + 2 \cos x + 1,5 \operatorname{sen} 2x) \quad [7]$$

Calculados aparte los valores de  $A(x)$  y  $B(x)$  de  $15^\circ$  en  $15^\circ$  el esquema de cálculo (aplicado a las condiciones iniciales  $x_0=0, y_0=0, y'_0=1$ ) fué el que sigue (indicamos sólo los valores numéricos de las primeras filas, suprimiendo asimismo, para abreviar, algunas columnas de cálculo intermedias)

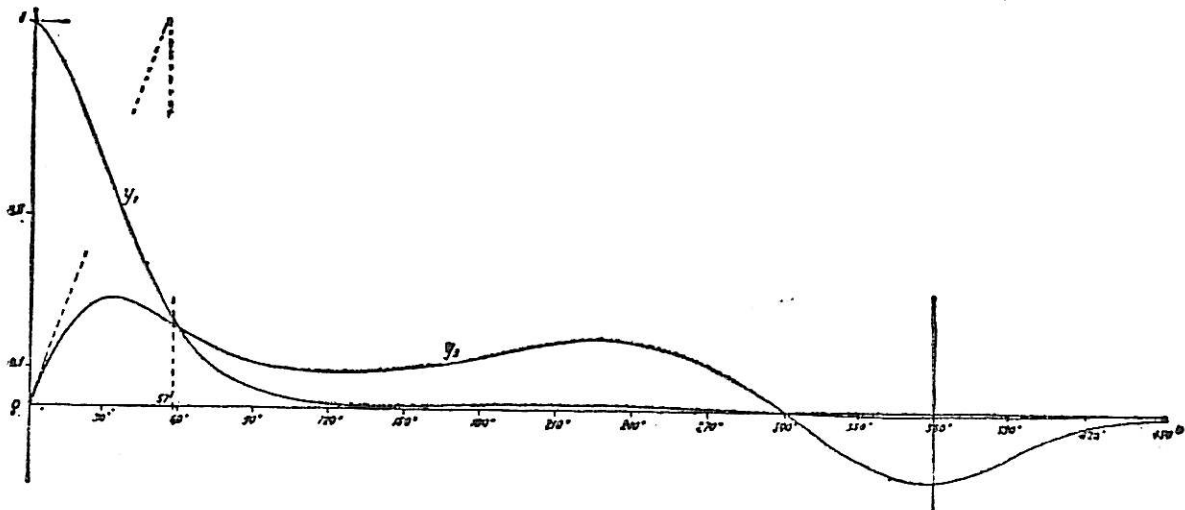
$x$	$y$	$z$	$\varphi = Az + By$	$k = hz$	$l = h\varphi$
0	0	1	-1,5	0,26180	-0,39270
15°	0,21039	0,51396	-1,81162	0,13456	-0,47428
30°	0,28286	0,06567	-1,30441	0,01720	-0,35188
45°	0,25399	-0,16381	-0,51679	-0,04288	-0,13530
....	.....	.....	.....	.....	.....

$\varphi_{\frac{1}{2}} = \left(z + \frac{l}{2}\right) A\left(x + \frac{1}{2}h\right) + \left(y + \frac{k}{2}\right) B\left(x + \frac{1}{2}h\right)$	$\Delta_I y = h \left(z + \frac{l}{2}\right)$	$\Delta_I z = h\varphi_{\frac{1}{2}}$
-1,85656	0,21039	-0,48604
-1,71235	0,07247	-0,44829
-0,87656	-0,02887	-0,22948
-0,13818	-0,06060	-0,03618
.....	.....	.....

Los valores de  $x, y$  de esta tabla y los de la solución similar partiendo de las con-

diciones iniciales  $x_0=z$ ,  $y_0=1$ ,  $y'_0=0$  se representan en las curvas indicadas en la figura, con las que se pudo poner de manifiesto la deseada estabilidad (\*).



**6. Integración por aproximaciones sucesivas.**—Finalmente, el método de aproximaciones sucesivas de Picard expuesto en las lecciones 1.<sup>a</sup> (§ 6), 6.<sup>a</sup> (§ 3) y 17 (§ 2) para demostrar la existencia de la solución suministra asimismo un proceso de obtención aproximada de la curva integral, algo más laborioso que el de Runge antes expuesto, pero en el que es más fácil acotar el error. Concretándonos al caso de una ecuación de primer orden  $y' = f(x, y)$  recordemos que la obtención recurrente de las aproximaciones sucesivas  $y_1, y_2, \dots, y_n$  a la solución que pasa por  $x_0, y_0$  viene dada por:

$$y_{n+1} = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_n) dx$$

El paso de una aproximación a la siguiente supone la adición de un término cuyo módulo  $|y_{n+1} - y_n|$  es menor que  $ML^n \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$  ( $M$  valor má-

ximo de  $f$  en el recinto de integración,  $L$  cota de Lipschitz (v. lec. 1.<sup>a</sup> § 6)) y, por tanto, la diferencia entre  $y_n$  y su límite es menor que el resto de una serie exponencial bien sencillo de acotar. Se puede con ello reducir *a priori* el intervalo de integración  $|x - x_0|$  para lograr que el error sea menor que un límite prefijado. Pero en la práctica no suele ser necesaria esta precaución. Partiendo de una solución que se sepa aproximada (por la intuición física del problema o por comparación con casos similares) la divergencia de los valores de cada aproximación con la anterior ( $y_{n+1} - y_n$ ) y sucesiva ya nos irá diciendo claramente si estamos cerca o lejos de la solución exacta.

(\*) El lector curioso a quien interesara el tema puede consultar nuestro artículo «Sobre la estabilidad del movimiento de las palas del autogiro». Revista de Aeronáutica, año 1934, en el que se resumen además los trabajos de los alumnos de la cátedra de Cálculo de la Escuela Superior Aerotécnica aplicando distintos métodos de integración aproximada a la referida ecuación.

Las cuadraturas se efectuarán de acuerdo con los métodos aproximados explicados en el tomo I, lecc. 12.

**7. Aplicación a los problemas de contorno.**—Los métodos expuestos se refieren todos a la construcción de la solución que cumple ciertas condiciones iniciales dadas. ¿Qué aplicación tienen estos métodos cuando la integral particular buscada queda definida por condiciones de contorno? Supongamos concretamente que se trata de hallar la integral de una ecuación lineal de segundo orden

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = \varphi(x) \quad \text{que verifique} \quad y(a) = k \quad y(b) = l$$

Construiremos o tabularemos, por los métodos anteriores, entre  $a$  y  $b$  dos soluciones particulares respectivamente definidas por las condiciones iniciales  $y_1(a) = 1$ ,  $y_1'(a) = 0$ ,  $y_2(a) = 0$ ,  $y_2'(a) = 1$  (cuyo wronskiano es 1). La solución buscada deberá ser una combinación lineal de estas dos integrales particulares independientes, es decir, de la forma

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

Expresando ahora el cumplimiento de las condiciones de contorno tendremos el sistema

$$\left. \begin{array}{l} C_1 y_1(a) + C_2 y_2(a) = k \\ C_1 y_1(b) + C_2 y_2(b) = l \end{array} \right\} \text{ que da } \left\{ \begin{array}{l} C_1 = k \\ C_2 = \frac{l - k y_1(b)}{y_2(b)} \end{array} \right.$$

puesto que  $y_1(a) = 1$ ,  $y_2(a) = 0$ .

Obtenidas así  $C_1$ ,  $C_2$  podemos tabular o construir la solución buscada combinando las funciones tabuladas o construídas  $y_1$ ,  $y_2$ .

El cálculo falla si  $y_2(b) = 0$ . Para que exista entonces solución es necesario que sea también  $l - k y_1(b) = 0$  o sea  $y_1(b) = l/k$ . Ahora bien, con los métodos aproximados, es imposible en general asegurar el cumplimiento *exacto* de estas condiciones que conducirían a una solución indeterminada.

Finalmente si la ecuación no es lineal, no cabe el recurso de formular la integral general mediante combinación lineal de integrales particulares definidas por condiciones iniciales y para hallar la integral que cumpla determinadas condiciones de contorno, habrá que proceder en general por tanteos.

NOTA.—Con objeto de que el lector tenga una idea del grado de aproximación logrado con las fórmulas expuestas en esta lección, transcribimos algunos datos tomados de la obra de *Runge-König* «Numerisches Rechnen» y de la de *Hort* «Die Differentialgleichungen des Ingenieurs».

El método de Kutta, aplicado a la ecuación  $y' = 0,1 y^2 - xy$  con los valores iniciales  $x = 0$ ,  $y = 1$ , tomando intervalos  $h = 0,4$  y  $h = 0,2$ , da los resultados siguientes, que se comparan con los valores obtenidos mediante la expresión exacta de la integral particular indicada (en función de la integral de las probabilidades)

	$x = 0,4$	$x = 0,8$	$x = 1,2$
Fórmula de Kutta con $h=0,4$	0,960016	0,782273	0,536914
Fórmula de Kutta con $h=0,2$	0,960472	0,782562	0,538336
Valores procedentes de la integración exacta	0,960538	0,782681	0,538736

La aproximación de tercer orden de Runge aplicada a la ecuación  $y'=2y/x$  con las condiciones iniciales  $x=1, y=0,2$  da, tomando  $h=0,2$  y efectuando las operaciones con regla de cálculo,

	$x = 1,4$	$x = 1,8$	$x = 2,2$
Valor aproximado	0,392	0,647	0,966
Valores procedentes de la integración exacta $y=0,2x^2$	0,392	0,644	0,964

**EJERCICIOS**

1. Excelente ejercicio para el lector será reproducir los cálculos de estos ejemplos citados hallando los valores intermedios a los transcritos.

2. Compare en particular los resultados indicados en esta última ecuación  $y'=2y/x$  con los que obtenga aplicando las fórmulas de aproximación de 2.º orden para  $h=0,2$  y para  $h=0,1$  (doble número de intervalos). Efectúe las divisiones con máquina si dispone de ella, y si no con regla de cálculo.

3. Aplicar el método de Runge a la ecuación de segundo orden  $y'' + y/x + y = 0$  con las condiciones iniciales  $y=1, y'=0$  para  $x=0$  y compárense los valores obtenidos para  $y$  e  $y'$  con  $J_0(x)$  y  $J_0'(x) = -J_1(x)$  (v. las tablas de la lección 16). Tómese  $h=0,2$  e intégrese entre 0 y 2. (\*)

4. Un mecanismo de freno de una cierta máquina detiene una masa de 4,6 Kg de peso que se mueve inicialmente a la velocidad de 12 m/segundo. La fuerza amortiguadora (incluido el rozamiento) es una función de la velocidad que se conoce empíricamente por la siguiente tabla.

Velocidad m/s	12	10	8	6	4	2	0
Fuerza Kg	9,4	7,3	5,6	4,2	3,1	2,3	2,1

Sabiendo que la masa se halla empujada por una fuerza variable según la ley  $f(t)=4(1-t)$  Kg ( $t$  segundos), hallar la ley del movimiento.

Para los valores intermedios de la velocidad se calculará la fuerza amortiguadora aplicando fórmulas de interpolación o representando la tabla mediante una gráfica.

5. La resistencia amortigua las oscilaciones si crece con la velocidad, pero puede crear en algunos momentos auto excitaciones del movimiento si disminuye con la velocidad. Transcribimos (\*) los siguientes datos que dan empíricamente la fuerza de rozamiento en función de la velocidad relativa de dos superficies en contacto.

Velocidad (pies/seg)	16	12	8	6	4	2	0	- 2
Rozamiento (libras)	30,4	32,6	37,9	41,9	47,8	56,9	75	-56,9

Averiguar el movimiento de un cuerpo de 5 libras de peso sometido a una fuerza de atracción elástica de 1 000 libras por pie de deformación, con deformación inicial nula y velocidad inicial 6 pies/segundo, sabiendo que al deslizarse la fuerza de rozamiento obedece a la ley anterior. (No se olvide de expresar en pies/seg<sup>2</sup> la aceleración de la gravedad.)



## Capítulo VIII. — ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE PRIMER ORDEN

### LECCIÓN 21.—ECUACIONES DE PRIMER ORDEN LINEALES

**1. Generación de superficies. Ecuación funcional.**—Al integrar un sistema de *dos* ecuaciones diferenciales de primer orden, definíamos una congruencia de curvas como un conjunto de curvas del espacio dependientes de dos parámetros  $C_1, C_2$ , es decir, definidas por dos ecuaciones

$$\begin{aligned} F(x, y, z, C_1, C_2) &= 0 \\ \Phi(x, y, z, C_1, C_2) &= 0 \end{aligned} \quad [1]$$

de tal suerte que por cada punto del espacio (o dominio espacial de existencia) pase una curva y sólo una de la congruencia: lo que en definitiva equivale a afirmar que los parámetros  $C_1, C_2$  definidores de cada curva son funciones *uniformes* de  $x, y, z$

$$C_1 = f(x, y, z) \quad C_2 = \varphi(x, y, z) \quad [2]$$

EJEMPLOS: Constituyen congruencia de curvas:

1.º Las rectas por el origen

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = z \quad \text{en las que} \quad \begin{cases} (C_1 =) & a = \frac{x}{z} \\ (C_2 =) & b = \frac{y}{z} \end{cases}$$

2.º Las rectas paralelas al plano  $x, y$  y secantes al eje  $z$

$$\begin{cases} y = ax \\ z = b \end{cases} \quad \begin{cases} (C_1 =) & a = \frac{y}{x} \\ (C_2 =) & b = z \end{cases}$$

3.º Las circunferencias paralelas al plano  $x, y$  con centro en el eje  $z$ .

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a & (= C_1) \\ z = b & (= C_2) \end{cases}$$

Si entre los dos parámetros  $C_1$  y  $C_2$  se establece una relación de dependencia biunívoca definida por

$$C_2 = \psi(C_1) \quad \text{o bien} \quad \Psi(C_1, C_2) = 0 \quad [3]$$

el conjunto de curvas es simplemente infinito y su lugar geométrico, que se obtiene eliminando  $C_1, C_2$  entre [2] y [3]

$$\varphi(x, y, z) = \psi[f(x, y, z)] \quad \text{o bien} \quad \Psi[f(x, y, z), \varphi(x, y, z)] = 0 \quad [4]$$

será una superficie engendrada por curvas de la congruencia. Tales curvas se llaman *generatrices* o también *características*. Recíprocamente toda superficie formada por *generatrices* [2] tendrá una ecuación de la forma [4].

Así, toda superficie formada por rectas que pasan por el origen (ejemplo 1.º), es decir, toda *superficie cónica de vértice en el origen* tendrá una ecuación de la forma

$$\Psi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0 \quad [5]$$

Toda superficie formada por paralelas al plano  $x, y$  y secantes al eje  $z$  (*conoide de plano director  $x, y$* ) tendrá una ecuación de la forma (v. ejemplo 2.º).

$$\Psi\left(\frac{y}{x}, z\right) = 0 \quad [6]$$

Toda superficie formada por circunferencias del ejemplo 3.º, es decir, toda superficie de revolución alrededor del eje  $z$  tendrá una ecuación de la forma

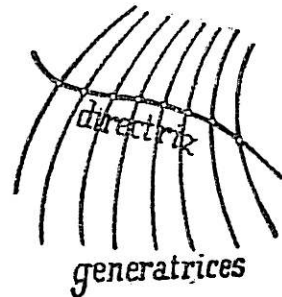
$$\Psi(x^2 + y^2, z) = 0 \quad [7]$$

Toda ecuación de la forma [4] en la que  $\Psi$  es una función *arbitraria* que supondremos derivable, se llamará *ecuación funcional* de la familia de superficies formadas por generatrices de la congruencia [2].

Para particularizar la función arbitraria y definir por tanto *una* superficie de familia hay que dar una ley concreta que ligue  $C_1, C_2$ . La manera *geométrica* más sencilla de conseguirlo es dar *una directriz*

$$\begin{cases} y = \eta(x) \\ z = \zeta(x) \end{cases} \quad [8]$$

es decir, una curva (no generatriz) sobre la que deban apoyarse las generatrices. Obtendremos la condición de intersección entre directriz y generatrices eliminando  $x, y, z$  entre las respectivas ecuaciones [8] y [2], con lo que obtendremos la relación particular buscada  $\Psi(C_1, C_2) = 0$ . Sustituyendo finalmente en ésta  $C_1, C_2$  por las funciones  $f, \varphi$  [2] resultará la ecuación de la superficie.



Así, por ejemplo, para hallar la ecuación de la superficie de revolución de eje  $z$  que tenga por directriz la recta  $x=z, y=1$  eliminaremos  $x$  y  $z$  entre estas ecuaciones y las  $x^2 + y^2 = a, z = b$  de las generatrices (paralelos) obteniendo  $b^2 + 1 = a$  y por tanto la ecuación de la superficie buscada será  $z^2 + 1 = x^2 + y^2$ , es decir

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \quad (\text{hiperboloide de revolución})$$

**2. Ecuación diferencial de una familia de superficies.**—Si derivamos la ecuación funcional [4] con respecto a dos variables  $x, y$  elegidas como independientes en la ecuación de la superficie, obtenemos, designando en adelante  $\frac{\partial z}{\partial x}$  por  $p$  y  $\frac{\partial z}{\partial y}$  por  $q$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial f} (f_x + f_z p) + \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} (\varphi_x + \varphi_z p) = 0$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial f} (f_y + f_z q) + \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} (\varphi_y + \varphi_z q) = 0$$

de la que por eliminación de  $\frac{\partial \Psi}{\partial f}$  y  $\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}$  se desprende

$$\begin{vmatrix} f_x + f_z p & \varphi_x + \varphi_z p \\ f_y + f_z q & \varphi_y + \varphi_z q \end{vmatrix} = 0 \quad [9]$$

ecuación que desarrollada puede escribirse

$$\frac{D(f, \varphi)}{D(y, z)} p + \frac{D(f, \varphi)}{D(z, x)} q = \frac{D(f, \varphi)}{D(x, y)} \quad [10]$$

En resumen, partiendo de la ecuación funcional y por eliminación de la función arbitraria  $\Psi$ , hemos llegado a obtener una ecuación en derivadas parciales *lineal y de primer orden* en estas derivadas de la forma

$$X(x, y, z) p + Y(x, y, z) q = Z(x, y, z) \quad [11]$$

en la que los coeficientes

$$X = \frac{D(f, \varphi)}{D(y, z)} \quad Y = \frac{D(f, \varphi)}{D(z, x)} \quad Z = \frac{D(f, \varphi)}{D(x, y)}$$

son funciones conocidas de  $x, y, z$ .

Esta ecuación, a la que satisfacen todas las superficies formadas por curvas de la congruencia, se llama *ecuación diferencial* de la familia de superficies en cuestión, mientras la ecuación funcional finita [4] con la función arbitraria  $\Psi$  se llama *integral general* de la ecuación diferencial [9] o [10].

Por ser  $p, q$  los coeficientes de la ecuación del plano tangente  $\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$  ( $\xi, \eta, \zeta$  coordenadas generales del plano,  $x, y, z$  coordenadas particulares del punto de la superficie) *la ecuación en derivadas parciales obtenida expresa una propiedad del plano tangente común a todas las superficies de la familia.*

Así, por ejemplo.

1.º La ecuación diferencial de las superficies cónicas de vértice en el origen será (v. ecuación funcional [5] en la que  $f \equiv \frac{x}{z}$   $\varphi \equiv \frac{y}{z}$ )

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{z} - \frac{x}{z^2} p & -\frac{y}{z^2} p \\ -\frac{x}{z^2} q & \frac{1}{z} - \frac{y}{z^2} q \end{vmatrix} = 0 \quad \text{desarrollando y simplificando} \quad xp + yq = z$$

y expresa, como es fácil comprobar, la propiedad del plano tangente de pasar por el origen.

Recíprocamente, esta ecuación tiene por integral  $\Psi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$ , siendo  $\Psi$  arbitraria.

ecuación diferencial de los conoides [6] será  $\left(f \equiv \frac{y}{x} \quad \varphi \equiv z\right)$

$$\begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & p \\ \frac{1}{x} & q \end{vmatrix} = 0 \quad \text{o sea} \quad xp + yq = 0$$

y expresa la propiedad del plano tangente en todo punto  $x, y, z$  de cortar al eje  $z$  en el punto de igual ordenada  $z$ .

Integral general  $\Psi\left(\frac{y}{x}, z\right) = 0$

3.º La ecuación diferencial de las superficies de revolución [7] será

$$\begin{vmatrix} 2x & p \\ 2y & q \end{vmatrix} = 0 \quad \text{es decir} \quad xq - yp = 0$$

y expresa la propiedad del plano tangente de ser perpendicular al plano meridiano. Integral general  $\Psi(x^2 + y^2, z) = 0$ .

**3. Integración de las ecuaciones en derivadas parciales lineales de primer orden.**—Acabamos de ver cómo por eliminación de funciones arbitrarias en ecuaciones finitas de la forma [4] se obtienen ecuaciones en derivadas parciales lineales y de primer orden.

Veamos ahora, inversamente, cómo podemos obtener una relación finita de la forma [4] dada una determinada ecuación en derivadas parciales de primer orden lineal

$$X(x, y, z)p + Y(x, y, z)q = Z(x, y, z) \quad [1]$$

es decir, cómo podemos obtener una familia de superficies que cumpla esta ecuación. Sigamos el camino que se desprende de la generación de tales superficies, es decir, empecemos por buscar la congruencia de generatrices características. Observemos para ello que toda congruencia de curvas obedece a un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma canónica hallada en la lección 17 § 1, en el que los denominadores de  $dx, dy, dz$  coinciden precisamente con los coeficientes de  $p, q$  y el término independiente de la ecuación en derivadas parciales [10] de la familia de superficies formadas por tales curvas.

De aquí resulta que la congruencia de curvas características buscada, si existe, vendrá definida por el sistema de primer orden

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} \quad [2]$$

Integremos, pues, este sistema y comprobemos que, efectivamente:

1.º *Toda superficie formada por curvas de la congruencia definidas por [2] satisface a la ecuación [1].* En efecto, a lo largo de tales características se verifican [2] y además  $dz = p dx + q dy$ ; y como consecuencia se verificará [1].

2.º Recíprocamente: Toda superficie integral de [1] está formada por curvas características. En efecto, si  $z=z(x, y)$  es una superficie integral de [1], consideremos en ella las curvas que verifican la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$$

en cuyos denominadores se supondrá sustituida  $z$  por  $z(x, y)$ . Este sistema define un haz de curvas del plano  $x, y$  proyección de curvas de la superficie a lo largo de las cuales se verificará

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{p dx + q dy}{p X + q Y} = \frac{dz}{Z}$$

es decir, estas curvas pertenecerán a la congruencia. Por tanto: El directo y el recíproco demostrados establecen la solución del problema, que puede resumirse en esta regla:

REGLA: Para integrar una ecuación en derivadas parciales lineal y de primer orden

$$X(x, y, z)p + Y(x, y, z)q = Z(x, y, z) \quad [3]$$

se integra el sistema de primer orden

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} \quad [4]$$

del que se obtendrá la congruencia

$$C_1 = f(x, y, z)$$

$$C_2 = \varphi(x, y, z)$$

La integral general [4] tiene la forma

$$\Psi(f(x, y, z), \varphi(x, y, z)) = 0 \quad \Psi \text{ arbitraria.}$$

La particularización de la función arbitraria  $\Psi$  se consigue dando condiciones analíticas o geométricas, entre las cuales la más sencilla es dar una *directriz* o curva *no característica* como hemos expuesto en el párrafo 1.

EJEMPLO: Hallar las superficies cuyo plano tangente en cada punto corte al eje  $z$  en un punto de ordenada igual y de signo contrario a la ordenada del punto de contacto.

Introduciendo esta condición en la ecuación del plano tangente

$$\xi - z = p(\xi - x) + q(\eta - y) \quad \text{resulta} \quad -2z = -px - qy. \quad \text{o sea} \\ xp + yq = 2z$$

La congruencia de características vendrá dada por

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{2z}$$

de donde, combinando la última razón con la primera y segunda

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= C_1 z \\ y^2 &= C_2 z \end{aligned} \right\} \begin{aligned} C_1 &= \frac{x^2}{z} \\ C_2 &= \frac{y^2}{z} \end{aligned} \quad (1)$$

La integral buscada es, pues,

$$\Psi \left( \frac{x^2}{z}, \frac{y^2}{z} \right) = 0 \quad (2)$$

Si queremos hallar la superficie particular que contiene la hipérbola

$$x^2 - y^2 = 1 \quad z = 1 \quad (3)$$

eliminaremos  $x, y, z$  entre estas ecuaciones (directriz) y [1] (generatriz) obteniéndose  $C_1 - C_2 = 1$  y por tanto la superficie pedida es

$$\frac{x^2}{z} - \frac{y^2}{z} = 1 \quad \text{o bien} \quad x^2 - y^2 = z \quad (\text{paraboloide hiperbólico})$$

**4. Caso particular: ecuaciones homogéneas.**—Si  $Z \equiv 0$  la ecuación

$$Xp + Yq = 0 \quad (1)$$

se llama *homogénea* y se reduce a la integración del sistema

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} \quad dz = 0 \quad (2)$$

que implica  $z = C_1$ , es decir: *Las características se hallan en planos paralelos al  $xy$ .*

Su proyección sobre  $xy$  vendrá dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y, C_1)}{X(x, y, C_1)} \quad (3)$$

de donde resultará la relación finita

$$f(x, y, C_1, C_2) = 0 \quad C_2 = \varphi(x, y, C_1) = \varphi(x, y, z)$$

y las superficies integrales serán de la forma

$$\Psi [z, \varphi(x, y, z)] = 0$$

Si además  $X$  e  $Y$  no dependen de  $z$  será la integral de [3] de la forma

$$f(x, y, C_2) = 0 \quad C_2 = \varphi(x, y)$$

y la integral general será de la forma

$$z = \psi [\varphi(x, y)] \quad \psi \text{ arbitraria.}$$

**NOTA.**—No se crea que  $\psi[\varphi(x, y)]$  es una función arbitraria de  $x, y$ . Así una función arbitraria del producto  $xy$  no es una función arbitraria de las variables  $x, y$ , puesto que no incluye, por ejemplo,  $x+y, x-y, x/y$ , etc.







ecuación *homogénea* que se integrará mediante el sistema con una variable  $y$  y una ecuación más

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \dots = \frac{dt}{T} = \frac{du}{U}$$

formando el sistema integral en la forma

$$c_1 = \alpha_1(x, y, \dots, t, u)$$

$$c_2 = \alpha_2(\dots)$$

$$\dots$$

$$c_n = \alpha_n(\dots)$$

y poniendo  $\Psi$  en la forma de función arbitraria de  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ .

Por tanto, la solución general de [10] se obtiene implícitamente mediante ecuaciones de la forma

$$\Psi[\alpha_1(x, y, \dots, t, u), \alpha_2(\dots), \alpha_n(\dots)] = 0.$$

lo que constituye la generalización de lo visto en el § 3 para el caso de dos variables independientes.

EJEMPLO: ¿Cuáles son las funciones  $u(x, y, z, \dots, t)$  que verifican el teorema de Euler? La ecuación es de la forma ( $n$  constante)

$$\frac{\partial u}{\partial x} x + \frac{\partial u}{\partial y} y + \dots + \frac{\partial u}{\partial t} t = nu$$

La integración del sistema

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \dots = \frac{dt}{t} = \frac{du}{nu}$$

combinando la primera razón con cada una de las demás da

$$\alpha_1 = \frac{y}{x} \quad \alpha_2 = \frac{z}{x} \quad \dots \quad \alpha_{n-1} = \frac{t}{x} \quad \alpha_n = \frac{u}{x^n}$$

y por tanto la integral general podrá ponerse en la forma ( $\varphi$  arbitraria)

$$\frac{u}{x^n} = \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \dots, \frac{t}{x}\right) \quad u = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \dots, \frac{t}{x}\right)$$

es decir, una función cualquiera (derivable) homogénea de grado  $n$ .

**6. Aplicación geométrica. Superficies ortogonales.**— Sea dado un haz de superficies

$$F(x, y, z, C) = 0 \quad \text{o bien} \quad C = f(x, y, z) \quad [1]$$

es decir, tales que por cada punto del espacio o de una región del mismo pase una superficie y sólo una del haz.

Busquemos todas las superficies *ortogonales* a ellas, es decir que tienen la propiedad de ser en cada uno de sus puntos ortogonales a la superficie del haz [1] que pasa por él.

La normal a la superficie [1] tiene en todo punto  $x, y, z$  cosenos directores proporcionales a  $f_x, f_y, f_z$ .

La normal a la superficie  $z=z(x, y)$  que buscamos tiene cosenos directores proporcionales a  $p, q, -1$ . La ortogonalidad de ambas normales, que a ello equivale la de los planos tangentes, conduce a la ecuación.

$$f_x p + f_y q = f_z$$

en la que  $f_x, f_y, f_z$  son funciones conocidas de  $x, y, z$  mientras  $p, q$  son las derivadas parciales de la función  $z(x, y)$  buscada. La solución del problema nos conduce, pues, a la integración de una ecuación en derivadas parciales de primer orden no homogénea.

La solución del sistema

$$\frac{dx}{f_x} = \frac{dy}{f_y} = \frac{dz}{f_z}$$

da precisamente la congruencia de *líneas ortogonales* a las superficies del haz, y la interpretación en este caso de lo dicho en el § 3 adquiere un claro sentido intuitivo: Las superficies ortogonales serán todas las formadas por unión de curvas ortogonales.

EJEMPLO: El haz de paraboloides

$$x^2 + y^2 = Cz \quad C = \frac{x^2 + y^2}{z}$$

admitirá la congruencia de curvas ortogonales definidas por el sistema

$$\frac{z dx}{2x} = \frac{z dy}{2y} = -\frac{z^2 dz}{x^2 + y^2}$$

o sea

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} = -\frac{2z dz}{x^2 + y^2}$$

que podemos desdoblar en

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \quad \text{de donde} \quad x = a_1 y \quad a_1 = \frac{x}{y}$$

$$x dx + y dy = -2z dz \quad \text{de donde} \quad \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = -z^2 + a_2 \quad a_2 = z^2 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

Las superficies ortogonales serán, pues, todas las de la forma

$$F\left[\frac{x}{y}, z^2 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right] = 0$$

V. Ejercicios al final de la lección siguiente

LECCIÓN 22.—ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE PRIMER ORDEN  
NO LINEALES

1. **Integrabilidad de**  $X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz = 0$  —  
Acabamos de ver cómo se obtiene la congruencia de curvas ortogonales a  
un haz de superficies dado. Recíprocamente: Dada una congruencia de curvas  
definidas por un sistema de la forma canónica

$$\frac{dx}{X(x, y, z)} = \frac{dy}{Y(x, y, z)} = \frac{dz}{Z(x, y, z)}$$

¿existe un haz de superficies ortogonales?

De otro modo: ¿Existen superficies sobre las cuales se verifique la  
condición

$$X dx + Y dy + Z dz = 0 \quad [1]$$

de ortogonalidad entre un elemento de curva  $dx, dy, dz$  tomado *sobre dicha  
superficie* en un punto cualquiera  $x, y, z$  y el vector  $\vec{V}$  de componentes  
 $X, Y, Z$ , que parte de él?

Si tales superficies existen, la circulación del vector  $V$  a lo largo de una  
curva cualquiera cerrada  $\gamma$  de la superficie debe ser nula y, por tanto (teo-  
rema de Stokes)

$$\int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{s} = \iint_{\sigma} \text{rot } \vec{V} \cdot d\vec{\sigma} = 0$$

en la que  $d\vec{\sigma}$  representa el vector de módulo unidad, normal a la superficie,  
y la integral doble se halla extendida sobre cualquier casquete de superficie  
que tenga por borde  $\gamma$ . Ello exige que sea en todo punto

$$\text{rot } \vec{V} \cdot d\vec{\sigma} = 0$$

y como, según hemos dicho, el vector  $\vec{V}$  también debe estar dirigido según  
la normal a la superficie, deberá ser

$$\text{rot } \vec{V} \cdot \vec{V} = 0$$

es decir

$$X \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) + Y \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) + Z \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) = 0 \quad [2]$$

Para que existan superficies a lo largo de las cuales se verifique [1] es,  
pues, condición *necesaria la ortogonalidad entre el vector*  $V(X, Y, Z)$  *y su  
rotacional* (si existe). Claro es que si el rotacional es nulo la condición se  
verifica por anularse los paréntesis. Las superficies buscadas son entonces

las equipotenciales del campo ; pero pueden existir superficies ortogonales a las líneas del campo sin que éste admita potencial, bastando para ello que se cumpla [2], como vamos a ver.

**2. Integración de  $X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz = 0$ .**— Veamos, en efecto, que, recíprocamente, si la condición [2] se cumple podemos determinar mediante cuadraturas el haz de superficies ortogonales buscado.

Ante todo es fácil comprobar, por simple sustitución, que si  $X, Y, Z$  cumplen [2] también verifican esta condición  $\mu X, \mu Y, \mu Z$ , siendo  $\mu$  cualquier función derivable de  $x, y, z$  (\*).

Podemos, pues, empezar multiplicando la ecuación [1] por un factor  $\mu$  integrante de  $X dx + Y dy$  (obtenido considerando  $z$  constante) y, por tanto, suponer sin mengua de generalidad que  $X$  e  $Y$  (una vez multiplicadas) son derivadas de una cierta función  $U(x, y, z)$ ,  $U_x = X, U_y = Y$ .

En este supuesto, integrando la ecuación diferencial  $X dx + Y dy = 0$  considerando  $z$  parámetro en la integración, vemos que las superficies buscadas deben tener ecuaciones de la forma

$$U(x, y, z) = C(z) \quad U - C = 0 \quad [3]$$

habiendo sustituido la constante de integración  $C$  por una función de  $z$ , que determinaremos diferenciando

$$U_x dx + U_y dy + [U_z - C'(z)] dz = 0$$

e identificando con  $X dx + Y dy + Z dz = 0$  lo que dará

$$U_z - C'(z) = Z \quad C'(z) = U_z - Z \quad [4]$$

Comprobaremos en seguida que, si se verifica [2],  $U_z - Z$  es una función de  $U$ , y por tanto de  $C$  (por [3]) independiente de  $x, y$  (aunque puede depender de  $z$ ), con lo que la ecuación [4] será de la forma  $\frac{dC}{dz} = F(C, z)$  y dará mediante su integración  $C = \psi(z, K)$ , obteniendo como solución el haz de superficies

$$U(x, y, z) = \psi(z, K) \quad [5]$$

La comprobación indicada se obtiene fácilmente sustituyendo en [2]  $X = U_x, Y = U_y$ . El tercer paréntesis se anula y queda (cambiando los signos)

$$U_x \frac{\partial}{\partial y} (U_z - Z) + U_y \frac{\partial}{\partial x} (Z - U_z) = 0$$

Pero el primer miembro es el desarrollo del Jacobiano  $\frac{D(U, U_z - Z)}{D(x, y)}$

(\*) En efecto,  $\text{rot } \mu \vec{V} = \mu \text{rot } \vec{V} + (\text{grad } \mu) \times \vec{V}$  está formado por dos vectores sumandos perpendiculares a  $\vec{V}$  y por tanto a  $\mu \vec{V}$  de donde resulta  $\text{rot } \mu \vec{V} \cdot \mu \vec{V} = 0$ .



y su anulación indica que existe entre  $U$  y  $U, - Z$  una relación independiente de  $x$ ,  $y$  o de otro modo que

$$U, - Z = \Phi(U) = \Phi(C)$$

función sólo de  $C$  como queríamos demostrar.

Vemos, pues, que la condición [2] es *necesaria y suficiente* para la resolución de nuestro problema.

**3. Caso particular.**—Caso particular interesante es la integración de

$$dz = A(x, y, z) dx + B(x, y, z) dy \quad [6]$$

problema equivalente a la resolución del sistema

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A(x, y, z) \quad \frac{\partial z}{\partial y} = B(x, y, z) \quad [7]$$

La condición necesaria y suficiente de integrabilidad se deduce como caso particular de [2], pero puede escribirse directamente igualando las derivadas cruzadas

$$\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} B = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial z} A \quad [8]$$

Compruebe el lector que esta condición es caso particular de [2].

Si se cumple esta identidad la ecuación es integrable y se determinará el haz de superficies ortogonales al campo  $\vec{V}(A, B, -1)$  en la forma indicada en el párrafo anterior.

EJEMPLO. Integrar

$$dz = (y + a) dx + \frac{z}{y + a} dy \quad [9]$$

Se comprueba fácilmente que  $A = y + a$  y  $B = z/(y + a)$  cumplen [8]. Considerando  $z$  como constante, integraremos

$$(y + a) dx + \frac{z}{y + a} dy = 0$$

que da

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{z}{(y + a)^2} \quad x = \frac{z}{y + a} + C(z)$$

Diferenciando

$$dx = \frac{dz}{y + a} - \frac{z}{(y + a)^2} dy + C'(z) dz$$

que identificando con [9] da  $C'(z) = 0$ ,  $C(z) = K$ .

Por tanto el haz de superficies buscadas es

$$x = \frac{z}{y + a} + K \quad \text{o bien} \quad (x - K)(y + a) = z$$

**4. Ecuaciones en derivadas parciales obtenidas por eliminación de constantes arbitrarias.**— En la lección anterior hemos visto cómo podíamos obtener ecuaciones en derivadas parciales de primer orden por eliminación de funciones arbitrarias. Veamos ahora cómo pueden asimismo obtenerse por eliminación de constantes.

Consideremos un conjunto doblemente infinito de superficies dependientes de dos constantes arbitrarias

$$f(x, y, z, C_1, C_2) = 0 \quad [1]$$

Derivando con relación a  $x$  y con relación a  $y$

$$f_x + f_z p = 0 \quad f_y + f_z q = 0 \quad [2]$$

si es posible la eliminación de  $C_1, C_2$  entre [1] y [2] obtendremos una ecuación en derivadas parciales de primer orden (en general *no lineal*)

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad [3]$$

a la que satisfacen todas las superficies [1]. Este conjunto de superficies se llama *integral completa* de la ecuación [3].

**5. Método de Lagrange-Charpit para obtener una integral completa.** Propongámonos ahora resolver el problema inverso. Dada la ecuación de primer orden (no lineal)

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad [3]$$

(en la que suponemos  $F$  derivable y con derivadas  $F_p, F_q$  no simultáneamente nulas) hallar una integral completa de la forma [1].

Con tal objeto procuremos hallar otra relación

$$\Phi(x, y, z, p, q) = C_1 \quad [4]$$

que, formando sistema con [3], determine

$$p = p(x, y, z) \quad q = q(x, y, z) \quad [5]$$

tales que sustituidos en

$$dz = p dx + q dy \quad [6]$$

den una expresión integrable.

Para ello es condición necesaria y suficiente que las funciones [5] definidas implícitamente por el sistema [3], [4] (suponiendo  $\frac{D(F, \Phi)}{D(p, q)} \neq 0$ ) verifiquen (§ 3)

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} q = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z} p \quad [7]$$

Estas derivadas  $\frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial z}$  se obtienen fácilmente por deriva-

y su anulaci3n indica que existe entre  $U$  y  $U, - Z$  una relaci3n independiente de  $x, y$  o de otro modo que

$$U, - Z = \Phi(U) = \Phi(C)$$

funci3n s3lo de  $C$  como quer3amos demostrar.

Vemos, pues, que la condici3n [2] es *necesaria y suficiente* para la resoluci3n de nuestro problema.

**3. Caso particular.**—Caso particular interesante es la integraci3n de cici3n de

$$dz = A(x, y, z) dx + B(x, y, z) dy \quad [6]$$

problema equivalente a la resoluci3n del sistema

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A(x, y, z) \quad \frac{\partial z}{\partial y} = B(x, y, z) \quad [7]$$

La condici3n necesaria y suficiente de integrabilidad se deduce como caso particular de [2], pero puede escribirse directamente igualando las derivadas cruzadas

$$\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} B = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial z} A \quad [8]$$

Compruebe el lector que esta condici3n es caso particular de [2].

Si se cumple esta identidad la ecuaci3n es integrable y se determinar3 el haz de superficies ortogonales al campo  $\vec{V}(A, B, -1)$  en la forma indicada en el p3rrafo anterior.

EJEMPLO · Integrar

$$dz = (y + a) dx + \frac{z}{y + a} dy \quad [9]$$

Se comprueba f3cilmente que  $A = y + a$  y  $B = z/(y + a)$  cumplen [8]. Considerando  $z$  como constante, integraremos

$$(y + a) dx + \frac{z}{y + a} dy = 0$$

que da

$$\frac{dx}{dy} = - \frac{z}{(y + a)^2} \quad x = \frac{z}{y + a} + C(z)$$

Diferenciando

$$dx = \frac{dz}{y + a} - \frac{z}{(y + a)^2} dy + C'(z) dz$$

que identificando con [9] da  $C'(z) = 0$ ,  $C(z) = K$ .

Por tanto el haz de superficies buscadas es

$$x = \frac{z}{y + a} + K \quad \text{o bien} \quad (x - K)(y + a) = z$$

**4. Ecuaciones en derivadas parciales obtenidas por eliminación de constantes arbitrarias.**— En la lección anterior hemos visto cómo podíamos obtener ecuaciones en derivadas parciales de primer orden por eliminación de funciones arbitrarias. Veamos ahora cómo pueden asimismo obtenerse por eliminación de constantes.

Consideremos un conjunto doblemente infinito de superficies dependientes de dos constantes arbitrarias

$$f(x, y, z, C_1, C_2) = 0 \quad [1]$$

Derivando con relación a  $x$  y con relación a  $y$

$$f_x + f_z p = 0 \quad f_y + f_z q = 0 \quad [2]$$

si es posible la eliminación de  $C_1, C_2$  entre [1] y [2] obtendremos una ecuación en derivadas parciales de primer orden (en general *no lineal*)

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad [3]$$

a la que satisfacen todas las superficies [1]. Este conjunto de superficies se llama *integral completa* de la ecuación [3].

**5. Método de Lagrange-Charpit para obtener una integral completa.** Propongámonos ahora resolver el problema inverso. Dada la ecuación de primer orden (no lineal)

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad [3]$$

(en la que suponemos  $F$  derivable y con derivadas  $F_p, F_q$  no simultáneamente nulas) hallar una integral completa de la forma [1].

Con tal objeto procuremos hallar otra relación

$$\Phi(x, y, z, p, q) = C_1 \quad [4]$$

que, formando sistema con [3], determine

$$p = p(x, y, z) \quad q = q(x, y, z) \quad [5]$$

tales que sustituidos en

$$dz = p dx + q dy \quad [6]$$

den una expresión integrable.

Para ello es condición necesaria y suficiente que las funciones [5] definidas implícitamente por el sistema [3], [4] (suponiendo  $\frac{D(F, \Phi)}{D(p, q)} \neq 0$ ) verifiquen (§ 3)

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} q = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z} p \quad [7]$$

Estas derivadas  $\frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial z}$  se obtienen fácilmente por deriva-

ción de [3] y [4], respecto de  $x, y, z$  consideradas como independientes. Así, derivándolas respecto de  $y$  resulta

$$\left. \begin{aligned} F_y + F_p \frac{\partial p}{\partial y} + F_q \frac{\partial q}{\partial y} &= 0 \\ \Phi_y + \Phi_p \frac{\partial p}{\partial y} + \Phi_q \frac{\partial q}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{de donde } \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\Phi_y F_q - F_y \Phi_q}{F_p \Phi_q - \Phi_p F_q}$$

y análogamente

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\Phi_z F_q - F_z \Phi_q}{F_p \Phi_q - \Phi_p F_q} \quad \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{F_x \Phi_p - \Phi_x F_p}{F_p \Phi_q - \Phi_p F_q} \quad \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{F_z \Phi_p - \Phi_z F_p}{F_p \Phi_q - \Phi_p F_q}$$

Sustituyendo en [7] resulta

$$\Phi_y F_q - F_y \Phi_q + (\Phi_z F_q - F_z \Phi_q) q = F_x \Phi_p - \Phi_x F_p + (F_z \Phi_p - \Phi_z F_p) p$$

ecuación homogénea y de primer grado en las derivadas de la función  $\Phi$  que podemos ordenar así

$$F_p \frac{\partial \Phi}{\partial x} + F_q \frac{\partial \Phi}{\partial y} + (pF_p + qF_q) \frac{\partial \Phi}{\partial z} - (F_x + pF_z) \frac{\partial \Phi}{\partial p} - (F_y + qF_z) \frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0 \quad [8]$$

La determinación de una función  $\Phi$  que cumpla esta ecuación se reducirá (lección anterior, § 5) a la obtención de una integral del sistema

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q} = \frac{-dp}{F_x + pF_z} = \frac{-dq}{F_y + qF_z} \quad [9]$$

de la forma

$$C_1 = \Phi(x, y, z, p, q)$$

Con una solución basta. Escrito el sistema [3], [4] y resuelto en  $p$  y  $q$  obtendremos  $p = p(x, y, z, C_1)$ ,  $q = q(x, y, z, C_1)$  que sustituidos en  $dz = p dx + q dy$  darán una expresión integrable. Integrando ésta según el párrafo 2 obtendremos finalmente la integral completa

$$f(x, y, z, C_1, C_2) = 0 \quad [10]$$

EJEMPLO: Apliquemos lo dicho a la integral de

$$pq = z \quad \text{o sea} \quad pq - z = 0$$

El sistema [9] se reduce aquí a

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}$$

Adoptemos la integral de  $\frac{dy}{p} = \frac{dp}{p}$  que da  $y + C_1 = p$ , que con la ecuación dada

$$q = \frac{z}{y + C_1}$$

Integremos ahora

$$dz = p dx + q dy = (y + C_1) dx + \frac{z}{y + C_1} dy$$

La integral ha sido obtenida en el ejemplo del párrafo 3 y puede escribirse

$$(x + C_2)(y + C_1) = z$$

Esta es, pues, una integral completa.

Pero también podríamos haber partido de la integral

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} \quad \frac{p}{q} = C_1$$

lo que daría juntamente con  $pq=z$  (resolviendo el sistema que forman por producto y cociente)

$$p^2 = zC_1 \quad p = \sqrt{C_1 z} \quad q^2 = z/C_1 \quad q = \sqrt{z/C_1}$$

y sustituyendo en  $dz = p dx + q dy$

$$\frac{dz}{\sqrt{z}} = \sqrt{C_1} dx + \frac{1}{\sqrt{C_1}} dy \quad [11]$$

e integrando se obtiene otra integral completa

$$2\sqrt{z} + C_2 = \sqrt{C_1} x + \frac{y}{\sqrt{C_1}}$$

Como se comprende por el procedimiento seguido, y se ha puesto de manifiesto en el ejemplo, pueden existir múltiples sistemas de integrales completas. La solución obtenida dista, pues, mucho de darnos todas las superficies que verifican la ecuación general dada [3].

**6. Integral general y singular.**—Existen, en efecto, no sólo otros sistemas de integrales completas sino también soluciones dependientes de una función arbitraria que constituyen la *integral general* y aún pueden existir, por fin, soluciones llamadas *singulares* por no poder ser consideradas como caso particular de la integral general ni de la integral completa.

Para obtener unas y otras seguiremos una vez más el método de Lagrange de variación de las constantes, es decir supondremos sustituidas las constantes  $C_1, C_2$  de la integral completa

$$f(x, y, z, C_1, C_2) = 0 \quad [10]$$

por funciones de  $x, y, z$  convenientemente elegidas para que la función  $z$  deducida de [10] siga siendo integral de [3]. Ello se conseguirá si al derivar [10] respecto de  $x, y$  anulamos los términos procedentes de la derivación de  $C_1, C_2$ . Es decir

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p &= 0 & \text{poniendo} & \frac{\partial f}{\partial C_1} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial C_2} \frac{\partial C_2}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q &= 0 & & \frac{\partial f}{\partial C_1} \frac{\partial C_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial C_2} \frac{\partial C_2}{\partial y} = 0 \end{aligned} \right\} \quad [12]$$



El sistema [12] se cumple en los siguientes casos:

1.º Si  $C_1, C_2$  son constantes, es decir, para la integral completa.

2.º Si  $\frac{D(C_1, C_2)}{D(x, y)} = 0$ , es decir, si entre  $C_1$  y  $C_2$  establecemos cualquier relación  $C_2 = \psi(C_1)$ , siendo  $\psi$  una función derivable arbitraria, con lo que tendremos un haz de superficies

$$f(x, y, z, C_1, \psi(C_1)) = 0 \quad [13]$$

y el sistema [12] se convierte en

$$\left( \frac{\partial f}{\partial C_1} + \frac{\partial f}{\partial \psi} \frac{d\psi}{dC_1} \right) \frac{\partial C_1}{\partial x} = 0 \quad \left( \frac{\partial f}{\partial C_1} + \frac{\partial f}{\partial \psi} \frac{d\psi}{dC_1} \right) \frac{\partial C_1}{\partial y} = 0$$

que exige

$$\frac{\partial f}{\partial C_1} + \frac{\partial f}{\partial \psi} \frac{d\psi}{dC_1} = 0 \quad [14]$$

La función  $C_1(x, y, z)$  deducida de esta ecuación y sustituida en [13] dará la *integral* que, por ser dependiente de la función arbitraria  $\psi$ , se llama *general*. Como la eliminación de  $C_1$  indicada sólo es posible si se conoce  $\psi$  se suele conservar el conjunto de las ecuaciones [13] y [14] como expresión analítica de dicha *integral general*.

$$3.º \text{ Si } \frac{\partial f}{\partial C_1} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial C_2} = 0.$$

Las funciones  $C_1(x, y, z), C_2(x, y, z)$  deducidas de este sistema (si tal solución existe) sustituidas en [10] dan una nueva superficie integral que no entra como caso particular de la integral completa ni de la integral general y que se llama, por esta razón, *integral singular*. Veamos la interpretación geométrica de estas integrales.

**7. Interpretación geométrica. Envolventes de superficies.**—La ecuación [13] es la de un haz de superficies de la forma  $F(x, y, z, C_1) = 0$ .

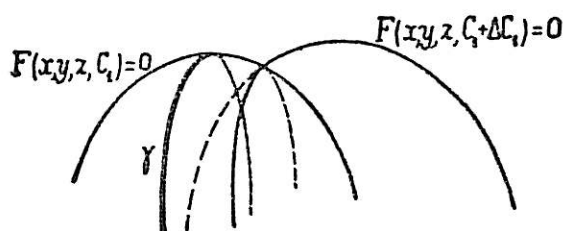
El sistema

$$\left. \begin{array}{l} F(x, y, z, C_1) = 0 \\ F(x, y, z, C_1 + \Delta C_1) = 0 \end{array} \right\} \text{ o su equivalente } \left\{ \begin{array}{l} F(x, y, z, C_1) = 0 \\ \frac{F(x, y, z, C_1 + \Delta C_1) - F(x, y, z, C_1)}{\Delta C_1} = 0 \end{array} \right.$$

da la curva de intersección de la superficie correspondiente al valor  $C_1$ , con la superficie correspondiente al valor  $C_1 + \Delta C_1$ .

Al tender  $\Delta C_1 \rightarrow 0$  la curva  $\gamma$  definida por el sistema

$$\left. \begin{array}{l} F(x, y, z, C_1) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial C_1} = 0 \end{array} \right\} \quad [15]$$



está situada sobre la superficie correspondiente al valor  $C_1$ , y tiene como lugar geométrico al variar  $C_1$ , una superficie que se obtendrá eliminando  $C_1$  entre ambas ecuaciones. Se llama *envolvente* del haz de superficies  $F(x, y, z, C_1)=0$  llamadas *involutas*; y tiene el mismo plano tangente que la involuta correspondiente a lo largo de cada curva  $\gamma$ . De otro modo. La envolvente es tangente a la involuta a lo largo de la curva  $\gamma$  definida por el sistema [15]. En efecto: en cada uno de sus puntos los coeficientes  $p, q$  de la ecuación del plano tangente vendrán dados por

En la superficie involuta

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q = 0$$

En la superficie envolvente

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p + \frac{\partial F}{\partial C_1} \left( \frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial C_1}{\partial z} p \right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q + \frac{\partial F}{\partial C_1} \left( \frac{\partial C_1}{\partial y} + \frac{\partial C_1}{\partial z} q \right) = 0$$

imaginando en estas últimas que  $C_1$  es la función de  $xyz$  que se deduce de  $\frac{\partial F}{\partial C_1}=0$ , y que se supone sustituida en la primera ecuación [15], en virtud del proceso de eliminación de  $C_1$  que da la envolvente.

Pero ambos sistemas coinciden por verificar  $C_1$  la ecuación  $\frac{\partial F}{\partial C_1}=0$ , lo que demuestra la propiedad.

Por tanto: la integral general de la ecuación  $f(x, y, z, p, q)=0$  está formada por todas las superficies envolventes de los sistemas simplemente infinitos de integrales completas que se pueden obtener al enlazar sus constantes  $C_1, C_2$  por una relación  $C_2=\psi(C_1)$  derivable cualquiera.

Para interpretar ahora la integral singular consideremos análogamente la intersección de la superficie dependiente de dos parámetros

$$f(x, y, z, C_1, C_2)=0 \tag{16}$$

con las superficies que resultan de incrementar sucesivamente  $C_1$  y  $C_2$

$$f(x, y, z, C_1 + \Delta C_1, C_2)=0 \quad f(x, y, z, C_1, C_2 + \Delta C_2)=0$$

Mediante razonamiento análogo veríamos que el sistema constituido por estas tres ecuaciones al tender  $\Delta C_1 \rightarrow 0, \Delta C_2 \rightarrow 0$  es equivalente al formado por estas otras tres

$$f(x, y, z, C_1, C_2) = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial C_1} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial C_2} = 0$$

y representa un punto o puntos, cuyo lugar geométrico al variar  $C_1, C_2$  es el resultado de eliminar  $C_1, C_2$  entre ellas, y constituye una superficie llamada *envolvente* de todas las del conjunto doblemente infinito de *involutas* [15], teniendo en cada uno de sus puntos el mismo plano tangente que la involuta que pasa por él.

La solución singular es, pues, la superficie envolvente de todas las integrales completas.

Para poner un ejemplo muy intuitivo que aclare al lector esta multitud de soluciones, imagine todas las posiciones de una bola de billar sobre el plano en que rueda. Cada posición tiene una superficie definida por dos constantes: las coordenadas  $a, b$  de su centro; en el plano que los contienen a todos y que tomaremos como  $xy$ . Tenemos, pues, una familia doblemente infinita de superficies de ecuación

$$[1] \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = R^2 \quad (\text{radio } R \text{ constante})$$

La eliminación de las constantes  $a, b$  entre esta ecuación y la que resulte de derivarla con respecto a  $x$  e  $y$  nos dará fácilmente la ecuación en derivadas parciales a que tales superficies satisfacen, que es (como fácilmente puede obtener el lector)

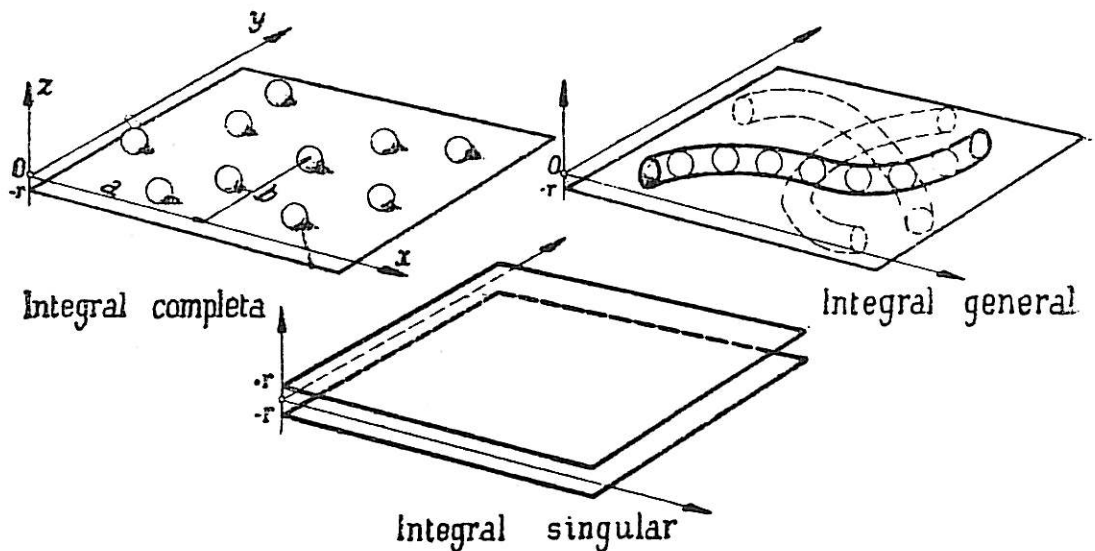
$$z^2(p^2 + q^2 + 1) = R^2 \quad [2]$$

La superficie [1] con las dos constantes arbitrarias  $a$  y  $b$  constituye una *integral completa* de esta ecuación. Su imagen intuitiva la da el conjunto de todas las posiciones de la bola *quieta* sobre el plano.

Deslicemos ahora la bola sobre el plano de modo que su centro siga una trayectoria *arbitraria*  $b = \psi(a)$ . Las *infinitas superficies tubulares* que de esta forma podríamos obtener como *envolventes de las posiciones de la bola en cada trayectoria*, darán la imagen de la *integral general*.

Finalmente, los planos tangentes superior e inferior envolventes de *todas* las posiciones (así como de todas las superficies canales) darán la solución singular  $z^2 = R^2$ .

Claro es que en lugar de tomar el sistema de esferas podríamos considerar como *integral completa* el sistema de tubos cilíndricos de igual radio tangentes al mismo plano. Ahora las esferas serían envolventes de cilindros y, por tanto, irían incluidas como caso particular de la *integral general*.



### EJERCICIOS

Hallar las ecuaciones diferenciales correspondientes a las familias de superficies:

1.  $\Phi(x^2 - y^2, y^2 - z^2) = 0$ .
2.  $\Phi[(x-z)(z-y), z] = 0$
3.  $\Phi\left(\frac{x+y}{xy}, \frac{z}{xy}\right) = 0$
4.  $\Phi(x^2 + y^2 + z^2, xyz) = 0$
5. Hallar la ecuación funcional y diferencial de las superficies cónicas de vértice en el punto  $a, b, c$ . Interpretar este último.

6. Ecuación funcional y diferencial de las superficies cilíndricas de generatrices paralelas a la recta  $x=az$ ,  $y=bz$ .

7. Ecuación funcional y diferencial de las superficies de revolución de eje en la recta  $x=az$ ,  $y=bz$ .

8. Integrar la ecuación  $(x-y)p + (x+y)q = 0$ .

9.  $\frac{x}{z}p + \frac{z}{y}q = 0$       10.  $xy(p-q) = (x-y)z$ .      11.  $p-q = \log_e(x+y)$ .

12.  $x^2p + y^2q = z^3$       13.  $x(y-z)p + y(z-x)q = z(x-y)$ .

14.  $(x+y)(xp-yq) = (x-y)z$ .      15.  $(y^2-z^2)p + (z^2-x^2)q = x^2-y^2$

16.  $(x^2-y^2-z^2)p + 2xyq = 2xz$ .      17.  $py-qx = 2xyz$ .

18. Hallar, entre las superficies integrales del ejercicio 17, la que contiene la recta  $x=y=z$ .

Hallar las integrales generales de las ecuaciones siguientes en las que la función incógnita es  $u$ , de las variables  $x, y, z$ .

19.  $u_x + u_y + u_z = 1$ .      20.  $xu_x + yu_y + zu_z = u$ .      21.  $u(u_x + u_y + u_z) = 1$

22.  $yzu_x + zxu_y + xyu_z = xyz$ .      23.  $(y-z)u_x + (z-x)u_y + (x-y)u_z = 0$ .

24. Hallar una superficie que contenga la circunferencia  $y^2 + z^2 = 1$ ,  $x=1$  y tal que todo plano tangente a la superficie corte al eje  $Oz$  en un punto con la misma ordenada  $z$  que el punto de contacto.

25. Hallar una superficie que contenga la recta  $x+y=1$ ,  $z=1$  y tal que todo plano tangente a la superficie corte al eje  $Oz$  en un punto de ordenada doble que la del punto de contacto.

26. Hallar todas las superficies que verifican la siguiente propiedad: El área del triángulo  $OPN$  definido por el origen  $O$ , la proyección  $P$  del punto de la superficie sobre el plano  $xy$ , y el pie  $N$  de la normal a la superficie por  $P$ , sobre el plano  $xy$ , es constante  $=k$ .

27. Dado el haz de superficies  $x^2 + y^2 = 2Cz$  hallar la superficie normal a todas ellas que pasa por la recta  $y=1$ ,  $z=0$ .

28. Averiguar la forma que debe tener una ecuación diferencial ordinaria de primer orden para que su haz integral coincida con el haz de isoclinas de dicha ecuación.

29. Integrar  $(x-r)dx + (y-r)dy + (z-r)dz = 0$  donde  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

30. Integrar  $yz(y+z)dx + xz(x+z)dy + xy(x+y)dz = 0$  comprobando previamente la condición de integrabilidad.

31. Idem  $(y^2 + yz + z^2)dx + (z^2 + zx + x^2)dy + (x^2 + xy + y^2)dz = 0$

32. Idem  $dz = \frac{1+yz}{1+xy}dx + \frac{x(z-x)}{1+yx}dy$

Aplicar el método de Lagrange-Charpit para hallar la integral completa de las siguientes ecuaciones, hallando asimismo la integral singular de las que la tengan.

33.  $pq + xp + yq - z = 0$ .      34.  $xp^2 + yq^2 = 1$ .

35.  $x^2p^2 + y^2q^2 = 1$ .      36.  $pq + z = 1$ .

37.  $pq = 4xy$ .      38.  $p^2 - q^2 + 4xp + 4yq - 4z = 0$

39. (\*)  $pq + x(2y+1)p + (y^2+y)q - (2y+1)z = 0$ .      40.  $2zq^2 - y^2p + y^2q = 0$  (\*\*).

41. Idem a la ecuación  $z^2(p^2 + q^2 + 1) = R^2$  obtenida en el ejemplo del último párrafo.

42. Demostrar que en las ecuaciones de la forma  $f(x, p) = \varphi(y, q)$  son integrales primeras del sistema  $f(x, p) = C_1$ , así como  $\varphi(y, q) = C_2$ .

43. Aplicar lo anterior a la integración de  $p^2y = q^2x$

44. Idem de  $p^2 - q^2 = x - y$ .

45. Hallar todas las superficies cuyas normales cortan al eje  $z$ .

46. Hallar las superficies tales que el segmento determinado en el eje  $y$  por todo plano tangente valga el cuadrado de la ordenada  $z$  del punto de contacto.

47. Ecuación de la superficie que contiene la hipérbola  $y^2 + z^2 = x^2$ ,  $z=1$  y que satisfice la ecuación  $x^2(p-q) = (x-y)z$ .

48. Integrar  $p^3 - 2pq + 3q = 5$ .

49. Integrar  $p^2 + q^2 + z^2 = z^4$

50. Integrar  $q + \sin p = 0$ .

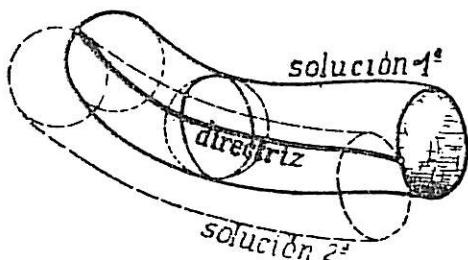
(\*) F. H. Miller: «Partial Differential Equations».

(\*\*) Obsérvese que el denominador de  $dz$  en el sistema diferencial vale, en virtud de la ecuación,  $-2zq^2$ .

LECCIÓN 23.—MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS. PROBLEMA DE CAUCHY

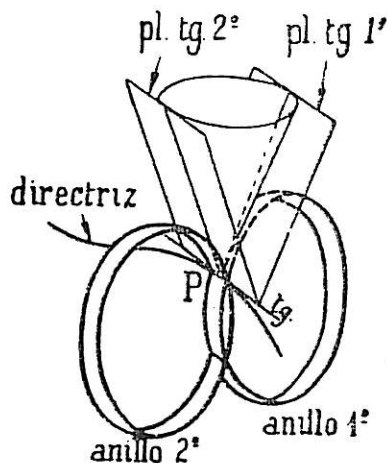
1 **Ejemplo previo.**—El ejemplo que acabamos de exponer nos permite completar intuitivamente la teoría de la integración de la ecuación de primer orden no lineal  $F(x, y, z, p, q)=0$ , con la determinación de la solución particular que pasa por una curva dada *directriz*.

En el caso de las ecuaciones lineales  $Xp + Yq = Z$ , supuestas cumplidas ciertas condiciones muy amplias para  $X, Y, Z$  en un dominio espacial  $D$ , vimos que, al dar una curva *directriz* en dicho dominio (no característica) por ella pasaba una sola superficie solución formada por curvas características (soluciones del sistema  $dx : X = dy : Y = dz : Z$ ).

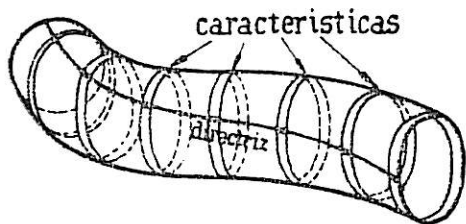


En el caso del ejemplo de la bola de billar, vemos que al dar una curva *directriz*, materializada, por ejemplo, por un alambre curvo (situada en la zona de espacio comprendida entre

los dos planos tangentes superior e inferior mencionados) existen no una, sino dos superficies tubulares solución, que se apoyan en la referida línea (envolventes de las esferas tangentes a la misma). Pero si la línea dada es una circunferencia diametral vertical de dichas esferas, existen infinitas de superficies integrales que pasan por ella. Estas circunferencias desempeñan, pues, aquí análogo papel al de las características del caso lineal, pero con una diferencia esencial: por cada punto  $P$  de la región de existencia pasan aquí infinitas de tales curvas (mientras en el caso lineal sólo pasa una característica por cada punto). Lo que individualiza las dos características válidas por cada punto  $P$  de la curva *directriz* es ahora la *condición de tangencia de la esfera con dicha curva*.



Imaginemos, pues *mondada* la superficie esférica a lo largo de dichas circunferencias máximas, es decir adherida a éstas una muy estrecha tira de superficie o, más exacto aún, imaginemos dada a lo largo de dichas circunferencias la sucesión de planos tangentes. Todos los planos tangentes que pasan por cada punto  $P$  envuelven un cono. Aquellos que pasan por la tangente a la *directriz* en  $P$  individualizarán la posición de las características correspondientes a este punto.



Parece, pues natural llamar, en general, *características* a estas curvas con sus tiras o bandas desarrollables tangentes, y considerar las integrales como superficies formadas por la yuxtaposición de tales bandas. En este ejemplo las bandas características son cilíndricas de eje horizontal variable, de radio constante igual al de la bola de billar y tangentes al plano de éste. La condición de tangencia a la curva *directriz* va fijando las posiciones de las bandas características generadoras de la superficie.

rectriz va fijando las posiciones de las bandas características generadoras de la superficie.

Veamos ahora cómo se pueden obtener analíticamente de un modo general tales tiras o bandas características.



**2. Curvas y bandas características. Sistema que las define.** — La ecuación

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad [1]$$

establece para cada punto  $x_0, y_0, z_0$  del espacio (o de una cierta región de él) una relación entre  $p$  y  $q$ ,

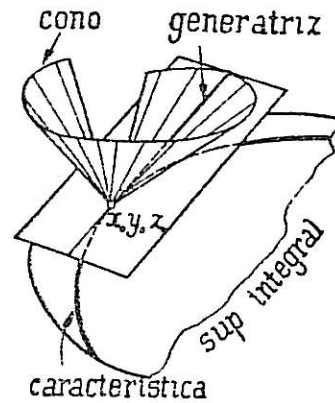
$$F(x_0, y_0, z_0, p, q) = 0 \quad [2]$$

es decir, define un conjunto simplemente infinito de planos tangentes a las superficies integrales que pasan por este punto, planos cuya ecuación es

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0) \quad [3]$$

y cuya superficie envolvente, cónica de vértice en el punto  $x_0, y_0, z_0$  se obtendrá imaginando expresado por ejemplo  $q$  en función de  $p$ , deducida de [2], y eliminando luego  $p$  entre [3] y su derivada respecto de  $p$

$$0 = x - x_0 + \frac{dq}{dp}(y - y_0) \quad \text{donde} \quad \frac{dq}{dp} = -\frac{F_p}{F_q}$$



es decir

$$\frac{x - x_0}{F_p} = \frac{y - y_0}{F_q} \quad [4]$$

lo que equivale en definitiva a eliminar  $p, q$  entre [2], [3] y [4].

El conjunto de las dos ecuaciones [3] y [4] representará la *generatriz de contacto* del cono mencionado con el plano tangente correspondiente a cada par de valores  $p, q$  que satisfacen a [2].

Dada una superficie integral  $z = z(x, y)$ , en cada uno de sus puntos tenemos un plano tangente, un cono envolvente y la generatriz de contacto correspondiente. Pues bien, llamaremos *características* en esta superficie integral a aquellas curvas situadas sobre ella que son tangentes en cada punto a la generatriz de contacto correspondiente a dicho punto.

A lo largo de cada característica se verificará, pues, (por [3] y [4])

$$dz = p dx + q dy \quad \frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{p dx + q dy}{pF_p + qF_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q}$$

relaciones que rigen la variación de  $x, y, z$ . ¿Cómo variarán  $p$  y  $q$  a lo largo de las mismas?

Designemos por  $r = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$   $s = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$   $t = \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

Se tendrá sobre la superficie  $z(x, y)$  considerada

$$dp = r dx + s dy \quad dq = s dx + t dy$$



y por tanto, sobre las características.

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dp}{rF_p + sF_q} = \frac{dq}{sF_p + tF_q}$$

Pero derivando [1] respecto a  $x$  e  $y$ , supuestas sustituidas en ella  $z, p, q$  por sus expresiones en función de  $x, y$  a lo largo de la superficie  $z(x, y)$  tendremos las identidades

$$\begin{aligned} F_x + F_z p + F_p r + F_q s &= 0 & rF_p + sF_q &= -(F_x + F_z p) \\ F_y + F_z q + F_p s + F_q t &= 0 & sF_p + tF_q &= -(F_y + F_z q) \end{aligned}$$

lo que nos permite expresar los denominadores anteriores solamente en función de las derivadas primeras.

Llegamos, pues, a la consecuencia de que la variación de  $x, y, z, p, q$  a lo largo de las curvas características de una superficie integral viene regida por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

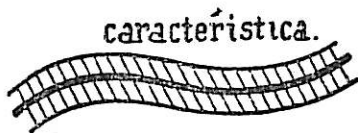
$$\boxed{\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q} = \frac{-dp}{F_x + pF_z} = \frac{-dq}{F_y + qF_z}} \quad [5]$$

el mismo hallado en el método de Lagrange-Charpit y que *no depende de la superficie integral  $z(x, y)$  considerada.*

Dados los valores  $y_0, z_0, p_0$  correspondientes a un valor  $x_0$ , la ecuación [1] definirá uno o varios valores de  $q$ . Adoptado uno de estos  $q_0$  tendremos condiciones iniciales con las que el sistema (cuyos denominadores suponemos cumplen las condiciones exigidas en los teoremas de existencia) definirá un conjunto de cuatro funciones

$$y = y(x, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) \quad z = z(x, \dots) \quad p = p(x, \dots) \quad q = q(x, \dots) \quad [6]$$

es decir, una línea, y, a lo largo de ella, una sucesión de valores de  $p$  y  $q$ , es decir, una sucesión de planos tangentes que definen una *desarrollable circunscrita a la superficie a lo largo de la característica*. Todas las superficies integrales aparecen así como tangentes a estas desarrollables.



El conjunto de curva y superficie desarrollable (que puede reducirse imaginativamente a una estrecha cinta tendida a lo largo de la curva) es la que se suele llamar *banda característica, multiplicidad característica*, o simplemente *característica*.

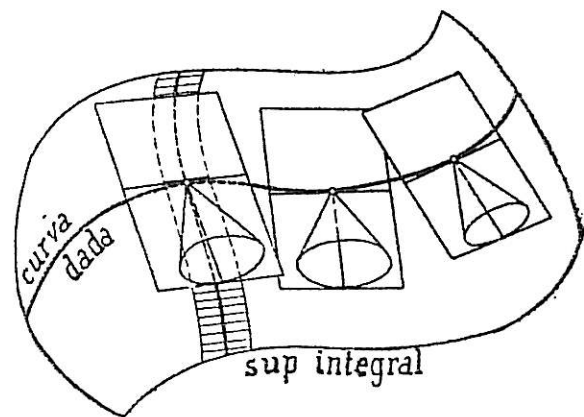
Vemos, pues, que *toda superficie integral* (a lo largo de la cual los denominadores de [5] no se anulen simultáneamente) *está formada por curvas características*. Dada la ecuación de la superficie y deducidas de ella las expresiones de  $z, p, q$  en función de  $x, y$  la primera ecuación [5] bastará para hallar sobre ella el haz de curvas características. En cada superficie integral tenemos, pues, un haz (que forma parte del conjunto triplemente infinito de características definidas por [5]). Pero el hecho de que

el sistema [5] individualice una característica, dado un conjunto de valores  $x_0, y_0, z_0, p_0, q_0$  indica que:

*Dos superficies integrales que tengan en un punto común un mismo plano tangente, son tangentes a lo largo de toda la curva característica es decir, tienen común toda la banda característica que pasa por este punto y tiene este plano tangente.*

**3. Problema de Cauchy.**—Supongamos dada ahora una curva  $x=x_0(t), y=y_0(t), z=z_0(t)$ , no característica, con tangente en cada punto, y tratemos de hallar la superficie integral que pasa por ella.

MÉTODO DE DARBOUX.—Geoméricamente la solución es clara. Puesto que el plano tangente a la superficie integral buscada tiene que contener la tangente a la curva en cada punto de ella, trazaremos los planos tangentes al cono correspondiente a cada punto, que pasan por la tangente a la curva dada en él, y éstos serán planos tangentes a otras tantas superficies integrales que pasan por dicho punto. Cada uno de ellos individualizará con el punto una banda característica que pasa por él.



Al mover el punto sobre la curva, la sucesión de planos tangentes (correspondientes, por ejemplo, a una misma determinación de  $q=f(x, y, p)$  en la ecuación dada [1]), determinará la superficie integral como lugar de las curvas características individualizadas por cada uno de dichos planos. Tendremos, pues, tantas superficies integrales como planos tangentes al cono podamos trazar por cada tangente.

Analíticamente esto se traducirá en:

1.º Resolver el sistema en  $p, q$

$$\left. \begin{aligned} z'_0(t) &= px'_0(t) + qy'_0(t). && \text{(expresa que el pl. tg. contiene la} \\ & && \text{tg. a la curva)} \\ F(x_0(t), y_0(t), z_0(t), p, q) &= 0 && \text{(a lo largo de la curva se verifica la} \\ & && \text{ecuación dada)} \end{aligned} \right\} [7]$$

obteniendo  $p=p_0(t), q=q_0(t)$ .

2.º Con lo anterior tenemos la sucesión de valores iniciales  $x_0(t), y_0(t), z_0(t), p_0(t), q_0(t)$  que sustituidos en la integral [6] del sistema [5] darán el conjunto simplemente infinito (dependiente del parámetro  $t$ ) de características de la superficie buscada

$$y=y(x, t) \quad z=z(x, t) \quad p=p(x, t) \quad q=q(x, t) \quad [8]$$

3.º La eliminación de  $t$  entre las dos primeras dará dicha superficie

$$\varphi(x, y, z)=0 \quad [9]$$

NOTA.—Si la curva dada  $x=x_0(t)$ ,  $y=y_0(t)$ ,  $z=z_0(t)$  es ella misma característica, las ecuaciones [8] son identidades en  $t$  y no hay eliminación posible.

MÉTODO DE LA INTEGRAL COMPLETA.—Recordemos que al enlazar las constantes de la integral completa

$$f(x, y, z, C_1, C_2)=0 \quad [10]$$

por una relación  $C_2=\psi(C_1)$  resulta la ecuación  $f(x, y, z, C_1, \psi(C_1))=0$  de un haz de superficies cuya envolvente es superficie integral y lugar geométrico de las curvas definidas por el sistema

$$\left. \begin{aligned} f(x, y, z, C_1, \psi(C_1)) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial C_1} + \frac{\partial f}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial C_1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [11]$$

a lo largo de las cuales son tangentes la involuta (integral completa) y la envolvente (superficie integral en cuestión). Pero, en virtud del párrafo 2, dos superficies integrales tangentes en un punto lo son a lo largo de la curva característica que pasa por él; por tanto:

*Las curvas características son las curvas de contacto de las integrales completas con sus envolventes.*

Dada ahora una curva  $x=x_0(t)$ ,  $y=y_0(t)$ ,  $z=z_0(t)$  toda superficie integral que la contenga podrá ser obtenida como envolvente de las integrales completas tangentes a dicha línea, pues, como acabamos de decir, las curvas características que pasan por sus puntos son precisamente las curvas [11].

Veamos ahora cómo determinar la función  $\psi$  para que las superficies integrales completas sean tangentes a una curva dada

$$x=x_0(t) \quad y=y_0(t) \quad z=z_0(t)$$

Expresemos que el plano tangente a la integral completa [10] en cada punto de la curva contiene la tangente a ella y tendremos

$$f_{x_0} x'_0(t) + f_{y_0} y'_0(t) + f_{z_0} z'_0(t) = 0 \quad [12]$$

en cuyos coeficientes  $f_{x_0}$ ,  $f_{y_0}$ ,  $f_{z_0}$  aparecen las coordenadas  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  y las constantes  $C_1$ ,  $C_2$ .

Sustituyendo en esta ecuación, y en la

$$f(x_0, y_0, z_0, C_1, C_2)=0 \quad [13]$$

$x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  por sus expresiones  $x_0(t)$ ,  $y_0(t)$ ,  $z_0(t)$  y eliminando finalmente  $t$  entre [12] y [13], tendremos la relación pedida entre  $C_1$  y  $C_2$ , es decir  $C_2=\psi(C_1)$ .

**4. Comparación entre los métodos de Lagrange y Darboux. Casos particulares notables.**—De los métodos expuestos para la resolución del problema de Cauchy, ¿cuál de ellos es más ventajoso? Desde un punto de

vista teórico y conceptual, el método de las bandas características tiene el interés fundamental de dar una interpretación geométrica extraordinariamente elocuente del problema, penetrando en la íntima esencia de su resolución, pero exige la integración total del sistema [5], mientras que por el método de la integral completa *basta con obtener una integral primera del sistema*, lo que en muchos casos prácticos se consigue con la simple inspección del sistema. Veamos los casos particulares más interesantes en que tal integral primera es inmediata.

1. ECUACIÓN CON SÓLO UNA VARIABLE INDEPENDIENTE.—Supongamos que la ecuación propuesta [1] no contiene explícitamente más que una variable independiente y las dos derivadas, o sea que, por ejemplo, es de la forma

$$F(y, p, q) = 0 \quad [14]$$

Se tiene entonces  $F_x \equiv F_z \equiv 0$  y por consiguiente el sistema [5] admite la integral primera  $p = C_1$ , que sustituida en [14] dará  $q = \varphi(y, C_1)$ , y bastará integrar

$$dz = C_1 dx + \varphi(y, C_1) dy \quad [15]$$

y así, con una cuadratura obtenemos la integral completa

$$z = C_1 x + \int \varphi(y, C_1) dy + C_2 \quad [16]$$

2. ECUACIÓN SIN LAS VARIABLES INDEPENDIENTES.—Supongamos que la ecuación dada no contiene explícitamente las variables independientes

$$F(z, p, q) = 0 \quad [17]$$

Se tiene aquí  $F_x \equiv F_y \equiv 0$  y una de las ecuaciones del sistema [5] se convierte en

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}$$

es decir, que admite la integral primera  $q = C_1 p$ .

De las dos ecuaciones

$$F(z, p, q) = 0 \quad q = C_1 p$$

se deduce  $p = \varphi(z, C_1)$ ,  $q = C_1 \varphi(z, C_1)$  que dan una *de* integrable

$$dz = \varphi(z, C_1)(dx + C_1 dy)$$

Su integración se logra por una cuadratura

$$\int \frac{dz}{\varphi(z, C_1)} = x + C_1 y + C_2$$

obteniéndose así la integral completa.

3. ECUACIÓN DE VARIABLES SEPARADAS.—Sea una ecuación de la forma  $F(x, p) = \Phi(y, q)$ . El sistema [5] se convierte en

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{-\Phi_q} = \frac{dz}{pF_p - q\Phi_q} = \frac{-dp}{F_x} = \frac{dq}{\Phi_y}$$

Considerando la primera razón y la cuarta se deduce

$$F_x dx + F_p dp = 0$$

cuya integral es evidentemente  $F(x, p) = C_1$ . Si se une esta ecuación a la propuesta, se tendrá para determinar  $p$  y  $q$

$$\begin{cases} F(x, p) = C_1 \\ \Phi(y, q) = C_1 \end{cases} \text{ de las cuales obtendremos } \begin{cases} p = f(x, C_1) \\ q = \varphi(y, C_1) \end{cases}$$

que sustituidos en  $dz = p dx + q dy$

$$dz = f(x, C_1) dx + \varphi(y, C_1) dy$$

se integra por simples cuadraturas  $z = \int f(x, C_1) dx + \int \varphi(y, C_1) dy + C_2$ .

4. ECUACIÓN DE CLAIRAUT GENERALIZADA.—Sea, por fin, la ecuación

$$z = px + qy + f(p, q)$$

El sistema [5] nos da aquí  $dp = 0$ ,  $dq = 0$ , o sea  $p = C_1$ ,  $q = C_2$  (puesto que  $F_x + pF_z = p - p = 0$  y asimismo  $F_y + qF_z = 0$ ), que sustituidas en la ecuación nos dan la integral completa de inmediata comprobación

$$z = C_1 x + C_2 y + f(C_1, C_2)$$

la cual representa un conjunto doblemente infinito de planos que depende de dos parámetros arbitrarios  $C_1$  y  $C_2$ ; si, para hallar la integral, establecemos una relación arbitraria entre estos dos parámetros obtenemos un conjunto simplemente infinito de planos cuya superficie envolvente es *desarrollable*.

La ecuación y su solución constituyen una generalización de la ecuación diferencial de Clairaut ordinaria.

Veamos algunos ejemplos de los casos expuestos.

EJEMPLO 1.º Tratemos de integrar la ecuación

$$p^2 + q^2 = 1 \tag{1}$$

a la que corresponde el sistema (por ser  $pF_p + qF_q = 2p^2 + 2q^2 = 2$ )

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{2q} = \frac{dz}{2} \quad dp = 0 \quad dq = 0 \tag{2}$$

del que resulta  $p = C_1$ ,  $q = \sqrt{1 - C_1^2}$ ,  $dz = C_1 dx + \sqrt{1 - C_1^2} dy$

y la *integral completa*  $z = C_1 x + \sqrt{1 - C_1^2} y + C_2$  o bien  $z = x \cos \alpha + y \sin \alpha + C_2$  [3] que representa el conjunto doblemente infinito de planos inclinados  $-45^\circ$  sobre el plano  $xy$ . Toda superficie envolvente de estos planos será integral de la ecuación.

Por ejemplo, la superficie integral (o superficies) que contiene la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$   $z = 1$  se obtendrá expresando que el plano [3] le es tangente, o sea que la recta  $1 = C_1 x + \sqrt{1 - C_1^2} y + C_2$  es tangente a la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$ , lo que implica (distancia al origen = 1):

$1 - C_2 = \pm 1$ , de donde  $C_2 = 0$  ó  $C_2 = 2$ ; la primera solución da la envolvente de los planos  $z = C_1 x + \sqrt{1 - C_1^2} y$ , que es (eliminando  $C_1$  entre esta ecuación y su derivada respecto de  $C_1$ )  $z^2 = x^2 + y^2$ , y la segunda da, análogamente  $(z - 2)^2 = x^2 + y^2$  conos de revolución de eje  $z$  y abertura  $90^\circ$ , con vértices en el origen y en el punto  $(0, 0, 2)$ .

También se puede obtener como integral completa el conjunto de los conos de vértice en el plano  $xy$  de eje vertical y abertura  $90^\circ$  utilizando del sistema [2] las siguientes integrales:

$$p = k_1 \quad q = k_2 \quad dx = p dz = k_1 dz \quad x - a = k_1 z \quad p = k_1 = \frac{x - a}{z}$$

$$dy = q dz = k_2 dz \quad y - b = k_2 z \quad q = k_2 = \frac{y - b}{z}$$

y sustituyendo en la ecuación dada

$$z^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$$

Si al integrar  $dx = k_1 dz$   $dy = k_2 dz$  hubiésemos puesto  $x - a = k_1(z - c)$   $y - b = k_2(z - c)$  hubiésemos obtenido todos los conos de eje vertical y abertura  $90^\circ$

$$(z - c)^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$$

triple infinidad de conos entre los cuales se hallan los dos obtenidos antes.

EJEMPLO 2.º Apliquemos el mismo método a la integración de la ecuación de las superficies tubulares  $p^2 + q^2 + 1 = \frac{R^2}{z^2}$  El sistema correspondiente será ahora

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{2q} = \frac{dz}{2\left(\frac{R^2}{z^2} - 1\right)} = \frac{-dp}{2p \frac{R^2}{z^2}} = \frac{-dq}{2q \frac{R^2}{z^2}}$$

del que se desprende  $\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}$   $q = C_1 p$  que combinada con la ecuación dada da:

$$p^2 (1 + C_1^2) = \frac{R^2}{z^2} - 1, \quad p = \frac{\sqrt{R^2 - z^2}}{z \sqrt{1 + C_1^2}} \quad q = \frac{C_1 \sqrt{R^2 - z^2}}{z \sqrt{1 + C_1^2}} \quad \frac{\sqrt{1 + C_1^2} z dz}{\sqrt{R^2 - z^2}} = dx + C_1 dy$$

y se obtiene la integral completa

$$-\sqrt{1 + C_1^2} \sqrt{R^2 - z^2} = x + C_1 y + C_2 \quad z^2 + \frac{(x + C_1 y + C_2)^2}{1 + C_1^2} = R^2$$

cilindros de revolución de radio  $R$  y ejes en las rectas  $x + C_1 y + C_2 = 0$  del plano  $xy$ , integral completa ya indicada en el ejemplo final de la lección anterior.

También se pudo haber obtenido como integral completa el sistema de esferas allí indicado, observando que del sistema se desprende

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{q} = \frac{dz}{\frac{R^2}{z^2} - 1} = \frac{z dp}{-p \frac{R^2}{z^2}} = \frac{z dq}{-q \frac{R^2}{z^2}} = \frac{dx + p dz + z dp}{p + p \frac{R^2}{z^2} - p - p \frac{R^2}{z^2}} = \frac{dy + q dz + z dq}{q + q \frac{R^2}{z^2} - q - q \frac{R^2}{z^2}}$$

lo que exige  $d(x + pz) = 0$   $d(y + qz) = 0$  de donde  $p = \frac{a - x}{z}$   $q = \frac{b - y}{z}$



y sustituyendo en la ecuación resulta

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = R^2$$

EJEMPLO 3.º La ecuación  $z = px + qy + pq$ , del tipo Clairaut generalizado admite la integral completa inmediata  $z = C_1x + C_2y + C_1C_2$  [1]

Dada la directriz  $y=0$   $z=x^2$  se habrá de verificar a lo largo de ella la condición de tangencia con el plano, es decir,  $dz = C_1 dx + C_2 dy$  donde  $dz = 2x dx$   $dy=0$  y, por tanto,  $2x = C_1$ . Eliminando  $x$ ,  $y$ ,  $z$  entre esta ecuación, la [1] y las de la directriz, tendremos la relación entre  $C_1$  y  $C_2$

$$\frac{C_1^2}{4} = \frac{C_1^2}{2} + C_1 C_2 \quad \text{de donde} \quad C_2 = -\frac{C_1}{4}$$

relación que define el haz de planos  $z = C_1(x - \frac{1}{4}y) - \frac{1}{4}C_1^2$ , cuya superficie envolvente es la superficie buscada  $z = \left(x - \frac{y}{4}\right)^2$ . Se trata de un cilindro parabólico (caso particular de las superficies desarrollables).

5. Otra definición de curva característica.—Al aplicar el método de Darboux para hallar la superficie integral de la ecuación  $F(x, y, z, p, q) = 0$  que pasa por la curva  $x = x_0(t)$ ,  $y = y_0(t)$ ,  $z = z_0(t)$  hemos indicado que había que empezar resolviendo el sistema en  $p, q$

$$F(x_0, y_0, z_0, p, q) = 0 \quad z'_0 = px'_0 + qy'_0$$

Ahora bien, este sistema no define  $p, q$  como funciones implícitas de  $x_0, y_0, z_0$ , cuando es nulo el jacobiano,

$$\begin{vmatrix} F_p & F_q \\ x'_0 & y'_0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{o sea, cuando} \quad \frac{x'_0}{F_p} = \frac{y'_0}{F_q}$$

Es lo que ocurre precisamente a lo largo de las curvas características § 2. Estas curvas pueden, pues, definirse como curvas excepcionales que no pueden ser tomadas como datos del problema de Cauchy. (V. además nota del § 3.)

Conviene dejar consignada esta definición de las características por el reflejo que tiene en las ecuaciones de orden superior.

## EJERCICIOS

1. Dada la ecuación  $x^2p^2 + y^2q^2 = 1$  hallar la ecuación del cono característico con vértice en el punto (2, 1, 0).

2. Dada por este punto la curva  $x = 2 + t$ ,  $y = 1 + t$ ,  $z = t^2 + \frac{1}{2}t$ , hallar el plano tangente al cono y a dicha curva, así como la generatriz de contacto (dos soluciones).

3. Hallar las ecuaciones de las bandas características definidas por los anteriores elementos. Dénse, por ejemplo,  $y, z, p, q$  como funciones de  $x$ .

4. Hallar las bandas características de la ecuación  $p^2 + q^2 + 1 = 1/z^2$  tangentes a la circunferencia  $z=0$ ,  $x^2 + y^2 = 4$  en el punto (2, 0, 0).

5. Superficies integrales que contienen dicha circunferencia.

6. Aplicar el método de Darboux a la determinación de la superficie integral de la ecuación  $xp + p^2 - q = 0$  que pasa por la recta  $x=0$ ,  $y=t$ ,  $z=t$ .

7. Superficie integral de  $pq = z$  que contiene la recta  $x=t$ ,  $y=1-t$ ,  $z=1$ .

8. Integral completa de  $(1-x^2)yp^2 + x^2q = 0$ .

9. Integral completa y singular de  $z = xp + yq + p^2 - q^2$ .

10. Integral completa y singular de  $(xp + yq - z)(p^2 + q^2) = pq$ .

## Capítulo IX.—ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR AL PRIMERO

### LECCIÓN 24.—ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEAS DE COEFICIENTES CONSTANTES

**1. Sobre la eliminación de funciones arbitrarias.**—Por similitud con lo que ocurre en las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden, cabría esperar la posibilidad de engendrar sistemáticamente una ecuación en derivadas parciales de segundo orden por eliminación de *dos funciones arbitrarias* entre una relación finita que las contenga y sus derivadas; pero no es así. En general, una ecuación conteniendo más de una función arbitraria conduce, por derivaciones, a *más de una* ecuación eliminante.

Por ejemplo, dada una función de la forma  $z=f(x, y, \varphi(x), \psi(y))$ ,  $\varphi$  y  $\psi$  arbitrarias, al formar las derivadas

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

obtenemos cinco relaciones nuevas que son insuficientes para eliminar las *seis* funciones  $\varphi, \varphi', \varphi'', \psi, \psi', \psi''$ . Pero si con objeto de tener relaciones suficientes formamos las derivadas de *tercer orden*, que son cuatro, tendremos en total diez relaciones para eliminar las *ocho* funciones:  $\varphi, \psi$  y sus tres primeras derivadas, lo que dará en general dos eliminantes.

Sólo en *casos especiales* la eliminación conduce a una sola eliminante. Por ejemplo, con  $z=\varphi(x+ay)+\psi(x-ay)$ ,  $\varphi$  y  $\psi$  arbitrarias. Las *tres* derivadas segundas de  $z$  sólo dependen de  $\varphi''$  y  $\psi''$ , que se pueden eliminar fácilmente, quedando la ecuación de D'Alembert  $t=a^2r$ .

Esta anomalía en la génesis de las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden deja muy imprecisa la noción de integral general de las mismas, aun tratándose de las lineales (sólo podemos usar este concepto en las *reducibles*) y es la causa de que no se puedan estudiar con aquella sencillez y generalidad con que se estudian las de primero.

Por otra parte, las condiciones complementarias que determinan soluciones particulares (condiciones iniciales y de contorno) tampoco son aquí tan precisas y uniformes como suelen serlo en las ecuaciones ordinarias o en las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden. Todo esto unido al hecho de ser la Física la que en definitiva impone las condiciones particulares que convienen a cada uno de los fenómenos estudiados, y elige las soluciones que mejor se acomodan a ellas, justifica el carácter un tanto

particular y casuístico que tiene el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden en los tratados de Matemática aplicada.

Con todo, en las ecuaciones de coeficientes constantes, todavía se pueden dar ciertos métodos más o menos generales para hallar soluciones, similares a los seguidos en las ecuaciones diferenciales ordinarias. El uso del operador derivada  $D$ , que en este caso se convertirá en operadores derivadas parciales  $D_x D_y$ , permitirá abreviar desarrollos y apreciar mejor la referida similitud.

**2. Definición y propiedades de las ecuaciones lineales.**—Se llaman lineales las ecuaciones que son de primer grado en las derivadas y en la propia función  $z$ .

Así, una ecuación lineal de segundo orden con dos variables independientes será de la forma

$$R \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + S \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + T \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + P \frac{\partial z}{\partial x} + Q \frac{\partial z}{\partial y} + Zz = F(x, y)$$

abreviadamente

$$Rr + Ss + Tt + Pp + Qq + Zz = F(x, y) \quad [1]$$

donde  $R, S, T, P, Q, Z, F$  son funciones de  $x, y$ .

También se puede escribir simbólicamente

$$(RD_x^2 + SD_x D_y + TD_y^2 + PD_x + QD_y + Z)z = F(x, y) \quad [2]$$

y abreviadamente

$$\Phi(D_x, D_y)z = F(x, y) \quad [3]$$

siendo  $\Phi(D_x, D_y)$  un polinomio simbólico con coeficientes funciones de  $x, y$ . Si  $F(x, y) \neq 0$  la ecuación [3] se llama *no homogénea* o *completa*. Pero si  $F(x, y) = 0$  la ecuación

$$\Phi(D_x, D_y)z = 0 \quad [4]$$

se llama *homogénea* o *incompleta*.

El operador  $\Phi(D_x, D_y)$  es lineal, es decir:

- I. Es permutable con todo factor constante  $\Phi(D_x, D_y)az = a\Phi(D_x, D_y)z$
- II. Es distributivo

$$\begin{aligned} \Phi(D_x, D_y)[z_1 + z_2] &= \Phi(D_x, D_y)z_1 + \Phi(D_x, D_y)z_2 \\ [\Phi_1 + \Phi_2]z &= \Phi_1 z + \Phi_2 z \end{aligned}$$

De estas propiedades resulta:

III. Si  $z_1, z_2, \dots, z_n$  son soluciones de la ecuación homogénea, también lo es  $C_1 z_1 + C_2 z_2 + \dots + C_n z_n$  ( $C_i$  arbitrarias).

IV. Si  $z$  es solución de la ecuación homogénea [4] y  $Z$  es solución de la no homogénea, la función  $z + Z$  es también solución de la no homogénea, pues

$$\Phi(D_x, D_y)(z + Z) = \Phi z + \Phi Z = 0 + F(x, y)$$

Estos teoremas, análogos a los de las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias, trazan asimismo caminos análogos de integración.

Las propiedades anteriores son ciertas, tanto si los coeficientes  $R, S, \dots$  son constantes como si son funciones de  $x, y$ ; pero en lo sucesivo vamos a ceñirnos a las ecuaciones de coeficientes constantes.

Si  $\Phi_1(D_x, D_y)$  y  $\Phi_2(D_x, D_y)$  son polinomios simbólicos de coeficientes constantes, es fácil probar que el operador  $\Phi_1(D_x, D_y)[\Phi_2(D_x, D_y)]$  coincide con el producto simbólico  $\Phi_1 \cdot \Phi_2$  y por tanto que puede alterarse el orden de aplicación de  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$ . Es decir, para los operadores lineales de coeficientes constantes son válidas las *propiedades asociativa y conmutativa*

$$\Phi_1[\Phi_2] = [\Phi_1 \cdot \Phi_2] = [\Phi_2 \cdot \Phi_1] = \Phi_2[\Phi_1]$$

y también es válida la propiedad *distributiva*

$$\Phi_1[\Phi_2 + \Phi_3] = [\Phi_1 \cdot \Phi_2] + [\Phi_1 \cdot \Phi_3]$$

En efecto, la multiplicación por factores constantes y las derivaciones respecto de las variables independientes son operaciones asociativas, conmutativas (Schwarz) y distributivas.

Ejemplo: Apliquemos el operador  $D_x - 3D_y$  a  $(D_x^2 - D_x D_y + 2)z$ . Resulta

$$\begin{aligned} (D_x - 3D_y)(D_x^2 - D_x D_y + 2)z &= (D_x^3 - D_x^2 D_y + 2D_x - 3D_y D_x^2 + 3D_y D_x D_y - 6D_y)z \\ &= (D_x^3 - 4D_x^2 D_y + 3D_x D_y^2 + 2D_x - 6D_y)z \end{aligned}$$

el mismo operador simbólico que se obtendrá aplicando  $D_x^2 - D_x D_y + 2$  a  $(D_x - 3D_y)z$ , es decir, multiplicando simbólicamente en otro orden.

NOTA. Las propiedades demostradas son válidas para operadores polinomios simbólicos, en derivadas parciales relativas a funciones de tres o más variables independientes,  $\Phi(D_x, D_y, D_z, \dots)$ , puesto que las leyes formales en que se apoyan (asociatividad, conmutabilidad, carácter distributivo de la derivación parcial) subsisten cualquiera que sea el número de dichas variables.

**3. Soluciones generales de las ecuaciones de coeficientes constantes homogéneas reducibles.**—Llamaremos *reducibles* aquellas ecuaciones cuyo operador primer miembro puede ser descompuesto en factores *lineales* o de *primer grado simbólico*, que significa *primer orden de derivación*. Son, en definitiva, aquellas ecuaciones cuyo primer miembro puede ser obtenido por aplicaciones sucesivas a la función  $z$  de operadores de la forma  $(aD_x + bD_y + c)$ .

Así, una ecuación lineal de dos variables de segundo orden, es reducible si puede escribirse en la forma

$$(a_1 D_x + b_1 D_y + c_1)(a_2 D_x + b_2 D_y + c_2)z = 0 \quad [1]$$

equivalente a  $(a_2 D_x + b_2 D_y + c_2)(a_1 D_x + b_1 D_y + c_1)z = 0$

La primera se satisface para

$$(a_2 D_x + b_2 D_y + c_2)z = 0 \quad \text{y la segunda para} \quad (a_1 D_x + b_1 D_y + c_1)z = 0$$

o sea

$$a_2 \frac{\partial z}{\partial x} + b_2 \frac{\partial z}{\partial y} + c_2 z = 0 \quad a_1 \frac{\partial z}{\partial x} + b_1 \frac{\partial z}{\partial y} + c_1 z = 0$$

ecuaciones diferenciales de primer orden que ya sabemos resolver. En particular, la primera da el sistema de características

$$\frac{dx}{a_2} = \frac{dy}{b_2} = -\frac{dz}{c_2 z} \quad a_2 y - b_2 x = k_1, \quad z = k_2 e^{-\frac{c_2}{a_2} x}$$

de donde la integral general  $z = e^{-\frac{c_2}{a_2} x} \varphi(a_2 y - b_2 x)$  en la que  $\varphi$  es una función arbitraria.

Análogamente la segunda da  $z = e^{-\frac{c_1}{a_1} x} \psi(a_1 y - b_1 x)$  y la solución general de la ecuación será

$$z = e^{-\frac{c_1}{a_1} x} \psi(a_1 y - b_1 x) + e^{-\frac{c_2}{a_2} x} \varphi(a_2 y - b_2 x)$$

Los factores exponenciales pueden ser igualmente  $e^{-\frac{c_1}{b_1} y}$ ,  $e^{-\frac{c_2}{b_2} y}$  (combinando las razones 2.<sup>a</sup> y 3.<sup>a</sup> del sistema que da las características). De los unos se pasa a los otros desglosando de la función arbitraria  $\psi$  el factor  $e^{-\frac{c_1}{b_1} y + \frac{c_1}{a_1} x} = e^{-\frac{c_1}{a_1 b_1} (a_1 y - b_1 x)}$  y el análogo en  $a_2, b_2, c_2$  de  $\varphi$ .

La llamamos solución general por cuanto la eliminación de las funciones  $\psi$  y  $\varphi$  restituye la ecuación dada. En efecto, aplicando a los dos miembros el operador  $a_1 D_x + b_1 D_y + c_1$  se anula el primer sumando y aplicando luego el operador  $a_2 D_x + b_2 D_y + c_2$  (y permutándolo con el anterior) se anula el segundo.

EJEMPLO 1.º Sea la ecuación de la cuerda vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (D_t^2 - a^2 D_x^2) u = 0$$

que se desdobra en

$$(D_t - a D_x) u = 0 \quad (D_t + a D_x) u = 0$$

y da lugar a la integral general

$$u = \varphi(x + at) + \psi(x - at)$$

$\varphi$  y  $\psi$  arbitrarias. Solución de D'Alembert.

$$\text{EJEMPLO 2.º } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial x} - 5 \frac{\partial z}{\partial y} - 2z = 0, \quad \text{es decir,}$$

$$(D_x D_y - 2D_y^2 + 2D_x - 5D_y - 2)z = 0 \quad \text{equivale a} \quad (D_x - 2D_y - 1)(D_y + 2)z = 0$$

que se satisface para

$$\frac{\partial z}{\partial y} + 2z = 0 \quad \frac{\partial z}{\partial x} - 2 \frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$$

cuyas soluciones respectivas son  $z = e^{-2y} \varphi(x)$ ,  $z = e^x \psi(y + 2x)$  dando por integral general  $z = e^{-2y} \varphi(x) + e^x \psi(y + 2x)$  donde  $\varphi$  y  $\psi$  son arbitrarias.

De un modo general, sea la ecuación de orden  $m$ .

$$\Phi(D_x D_y) \equiv (a_1 D_x + b_1 D_y + c_1)(a_2 D_x + b_2 D_y + c_2) \dots (a_m D_x + b_m D_y + c_m) z = 0 \quad [2]$$

Se satisface para las  $m$  ecuaciones

$$a_1 D_x + b_1 D_y + c_1 = 0 \quad a_2 D_x + b_2 D_y + c_2 = 0 \quad \dots \quad a_m D_x + b_m D_y + c_m = 0$$

cuyas soluciones son de la forma

$$e^{-\frac{c_i}{a_i} x} \varphi_i(a_i y - b_i x) \quad \text{o bien} \quad e^{-\frac{c_i}{b_i} y} \varphi_i(a_i y - b_i x) \quad [3]$$

y la solución general se expresará como suma de  $m$  sumandos de esta naturaleza con las  $m$  funciones arbitrarias  $\varphi_i$

$$z = \sum_{i=1}^m e^{-\frac{c_i}{a_i} x} \varphi_i(a_i y - b_i x) \quad \text{o bien} \quad z = \sum_{i=1}^m e^{-\frac{c_i}{b_i} y} \varphi_i(a_i y - b_i x) \quad [4]$$

Si hubiera factores simbólicos iguales (o de coeficientes proporcionales) la expresión obtenida tendría menos de  $m$  funciones arbitrarias esenciales. He aquí cómo se puede proceder en tal caso para restituir las  $m$  funciones arbitrarias.

Supongamos una ecuación del tipo

$$(a D_x + b D_y + c)(a D_x + b D_y + c) z = 0 \quad [5]$$

Poniendo  $(a D_x + b D_y + c)z = u$  esta función  $u$  deberá satisfacer

$$(a D_x + b D_y + c)u = 0 \quad \text{que da} \quad u = e^{-\frac{c}{a} x} \varphi_1(ay - bx) \quad [6]$$

de donde  $z$  deberá verificar

$$(a D_x + b D_y + c)z = e^{-\frac{c}{a} x} \varphi_1(ay - bx) \quad [7]$$

que se resuelve mediante el sistema

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{e^{-\frac{c}{a} x} \varphi_1(ay - bx) - cz} \quad [8]$$

De la primera ecuación resulta  $ay - bx = k_1$ .

Igualando la primera y la última razón después de sustituir  $ay - bx$  por  $k_1$ , queda la ecuación lineal

$$\frac{dz}{dx} + \frac{c}{a} z = \frac{1}{a} e^{-\frac{c}{a} x} \varphi_1(k_1)$$

cuya solución es (integral de la homogénea  $k_2 e^{-\frac{c}{a} x}$ ; integral particular de la no homogénea  $\frac{x}{a} e^{-\frac{c}{a} x} \varphi_1(k_1)$ )

$$z = e^{-\frac{c}{a} x} \left[ k_2 + \frac{x}{a} \varphi_1(k_1) \right] \quad [9]$$



Relacionando  $k_1$  y  $k_2$  con  $k_2 = \varphi_2(k_1)$ ,  $\varphi_2$  arbitraria, queda como solución de [7] y, por tanto, de [5]

$$z = e^{-\frac{c}{a}x} [x \varphi_1(ay - bx) + \varphi_2(ay - bx)] \quad [10]$$

ya que tan arbitraria es  $\varphi_1$  como  $\varphi_2 : a$ .

Esta solución supone  $a \neq 0$ . Si fuera  $a=0$  pero  $b \neq 0$  combinando la segunda y la tercera razón obtendríamos análogamente

$$z = e^{-\frac{c}{b}y} [y \varphi_1(ay - bx) + \varphi_2(ay - bx)] \quad [11]$$

El procedimiento se generaliza a ecuaciones con operadores primeros miembros de la forma

$$(aD_x + bD_y + c)^k z = 0$$

que dan

$$z = e^{-\frac{c}{a}x} [x^{k-1} \varphi_1(ay - bx) + x^{k-2} \varphi_2(ay - bx) + \dots + x \varphi_{k-1}(ay - bx) + \varphi_k(ay - bx)]$$

o bien la solución análoga con polinomio en  $y$

$$z = e^{-\frac{c}{b}y} [y^{k-1} \varphi_1(ay - bx) + \dots + \varphi_k(ay - bx)]$$

También se generaliza el método expuesto sin dificultad a ecuaciones lineales con más de dos variables independientes, teniendo en cuenta lo dicho al final del § 2 y la integración de las ecuaciones en derivadas parciales lineales correspondientes, según se indicó en la lección 21.

Aplicando este mismo método de reducción sucesiva a las ecuaciones [2] con operadores factores lineales desiguales se obtiene nuevamente la solución [4].

**4. Soluciones particulares de las ecuaciones homogéneas de coeficientes constantes.**— Si el operador primer miembro no puede reducirse a factores lineales, ya no resulta, en general, posible hallar soluciones tan generales. Pero lo mismo en estas ecuaciones que en las reducibles podemos hallar muy fácilmente soluciones particulares de tipo exponencial.

Los términos de la ecuación

$$\Phi(D_x, D_y)z = 0 \quad [1]$$

son de la forma  $a_{ij} D_x^i D_y^j$ . Por analogía con lo hecho para las ecuaciones diferenciales ordinarias (una variable independiente), en las que ensayábamos soluciones de la forma  $e^{\alpha x}$ , ensayemos ahora soluciones de la forma  $e^{\alpha x + \beta y}$ ; puesto que esta exponencial se reproduce por derivación dando

$$a_{ij} D_x^i D_y^j e^{\alpha x + \beta y} = a_{ij} \alpha^i \beta^j e^{\alpha x + \beta y}$$

se tendrá

$$\Phi(D_x, D_y) e^{\alpha x + \beta y} = e^{\alpha x + \beta y} \Phi(\alpha, \beta) \quad [2]$$

Por consiguiente, obtendremos tantas soluciones de la ecuación [1] de la forma  $e^{\alpha x + \beta y}$  cuantos sean los pares de valores  $\alpha, \beta$  que verifiquen

$$\Phi(\alpha, \beta) = 0 \quad [3]$$

En general, habrá una infinidad de soluciones de la naturaleza indicada. Y si en lugar de ser dos las variables independientes, son tres o más  $\Phi(D_x, D_y, D_z, \dots)u = 0$  obtendremos soluciones de la forma  $e^{\alpha x + \beta y + \gamma z + \dots}$  para todo conjunto de valores de  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  que verifique  $\Phi(\alpha, \beta, \gamma, \dots) = 0$ .

Ejemplo: Sea la llamada *ecuación de los telegrafistas*, que regula las variaciones de tensión  $u$  a lo largo de una línea de transmisión, en función del tiempo  $t$  y de la distancia  $x$  a un extremo de la línea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = cl \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (rc + lg) \frac{\partial u}{\partial t} + rgu \quad \text{o sea} \quad (cl D_t^2 + (rc + lg) D_t + rg - D_x^2) u = 0$$

En ella  $r, l, c, g$  son constantes positivas ( $g$ , en general, muy pequeña).

Ensayando soluciones de la forma  $e^{\alpha t + \beta x}$  resulta que  $\alpha$  y  $\beta$  deben satisfacer la ecuación

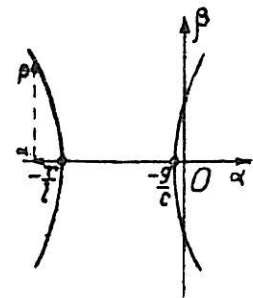
$$cla^2 + (rc + lg)\alpha + rg - \beta^2 = 0 \quad \text{o bien} \quad (la + r)(ca + g) = \beta^2$$

Los pares de valores de  $\alpha, \beta$  que satisfacen a esta ecuación (coordenadas de los puntos de una hipérbola si son reales) darán infinitas soluciones de la ecuación

Los puntos *reales*, que se obtendrán dando valores a  $\alpha$  menores que  $-\frac{r}{l}$  o mayores que  $-\frac{g}{c}$  proporcionan valores de  $\beta$

iguales y opuestos y tendremos soluciones de la forma aperiódica

$$Ae^{\alpha t + \beta x} + Be^{\alpha t - \beta x} \quad \text{o bien} \quad e^{\alpha t} [M \text{Ch } \beta x + N \text{Sh } \beta x]$$



Pero más interés tienen para el electrotécnico las soluciones que se obtienen dando a  $\alpha$  valores complejos de la forma  $\alpha = -\delta + i\omega$ , a cada uno de los cuales corresponden dos valores de  $\beta$  opuestos  $\beta = \pm(\mu + \nu i)$ . Por tanto, se podrán agrupar las soluciones a pares en la siguiente forma

$$Ae^{(-\delta + i\omega)t + (\mu + \nu i)x} + Be^{(-\delta + i\omega)t - (\mu + \nu i)x}$$

En términos reales se obtienen pares de soluciones periódicamente progresivas en  $x$  y en  $t$  (amortiguadas) de la forma

$$Me^{-\delta t + \mu x} \cos(\omega t + \nu x + \varphi), \quad Ne^{-\delta t - \mu x} \cos(\omega t - \nu x + \varphi)$$

que se interpretan, según veremos más adelante, como pares de *ondas* que recorren la línea en los dos sentidos, directo y reflejado.

**5. El problema de la adaptación a las condiciones iniciales y de contorno. Valores propios y funciones propias.**—Una vez obtenidas las soluciones matemáticas de tipo particular que satisfacen la ecuación diferencial, el físico matemático tiene que resolver aún una cuestión con frecuencia de mucha mayor dificultad: la de *seleccionar y combinar* adecuadamente estas soluciones hasta conseguir la que se adapte a las condiciones iniciales y de contorno de cada caso concreto

Por ejemplo, en el estudio del régimen de tensiones (o intensidades) de una línea de transmisión no basta con haber hallado la forma matemática de las soluciones posibles de la ecuación de los telegrafistas; hace falta:

1.º Averiguar para qué valores de los parámetros introducidos en el cálculo ( $\alpha$ ,  $\beta$ , o bien  $\delta$ ,  $\omega$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ ) son posibles las condiciones fijadas en los extremos de la línea (extremos en vacío, en corto, acoplados a impedancias conocidas, etc.). Estas condiciones establecen una *selección de valores* posibles de dichos parámetros (*valores propios* o *autovalores* del problema) y de las correspondientes soluciones (*funciones propias* o *autofunciones*).

2.º Combinar linealmente estas soluciones hasta conseguir la que se adapte a la distribución inicial de tensiones a lo largo de la línea.

Y lo dicho para la ecuación de los telegrafistas puede repetirse, con las alteraciones debidas, para los restantes tipos de problemas físicomatemáticos análogos, que conducen a ecuaciones en derivadas parciales lineales, algunos de los cuales estudiaremos con cierto detenimiento en próximas lecciones. Volviendo, pues, a la ecuación [1] del párrafo anterior, nos limitaremos a hacer aquí las siguientes indicaciones generales:

I. Si el conjunto de *valores propios* de  $\alpha\beta$  es una sucesión numerable  $\alpha_1\beta_1$ ,  $\alpha_2\beta_2$ ,  $\alpha_3\beta_3$ , ... se procura conseguir la adaptación mediante una suma o una serie uniformemente convergente de soluciones propias de la forma

$$z = \sum C_i e^{\alpha_i x + \beta_i y}$$

En el caso de ser  $\alpha$  ó  $\beta$  imaginarias se obtienen series de términos trigonométricos, muy frecuentes en las soluciones de muchas cuestiones de la Física matemática, de modo que el mencionado problema de adaptación a las condiciones iniciales es un problema de análisis armónico.

II. Si el conjunto de valores propios es continuo se pueden ensayar soluciones en forma de integral (paso al límite continuo) de la forma

$$z = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \varphi(\alpha) e^{\alpha x + \beta(\alpha) y} d\alpha$$

en donde  $\varphi(\alpha)$  desempeña el papel de la sucesión de constantes  $C_i$  de la serie, y en la que  $\beta(\alpha)$  se supone despejada de [3]. Derivando esta integral con respecto a  $x$  e  $y$ , consideradas como parámetros, se comprueba, en efecto, que esta función satisface la ecuación diferencial, puesto que al sustituir en [1] resulta

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \varphi(\alpha) \Phi(D_x, D_y) e^{\alpha x + \beta y} d\alpha = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \varphi(\alpha) e^{\alpha x + \beta y} \Phi(\alpha, \beta) d\alpha = 0$$

que se anula idénticamente al suponer sustituida  $\beta$  por  $\beta(\alpha)$  deducida de [3].

**6. Método de separación de variables.**—Puesto que las soluciones de la ecuación homogénea de segundo orden y coeficientes constantes que hemos hallado son de la forma  $e^{\alpha x + \beta y} = e^{\alpha x} e^{\beta y}$ , que es un producto de una función de  $x$  por otra de  $y$ , podemos proponernos investigar directamente soluciones de la ecuación, en la que supondremos ahora nulo el término en  $D_x D_y$  (\*),

$$(aD_x^2 + bD_y^2 + cD_x + dD_y + f)u = 0 \quad [1]$$

que sean de la forma  $u = X(x) \cdot Y(y)$ . Este procedimiento es el predilecto de los físicos por la considerable fecundidad que ha demostrado tener en los problemas usuales de la física matemática.

Calculando las derivadas, resulta:

$$\begin{aligned} D_x u &= YX' & D_y u &= XY' \\ D_x^2 u &= YX'' & D_y^2 u &= XY'' \end{aligned}$$

La ecuación [1] se transformará en

$$aYX'' + bXY'' + cYX' + dXY' + fXY = 0$$

Al dividir por el producto  $XY$  quedan términos que sólo dependen de  $X$  y otros sólo de  $Y$ ; separándolos resulta:

$$a \frac{X''}{X} + c \frac{X'}{X} + f = -b \frac{Y''}{Y} - d \frac{Y'}{Y}$$

Como el primer miembro no depende de  $y$  y el segundo no depende de  $x$ , la igualdad únicamente puede verificarse siendo ambos miembros iguales a una constante  $\lambda$ , y el problema se reduce a *dos ecuaciones diferenciales ordinarias*

$$\begin{aligned} aX'' + cX' + (f - \lambda)X &= 0 \\ bY'' + dY' + \lambda Y &= 0 \end{aligned}$$

El parámetro arbitrario  $\lambda$  introducido, puede tomar generalmente infinidad de valores (autovalores) impuestos por las condiciones físicas llamadas de *contorno*, como veremos más adelante.

Ejemplo 1.º Apliquemos el método a la ecuación de la cuerda vibrante antes tratada

$$(D_t^2 - a^2 D_x^2)u = 0$$

ensayando soluciones de la forma  $w = X(x)T(t)$ , las funciones  $X$  y  $T$  habrán de satisfacer la ecuación

$$\frac{T''}{T} = a^2 \frac{X''}{X}$$

(\*) Veremos más adelante la posibilidad de conseguir esta convenientemente las variables independientes.

que se desdobra en dos

$$T'' - \lambda T = 0, \quad a^2 X'' - \lambda X = 0$$

que admiten, respectivamente, las soluciones generales

$$T = A \operatorname{Sh}(V\bar{\lambda}t + \tau) \quad X = M \operatorname{Sh}\left(\frac{V\bar{\lambda}}{a}x + \varphi\right) \quad \text{si } \lambda > 0$$

$$T = A \operatorname{sen}(V\bar{\lambda}'t + \tau) \quad X = M \operatorname{sen}\left(\frac{V\bar{\lambda}'}{a}x + \varphi\right) \quad \text{si } \lambda = -\lambda' < 0$$

Este parámetro introducido  $\lambda$  viene condicionado por la naturaleza física del problema. El carácter vibratorio del fenómeno sólo aparece en la hipótesis  $\lambda < 0$  y, por tanto, la ecuación dada admitirá soluciones vibratorias de la forma

$$u = C \operatorname{sen}(V\bar{\lambda}'t + \tau) \operatorname{sen}\left(\frac{V\bar{\lambda}'}{a}x + \varphi\right)$$

cuya interpretación estudiaremos oportunamente.

Ejemplo 2.º Apliquemos el método a la ecuación de los telegrafistas

$$(cl D_t^2 + (rc + lg)D_t + rg - D_x^2)u = 0$$

Buscando soluciones de ella de la forma  $u = X(x) \cdot T(t)$  se llega como antes a la ecuación

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{T} [clT'' + (rc + lg)T' + rg] (= \lambda)$$

que se desdobra en

$$X'' - \lambda X = 0, \quad cl T'' + (rc + lg)T' + (rg - \lambda)T = 0$$

La primera tiene soluciones de la forma  $X = Ae^{\pm V\bar{\lambda}x}$ , la segunda de la forma  $T = Me^{ht}$ , siendo  $h$  raíz de la ecuación

$$cl h^2 + (rc + lg)h + rg - \lambda = 0$$

Relación entre  $h$  y  $\lambda$ , que es la misma obtenida entre  $\alpha$  y  $\beta^2$  por el procedimiento del párrafo anterior.

El procedimiento se generaliza sin dificultad a ecuaciones homogéneas de tres variables independientes  $x, y, z$  [para las que se busca soluciones de la forma  $X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$ ] y a mayor número de ellas.

V. ejercicios al final de la lección siguiente

LECCIÓN 25.—ECUACIONES LINEALES COMPLETAS DE COEFICIENTES  
CONSTANTES

1. **Ecuaciones completas con el primer miembro reducible.**—Como se ha dicho en la lección anterior, las ecuaciones completas son de la forma (para dos variables)

$$\Phi(D_x, D_y)z = F(x, y) \quad [1]$$

Según sabemos, las soluciones se expresarán sumando a las integrales de la ecuación homogénea, calculada como hemos indicado en la lección anterior, una *integral particular de la no homogénea* [1]. La obtención de esta integral particular se logra en la práctica mediante reglas casuísticas dependientes de la forma de  $F(x, y)$ .

No obstante, si el primer miembro es *reducible*, la integración se consigue directamente por una sucesión de integraciones de ecuaciones de primer orden, como vamos a ver. Sea por ejemplo la ecuación de tercer orden

$$(a_1 D_x + b_1 D_y + c_1)(a_2 D_x + b_2 D_y + c_2)(a_3 D_x + b_3 D_y + c_3)z = F(x, y) \quad [2]$$

Pongamos

$$(a_2 D_x + b_2 D_y + c_2)(a_3 D_x + b_3 D_y + c_3)z = u \quad [3]$$

y quedará la ecuación de primer orden en  $u$

$$(a_1 D_x + b_1 D_y + c_1)u = F(x, y) \quad [4]$$

de la que nos bastará hallar una *integral particular*  $u_1(x, y)$ . Sustituída en [3] tendremos la ecuación en  $z$ , con el orden rebajado

$$(a_2 D_x + b_2 D_y + c_2)(a_3 D_x + b_3 D_y + c_3)z = u_1(x, y) \quad [5]$$

Reiteremos el procedimiento designando análogamente

$$(a_3 D_x + b_3 D_y + c_3)z = v \quad [6]$$

y queda la ecuación en  $v$  de primer orden

$$(a_2 D_x + b_2 D_y + c_2)v = u_1(x, y) \quad [7]$$

de la que hallaremos una solución particular  $v_1(x, y)$ . Finalmente, sustituyendo en [6] hallaremos  $z$  resolviendo la ecuación de primer orden

$$(a_3 D_x + b_3 D_y + c_3)z = v_1(x, y) \quad [8]$$

Como se comprende el procedimiento es generalizable a ecuaciones lineales de un orden cualquiera y de cualquier número de variables.



EJEMPLO: Sea la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = 4 x e^{-2y}$$

es decir

$$(D_x^2 - 2 D_x D_y + D_y^2 - 2 D_x + 2 D_y)z = 4 x e^{-2y}$$

que es reducible, por cuanto puede escribirse

$$(D_x - D_y)(D_x - D_y - 2)z = 4 x e^{-2y}$$

Poniendo  $(D_x - D_y - 2)z = u$  empezaremos resolviendo la ecuación en  $u$  lineal de primer orden

$$(D_x - D_y)u = 4 e^{-2y} x \quad \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 4 e^{-2y} x$$

que da el sistema de características

$$dx = -dy = \frac{du}{4 x e^{-2y}}$$

$$x + y = k_1, \quad du = -4 x e^{-2y} dy = 4 (y - k_1) e^{-2y} dy, \quad u = 4 \int (y - k_1) e^{-2y} dy + k_2$$

Como nos basta una integral particular, podemos tomar  $k_2 = 0$ , e integrando por partes

$$u = -2 (y - k_1) e^{-2y} + 2 \int e^{-2y} dy = 2 x e^{-2y} - e^{-2y}$$

Sustituyendo en la ecuación de transformación

$$(D_x - D_y - 2)z = 2 x e^{-2y} - e^{-2y}$$

que da a su vez el sistema de características

$$dx = -dy = \frac{dz}{2 x e^{-2y} - e^{-2y} + 2z}$$

$$x + y = C_1, \quad \frac{dz}{dy} + 2z = 2 (y - C_1) e^{-2y} + e^{-2y}$$

ecuación lineal de la que bastará asimismo hallar una integral particular

$$z = e^{-2y} [y^2 - 2 k_1 y + y]$$

o sea

$$z = e^{-2y} [y^2 - 2 (x + y) y + y] = e^{-2y} [y - 2 xy - y^2]$$

Recordando ahora la expresión de la integral general de las ecuaciones homogéneas, obtenida en el §. 3 de la lección anterior, podemos escribir como integral general de la ecuación de que se trata

$$z = \varphi_1 (y + x) + e^{2x} \varphi_2 (y + x) + e^{-2y} [y - 2 xy - y^2]$$

En los casos más sencillos de segundo miembro exponencial, trigonométrico, o polinómico entero, es preferible el método de tanteo de soluciones particulares que se expone a continuación para las ecuaciones de primer miembro irreducible.

**2. Ecuaciones completas con el primer miembro irreducible.**—En este caso no es aplicable el método anterior y se preconizan distintos tanteos (análogos a los practicados en la lección 9.<sup>a</sup> para las ecuaciones diferenciales

les lineales ordinarias) para determinar soluciones particulares, métodos que, como se ha dicho, son igualmente aplicables a las ecuaciones reducibles. Así:

I. Si el segundo miembro es de la forma  $ke^{\alpha x + \beta y}$ , se ensayarán soluciones de la misma forma  $Ce^{\alpha x + \beta y}$ . El coeficiente  $C$  se determina fácilmente por verificarse, al sustituir en la ecuación,

$$\Phi(D_x, D_y) Ce^{\alpha x + \beta y} \equiv Ce^{\alpha x + \beta y} \Phi(\alpha, \beta) = ke^{\alpha x + \beta y}$$

de donde

$$C = \frac{k}{\Phi(\alpha, \beta)}$$

EJEMPLO: La ecuación  $(D_x^2 - 2D_y)z = e^{3x-y}$  admite la solución particular  $Ce^{3x-y}$  en que  $C=1 : (9-2)=1 : 11$ .

Si  $\Phi(\alpha, \beta)=0$  no es válido el anterior ensayo. Ocurre entonces que  $e^{\alpha x + \beta y}$  es solución de la ecuación homogénea (v. lec. 24, § 4). En estos casos se ensayan soluciones de la forma  $Cxe^{\alpha x + \beta y}$  o bien  $Cye^{\alpha x + \beta y}$ . Considerando  $\alpha$  parámetro variable se tendrá (lec. 24, § 2):

$$\begin{aligned} \Phi(D_x, D_y) xe^{\alpha x + \beta y} &\equiv \Phi(D_x, D_y) D_\alpha e^{\alpha x + \beta y} \equiv D_\alpha \Phi(D_x, D_y) e^{\alpha x + \beta y} \equiv \\ &\equiv D_\alpha e^{\alpha x + \beta y} \Phi(\alpha, \beta) \equiv e^{\alpha x + \beta y} [x \Phi(\alpha, \beta) + \Phi'_\alpha(\alpha, \beta)] \end{aligned}$$

Si para el valor particular de  $\alpha$  considerado es  $\Phi(\alpha, \beta)=0$ , pero  $\Phi'_\alpha \neq 0$  el ensayo de  $Cxe^{\alpha x + \beta y}$  conducirá a la igualdad

$$Ce^{\alpha x + \beta y} \Phi'_\alpha(\alpha, \beta) = ke^{\alpha x + \beta y} \quad \text{de donde} \quad C = \frac{k}{\Phi'_\alpha(\alpha, \beta)}$$

Si fuese también  $\Phi'_\alpha=0$  se ensayará  $Cye^{\alpha x + \beta y}$  que dará  $C=k : \Phi'_\beta(\alpha, \beta)$ . Si también  $\Phi'_\beta=0$  habría que ensayar  $x^2e^{\alpha x + \beta y}$  o bien  $y^2e^{\alpha x + \beta y}$  etc.

EJEMPLO:  $(4D_x^2 + D_y^2 - 8D_x)z = 3e^{x+2y}$ .

En este ejemplo  $\alpha=1, \beta=2$  anulan  $\Phi(\alpha, \beta)=4\alpha^2 + \beta^2 - 8\alpha$  así como  $\Phi'_\alpha=8\alpha-8$ , pero no anulan  $\Phi'_\beta=2\beta$ . Tendremos, pues, una solución particular de la forma  $Cye^{x+2y}$  en la que  $C=3 : \Phi'_\beta=3 : 4$ . Compruebe el lector como efectivamente  $z = \frac{3}{4} ye^{x+2y}$  satisface la ecuación.

II. Si el segundo miembro es de la forma  $m \sin(\alpha x + \beta y) + n \cos(\alpha x + \beta y)$ .

Se trata en el fondo de una combinación de exponenciales imaginarias y se comprende, por el apartado anterior, que convendrá ensayar en este caso soluciones de tipo análogo  $k \sin(\alpha x + \beta y) + l \cos(\alpha x + \beta y)$ .

EJEMPLO: Ensayando en la ecuación  $(D_x^2 - 2D_y)z = \sin(3x-y)$  soluciones del tipo  $z = k \sin(3x-y) + l \cos(3x-y)$  se obtiene

$$\Phi(D_x, D_y)z = (-9k - 2l) \sin(3x-y) + (-9l + 2k) \cos(3x-y)$$

Identificándolo a  $\text{sen}(3x-y)$  resulta el sistema en  $k, l$

$$\left. \begin{array}{l} 9k + 2l = -1 \\ -9l + 2k = 0 \end{array} \right\} \text{ de donde } l = -2/85 \quad k = -9/85$$

y la solución particular buscada es  $z = -\frac{9}{85} \text{sen}(3x-y) - \frac{2}{85} \cos(3x-y)$ .

Por lo dicho antes, se comprende que el método falla si  $\Phi(i\alpha, i\beta) = 0$ , acudiéndose entonces a soluciones en forma de producto de las anteriores por  $x$  o  $y$  como para los exponenciales.

EJEMPLO:  $(D_x^2 + D_y^2 + 2)z = \cos(x+y)$ .

Si ensayásemos  $z = k \cos(x+y) + l \text{sen}(x+y)$  llegaríamos al absurdo  $0 = \cos(x+y)$  por ser el segundo miembro (lo mismo que  $\text{sen}(x+y)$ ) solución de la ecuación homogénea  $(D_x^2 + D_y^2 + 2)z = 0$ . Ensayemos  $z = kx \cos(x+y) + lx \text{sen}(x+y)$  y queda

$$2l \cos(x+y) - 2k \text{sen}(x+y) = \cos(x+y) \quad \text{de donde } k = 0 \quad l = \frac{1}{2}$$

y la solución particular buscada es  $z = \frac{1}{2} x \text{sen}(x+y)$ .

III. Si el segundo miembro es un polinomio entero en  $x, y$ , como las derivadas parciales son también polinomios, se comprende la procedencia de ensayar soluciones polinómicas del mismo grado que el segundo miembro si existe en el primer miembro el término en la función  $z$ , y de grado más elevado si falta la función, o ésta y algunas de sus primeras derivadas. En la mayor parte de los casos no hará falta ensayar polinomios completos, pues la misma inspección de la ecuación permitirá de antemano prever los términos nulos.

EJEMPLO: En la ecuación  $(D_x D_y - 2D_x + 1)z = x^2 y$   
ensayaremos  $z = ax^2 y + bxy + dx + ey + g$ .

(Se prevé la inutilidad de añadir el término en  $x^2$ , en  $y^2$  y en  $xy^2$ , que no tendrían reducción posible.)

Derivando y sustituyendo, resulta:

$$2ax + b - 2(2axy + by + d) + ax^2 y + bxy + dx + ey + g = x^2 y$$

de donde

$$\begin{array}{l} a = 1, \quad b - 4a = 0, \quad d + 2a = 0, \quad e - 2b = 0, \quad g - 2d + b = 0 \\ a = 1, \quad b = 4, \quad d = -2, \quad e = 8, \quad g = -8 \end{array}$$

obteniendo la solución particular

$$z = x^2 y + 4xy - 2x + 8y - 8 = 0$$

IV. Los segundos miembros de la forma  $x^m y^n e^{\alpha x + \beta y}$  se pueden reducir al caso III aplicando la regla de transposición del factor exponencial

$$D_x e^{\alpha x + \beta y} f(x, y) = e^{\alpha x + \beta y} [D_x f + \alpha f] = e^{\alpha x + \beta y} [D_x + \alpha] f$$

y análogamente

$$D_y e^{\alpha x + \beta y} f(x, y) = e^{\alpha x + \beta y} [D_y + \beta] f$$

de donde, por aplicaciones reiteradas de estas transposiciones, resulta

$$\Phi(D_x, D_y) e^{\alpha x + \beta y} f(x, y) = e^{\alpha x + \beta y} \Phi(D_x + \alpha, D_y + \beta) f(x, y)$$

De esta regla se desprende que las soluciones de

$$\Phi(D_x, D_y) z = x^m y^n e^{\alpha x + \beta y}$$

serán la de

$$\Phi(D_x + \alpha, D_y + \beta) \zeta = x^m y^n$$

multiplicadas por  $e^{\alpha x + \beta y}$

Pues si  $\zeta$  cumple esta última, multiplicando ambos miembros por  $e^{\alpha x + \beta y}$  resulta

$$e^{\alpha x + \beta y} \Phi(D_x + \alpha, D_y + \beta) \zeta = \Phi(D_x, D_y) \zeta e^{\alpha x + \beta y} = x^m y^n e^{\alpha x + \beta y}$$

Este mismo cambio reduce la ecuación  $\Phi(D_x, D_y) z = k e^{\alpha x + \beta y}$  estudiada en el apartado I, a la  $\Phi(D_x + \alpha, D_y + \beta) \zeta = k$ , que se resuelve por tanteo inmediato.

**EJEMPLO 1.º** Las soluciones de la ecuación  $(D_x D_y - D_y + 1)z = x^2 y e^{x-2y}$  son las de  $\{(D_x + 1)(D_y - 2) - (D_y - 2) + 1\} \zeta = x^2 y$  multiplicadas por  $e^{x-2y}$ . Pero el operador entre corchetes es  $D_x D_y - 2D_x + 1$  y la ecuación

$$(D_x D_y - 2D_x + 1) \zeta = x^2 y$$

tiene la solución particular hallada en el ejemplo anterior.

La ecuación dada admitirá la solución particular

$$z = (x^2 y + 4xy - 2x + 8y - 8)e^{x-2y}$$

**EJEMPLO 2.º** La ecuación  $(D_x^2 - 2D_y)z = e^{3x-y}$  resuelta en el apartado I, puede transformarse en

$$[(D_x - 3)^2 - 2(D_y - 1)] \zeta = 1 \quad \text{o sea} \quad [D_x^2 - 6D_x - 2D_y + 11] \zeta = 1$$

que se satisface evidentemente para  $\zeta = 1/11$ , y da la misma solución  $z = \zeta e^{3x-y} = \frac{1}{11} e^{3x-y}$  obtenido en el ejemplo de dicho apartado I.

V. Finalmente, si el segundo miembro es suma de términos de la forma indicada en I, II y III se obtendrá una solución particular sumando las soluciones particulares correspondientes a cada uno de los términos (propiedad distributiva del operador).

## EJERCICIOS

Hallar la integral general de cada una de las ecuaciones reducibles siguientes

1.  $(3 D_x^2 - 13 D_x D_y + 4 D_y^2)z = 0$ .
2.  $(2 D_x^2 - 3 D_x D_y - 2 D_y^2)z = 0$ .
3.  $(3 D_x^2 D_y - 4 D_x D_y^2)z = 0$ .
4.  $(4 D_x^4 + 4 D_x^3 D_y + D_x^2 D_y^2)z = 0$ .
5.  $(7 D_x D_y^3 - D_y^4)z = 0$ .
6. Hallar la función  $z(x, y)$  que satisface a la ecuación  $z_{xx} - z_{yy} = 0$  y que para  $y = 0$  da  $z = 6x^2$ ,  $z_y = 6x^2 + 6$ .
7. Hallar la función  $z(x, y)$  que satisface la ecuación  $D_x(D_x^2 - 4 D_y^2)z = 0$  y que para  $x = 0$  da  $z = 8y^2$ ,  $z_x = 0$ ,  $z_{xx} = 16$ .
8. Tipos de soluciones que satisfacen a la ecuación  $p + 3t = 0$ .
9. Idem id. a la ecuación  $(D_x^3 + D_y)z = 0$ .
10. Idem id.  $(D_x^2 + D_y^4)z = 0$ .
11. Idem id.  $z_{xx} + z_{yy} + z = 0$ .
12. Idem id.  $(D_x^3 - 8 D_y^2)z = 0$ .
13. Aplicar el método de separación de variables a la ecuación  $2z_{xx} - z_y = 0$ .
14. Idem id. a la ecuación  $z_{xx} - z_{yy} - 2z_y = 0$ . Tipos de soluciones según los valores y signos del parámetro  $\lambda$  introducido en el proceso de separación (v § 6 de la lección anterior).
15. Idem id. para la ecuación  $r - t + 4p - 6q = 0$ .

Integrar las ecuaciones completas siguientes:

16.  $(D_x^2 D_y - D_x D_y^2 + D_x D_y)z = 1$ .
17.  $z_{xx} - z_{yy} + 4z_y - 4z = 4x(1 - y)$ .
18.  $(D_x + D_y + 1)(D_x - D_y)z = 3x^2 + 2y - 4$ .
19.  $(D_x + D_y)(D_x + 4)z = 24xy$ .
20.  $2z_{xx} - z_y = 3x - y^2 + 2x^2y$ .
21.  $2r - q = 4e^{x+2y} + 10e^{x-3y}$ .
22.  $z_{xx} - z_{yy} + z_x - z_y = 2e^{x+2y} - 3 \operatorname{sen}(2x - y)$ .
23.  $(D_x - D_y - 2)(D_x - 2 D_y - 4)z = 96xye^{-2y}$ .
24.  $r - 3s + 2t - p + 2q = (2 + 4x)e^{-y}$ .
25.  $z_{xx} - z_{xy} - 2z_x - 3z_y = xy^2e^{x-y}$ .
26. Demostrar que toda ecuación en derivadas parciales con dos variables cuyos términos tengan todos el mismo orden de derivación es reducible.
27. Probar que su integral general puede ponerse en la forma  $z = \sum \varphi_i(y + \mu_i x)$  si  $\mu_i$  son las raíces de  $\Phi(\mu, 1) = 0$ .
28. Solución análoga de la forma  $z = \sum \psi_k(x + \nu_k y)$ .  
Relación entre las raíces  $\mu_i$  y las  $\nu_k$ .
29. Aplicación a la ecuación  $z_{xx} + z_{xy} - 2z_{yy} = 0$ .
30. Idem a la ecuación  $D_x(D_x^2 - D_x D_y - 2D_y^2)z = 0$ .
31. Hallar la ecuación de la superficie que satisface la ecuación diferencial  $r6s + 9t = 0$  y que contiene la recta  $x = 0$ ,  $y = z$  y la parábola  $y = 0$ ,  $z = 3x^2$ .
32. Superficie que satisface la ecuación  $r - 3s + 2t = 8$  y que contiene el eje  $y$  y la parábola  $x + y = 0$ ,  $z = 4x^2$ .
33. Superficie que satisface la ecuación  $s - 2t = 0$  y tangente al paraboloides  $z = x^2 - 2y^2$  a lo largo de la sección producida en él por el plano  $y = 2x - 2$ .
34. Superficie que satisface la ecuación  $r + s - 2t = 0$  y que es tangente al paraboloides  $z = 2x^2 + 2y^2 - 1$  a lo largo de su sección con el plano  $y = x$ .
35. Hallar las cuádricas que satisfacen a la ecuación  $s - 2xt = 0$ .

(Varios de estos enunciados han sido tomados de la obra de *Miller*, «Partial differential Equations».)

(\*) Hacemos deliberadamente uso de distintas notaciones (la inglesa con los operadores  $D_x$ ,  $D_y$ ; la francesa  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $s$ ,  $t$ ; y la alemana  $z_x$ ,  $z_y$ ,  $z_{xx}$ , etc.) con objeto de que el alumno se habitúe a ellas.

## LECCIÓN 26.—ECUACIONES LINEALES DE COEFICIENTES VARIABLES

Como ocurre con las ecuaciones lineales ordinarias, cuando los coeficientes de una ecuación lineal en derivadas parciales de orden superior al primero son variables, ya no se conocen métodos generales para hallar soluciones. Se exceptúan algunos tipos muy particulares a los que vamos a pasar rápida revista.

**1. Ecuaciones análogas a las de Euler.**—Son aquellos cuyos coeficientes son monomios enteros en las variables de exponentes iguales a los órdenes de derivación respecto de las variables respectivas, es decir, para dos variables el primer miembro es de la forma

$$\Sigma c_{mn} x^m y^n D_x^m D_y^n z \quad [1]$$

Como en las ecuaciones diferenciales ordinarias, se efectúa en estas ecuaciones el cambio de variables independientes

$$x = e^u \quad y = e^v \quad u = lx \quad v = ly$$

del que resulta

$$D_x z = \frac{1}{x} D_u z \quad D_y z = \frac{1}{y} D_v z$$

$$D_x^2 z = \frac{1}{x^2} D_u^2 z - \frac{1}{x^2} D_u z = \frac{1}{x^2} D_u (D_u - 1) z, \quad D_y^2 z = \frac{1}{y^2} D_v (D_v - 1) z$$

$$D_x D_y z = \frac{1}{xy} D_u D_v z$$

Análogamente

$$D_x^3 z = \frac{1}{x^3} D_u^3 (D_u - 1) z - \frac{2}{x^3} D_u (D_u - 1) z = \frac{1}{x^3} D_u (D_u - 1) (D_u - 2) z$$

$$D_y D_x^2 z = \frac{1}{x^2 y} D_u (D_u - 1) D_v z$$

$$D_y^3 D_x^2 z = \frac{1}{x^2 y^3} D_v D_u (D_u - 1) D_v z - \frac{1}{x^2 y^2} D_u (D_u - 1) D_v z = \frac{1}{x^2 y^2} D_u (D_u - 1) D_v (D_v - 1) z$$

y en general

$$D_x^m D_y^n z = \frac{1}{x^m y^n} D_u (D_u - 1) (D_u - 2) \dots (D_u - m + 1) D_v (D_v - 1) \dots (D_v - n + 1) z$$

Al sustituir en [1] desaparecen los coeficientes monomios en  $xy$ , y la ecuación se transforma en otra de coeficientes constantes.



EJEMPLO: La ecuación

$$(x^2 D_x^2 - 2xy D_x D_y + y^2 D_y^2 - x D_x + 3y D_y) z = 4 \frac{lx}{y^2}$$

se transforma mediante  $x=e^u$ ,  $y=e^v$  en

$$[D_u(D_u - 1) - 2D_u D_v + D_v(D_v - 1) - D_u + 3D_v] z = 4ue^{-2v}$$

o bien

$$(D_u^2 - 2D_u D_v + D_v^2 - 2D_u + 2D_v) z = 4ue^{-2v}$$

de coeficientes constantes, que tiene la solución general (v. lecc. 25, § 1)

$$z = \varphi_1(v+u) + e^{2u} \varphi_2(v+u) + e^{-2v}(v - 2uv - v^2)$$

y restituyendo las variables primeras  $x, y$ , teniendo en cuenta que  $v+u=1 \cdot xy$ , y que una función arbitraria  $\varphi_1(1 \cdot xy)$  es función arbitraria del producto  $xy$  que podemos designar  $\psi_1(xy)$  resulta

$$z = \psi_1(xy) + x^2 \psi_2(xy) + \frac{1}{y^2} (ly - 2ly \cdot lx - l^2 y)$$

## 2. Casos simplificados de la ecuación general lineal de segundo orden con dos variables.

1. ECUACIONES CUYO ORDEN PUEDE REBAJARSE.—Son aquellas que sólo contienen derivadas de una misma derivada primera y cuyo orden puede reducirse al primero tomando como incógnita intermedia dicha derivada.

Así ocurre con las ecuaciones siguientes, en las que supondremos los coeficientes  $R, S, T, P, Q$  y  $F$  funciones de  $x, y$

$$(RD_x^2 + SD_x D_y + PD_x)z = F \quad [1] \text{ o sea } (RD_x + SD_y + P)D_x z = F$$

$$(TD_y^2 + SD_x D_y + QD_y)z = F \quad [2] \text{ o sea } (TD_y + SD_x + Q)D_y z = F$$

Poniendo en la primera  $D_x z = p$ , queda la ecuación de primer orden

$$R \frac{\partial p}{\partial x} + S \frac{\partial p}{\partial y} = F - Pp$$

que se integrará de acuerdo con lo dicho en la lección 21.

Obtenida la función  $p = \frac{\partial z}{\partial x} = p(x, y)$  (en general con una función arbitraria) una nueva integración con respecto a  $x$  dará  $z = \int p(x, y) dx + \psi(y)$  indicando con el símbolo  $\int$  una función primitiva respecto de  $x$ , es decir, considerando  $y$  como parámetro.

Análogamente se integrará la ecuación [2] poniendo  $D_y z = q$ .

EJEMPLO 1.º Sea  $(xD_x^2 + yD_x D_y)z = 0$ . Poniendo  $D_x z = p$  queda la ecuación de primer orden  $x \frac{\partial p}{\partial x} + y \frac{\partial p}{\partial y} = 0$ , que se integra mediante el sistema de características

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \quad dp = 0 \quad \text{y da} \quad p = k_1 \quad \frac{x}{y} = k_2 \quad p = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

siendo  $\varphi$  arbitraria. Integrando  $\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$  se obtiene, con  $\psi$  arbitraria,

$$z = \int \varphi\left(\frac{x}{y}\right) dx + \psi(y) = y \Phi\left(\frac{x}{y}\right) + \psi(y)$$

en donde  $\Phi$  representa una primitiva de  $\varphi$  y, por tanto, también una función arbitraria (derivable)

EJEMPLO 2.º Sea la ecuación

$$(yD_y^2 - xD_xD_y + D_y)z = x^2 \quad \text{que se reduce a} \quad y \frac{\partial q}{\partial y} - x \frac{\partial q}{\partial x} = x^2 - q$$

y se integra mediante el sistema de características

$$\frac{dx}{-x} = \frac{dy}{y} = \frac{dq}{x^2 - q}$$

$$xy = k_1, \quad \frac{x dq - q dx}{x^2} + dx = 0 \quad \frac{q}{x} + x = k_2$$

obteniéndose la integral

$$q = -x^2 + xf(xy)$$

$f$  función arbitraria del producto  $xy$ , de donde

$$z = -x^2y + f_1(xy) + g(y)$$

siendo  $f_1 = xy f$  otra función arbitraria del producto  $xy$  y  $g$  una función arbitraria de  $y$ .

NOTA.—Es muy importante observar que el método de integración indicado vale asimismo para las ecuaciones de las formas [1] o [2], en las que los coeficientes  $R, S, T, P, Q$  y  $F$  sean funciones de  $x, y, p$ , ecuaciones llamadas por algunos autores *casi-lineales*.

II. ECUACIONES CON DERIVADAS RESPECTO DE UNA SOLA VARIABLE. — Son, por tanto, los tipos

$$(RD_x^2 + PD_x + Z)z = F \quad [3]$$

$$(TD_y^2 + QD_y + Z)z = F \quad [4]$$

en los que  $R, T, P, Q, Z, F$  son funciones de  $x, y$  (o más general, de  $x, y, z$ ).

La primera es como una ecuación diferencial ordinaria de función  $z$  y variable  $x$ , y como tal se integrará acarreado en los cálculos la  $y$  como un parámetro. Claro es que las constantes arbitrarias de integración se transformarán en funciones arbitrarias de dicho parámetro.

La segunda se integrará análogamente considerando como variable  $y$  y como parámetro  $x$  en función del cual se expresarán las constantes arbitrarias de la integración.

EJEMPLO: Sea la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 4x^2z$$

Integrándola respecto de  $y$  considerando  $x$  constante, resulta:  
Integral general de la homogénea:

$$z = \varphi_1(x) \operatorname{sen} 2x^2y + \varphi_2(x) \operatorname{cos} 2x^2y$$

Integral particular:

$$z_1 = f(x) e^u \quad \text{siendo} \quad f(x)(1+4x^4) = x$$

Integral general:

$$z = \varphi_1(x) \operatorname{sen} 2x^2y + \varphi_2(x) \operatorname{cos} 2x^2y + \frac{xe^y}{1+4x^4}$$

III. Participan de los caracteres anteriores los tipos

$$(RD_x^2 + PD_x)z = F \quad [5] \quad (TD_y^2 + QD_y)z = F \quad [7]$$

$$(SD_xD_y + PD_x)z = F \quad [6] \quad (SD_xD_y + QD_y)z = F \quad [8]$$

que se integrarán, poniéndolos en la forma

[5]  $R \frac{\partial p}{\partial x} + Pp = F$  ecuación lineal en  $p$  que se integrará acarreado  $y$  como parámetro. Una vez obtenida  $p = f(x, y)$  bastará integrar respecto de  $x$ .

[6]  $S \frac{\partial p}{\partial y} + Pp = F$  se integrará esta ecuación con relación a  $y$ ; y luego se integrará  $p = f(x, y)$  respecto de  $x$ .

[7]  $T \frac{\partial q}{\partial y} + Qq = F$  análogamente se obtendrá  $q = \varphi(x, y)$ , que se integrará respecto de  $y$ .

[8]  $S \frac{\partial q}{\partial x} + Qq = F$  se obtendrá  $q = \varphi(x, y)$  integrando esta ecuación respecto de  $x$ , y luego se integrará  $\varphi(x, y)$  respecto de  $y$ .

EJEMPLO: Sea la ecuación

$$y \frac{\partial^2 z}{\partial^2 y} + x \frac{\partial z}{\partial y} = y(1+x)$$

que se reduce a

$$\frac{\partial q}{\partial y} + \frac{x}{y} q = 1+x$$

que da

$$\frac{\partial z}{\partial y} = q = y + k(x)y^{-x} \quad (k(x) \text{ arbitraria})$$

Integrando ésta nuevamente respecto de  $y$  obtenemos

$$z = \frac{1}{2}y^2 + \varphi(x)y^{1-x} + \psi(x)$$

en donde  $\varphi(x) = k(x)/1-x$  es una función tan arbitraria como  $k(x)$ .

Casos particulares de los que acabamos de exponer son, finalmente, los tipos

$$R \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = F \quad T \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = F \quad S \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = F$$

Por ejemplo, este último dará

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{F}{S}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \int \frac{F(x, y)}{S(x, y)} dy + k(x), \quad z = \int dx \int \frac{F(x, y)}{S(x, y)} dy + \varphi(x) + \psi(y)$$

donde  $\varphi$  y  $\psi$  son funciones arbitrarias, y los símbolos de integración indican primitivas parciales con respecto a la variable de la diferencial.

**3. Reducción de la ecuación lineal de segundo orden con dos variables a los tipos canónicos.**—Sea ahora la ecuación general

$$(RD_x^2 + SD_xD_y + TD_y^2 + PD_x + QD_y + Z)z = F$$

o sea, volviendo a la notación clásica (pues ninguna ventaja ha de reportarnos ya el simbolismo operacional),

$$Rr + Ss + Tt + Pp + Qq + Zz = F \quad [1]$$

y propongámonos, con Laplace, ver si es posible hallar un cambio de variables independientes  $x, y$  en  $u, v$

$$u = u(x, y) \quad v = v(x, y) \quad [2]$$

que transforme la ecuación [1] en otra con algún coeficiente nulo.

Procedamos a efectuar el cambio

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} u_x + \frac{\partial z}{\partial v} v_x & q &= \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} u_y + \frac{\partial z}{\partial v} v_y \\ r &= \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} u_x^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} u_x v_x + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} v_x^2 + \frac{\partial z}{\partial u} u_{xx} + \frac{\partial z}{\partial v} v_{xx} \\ t &= \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} u_y^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} u_y v_y + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} v_y^2 + \frac{\partial z}{\partial u} u_{yy} + \frac{\partial z}{\partial v} v_{yy} \\ s &= \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} u_x u_y + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} (u_x v_y + u_y v_x) + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} v_x v_y + \frac{\partial z}{\partial u} u_{xy} + \frac{\partial z}{\partial v} v_{xy} \end{aligned}$$

Sustituyendo en [1] resultará

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} (Ru_x^2 + Su_x u_y + Tu_y^2) + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \left( Ru_x v_x + \frac{1}{2} S(u_x v_y + u_y v_x) + Tu_y v_y \right) + \\ &+ \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} (Rv_x^2 + Sv_x v_y + Tv_y^2) + \frac{\partial z}{\partial u} (Ru_{xx} + Su_{xy} + Tu_{yy} + Pu_x + Qu_y) + \\ &+ \frac{\partial z}{\partial v} (Rv_{xx} + Sv_{xy} + Tv_{yy} + Pv_x + Qv_y) + Zz = F \quad [3] \end{aligned}$$

En esta ecuación supondremos  $R(x, y), S(x, y), \dots$ , expresadas en función de  $u, v$ , es decir  $R[x(u, v), y(u, v)], \dots$

Consideremos la ecuación en derivadas parciales de primer orden homogénea y de segundo grado

$$R\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + S\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + T\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = 0 \quad [4]$$

1. Si  $S^2 - 4RT > 0$  esta ecuación puede descomponerse en dos ecuaciones en derivadas parciales lineales

$$2R\frac{\partial w}{\partial x} + (S + \sqrt{S^2 - 4RT})\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad [5]$$

$$2R\frac{\partial w}{\partial x} + (S - \sqrt{S^2 - 4RT})\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad [6]$$

Eligiendo como función  $u(x, y)$  una solución de la [5] y como función  $v(x, y)$  una solución de [6] se anulan los coeficientes de  $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$  y  $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$  en [3] y queda una ecuación de la forma

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + L\frac{\partial z}{\partial u} + M\frac{\partial z}{\partial v} + Nz = G} \quad [7]$$

Las ecuaciones en las que  $S^2 - 4RT > 0$  se llaman de tipo hiperbólico y la ecuación [7] constituye el tipo canónico a que pueden reducirse, en el que la única derivada de segundo orden es la derivada mixta  $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$

Es fácil comprobar que el coeficiente de  $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$  no se anula si  $S^2 - 4RT \neq 0$ . Consideremos, en efecto, las curvas  $w(x, y) = \text{conste}$ , siendo  $w$  solución de [4]. Por cada punto  $x, y$  pasan dos curvas cuyos coeficientes angulares  $\alpha, \beta$  (que pueden escribirse en la forma  $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial w}{\partial x} : \frac{\partial w}{\partial y}$ ) son las raíces de la ecuación  $RX^2 - SX + T = 0$ . El coeficiente de  $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$  en [3] es

$$u_y v_y [2R\alpha\beta - S(\alpha + \beta) + 2T] = u_y v_y \left[ 2R\frac{T}{R} - S\frac{S}{R} + 2T \right] = -\frac{S^2 - 4RT}{R} u_y v_y$$

En lugar de esta forma reducida puede escribirse otra equivalente sin el término en la derivada mixta, efectuando el nuevo cambio

$$\xi = \frac{1}{2}(u + v) \quad \eta = \frac{1}{2}(u - v)$$

del que resulta

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) \quad \frac{\partial z}{\partial u \partial v} = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} \right)$$

y por tanto la nueva ecuación canónica

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + L_1 \frac{\partial z}{\partial \xi} + M_1 \frac{\partial z}{\partial \eta} + N_1 z = G_1} \quad [7 \text{ bis}]$$

II. Si  $S^2 - 4RT < 0$  el cambio indicado introduce imaginarias. Los operadores primeros miembros de [5] y [6] son imaginarios conjugados y pueden satisfacerse una y otra ecuación mediante dos funciones  $u, v$  a su vez imaginarias conjugadas  $u = \xi + i\eta, v = \xi - i\eta$ . Las funciones reales  $\xi(x, y)$   $\eta(x, y)$  deberán satisfacer a la ecuación que resulte de efectuar en [7] el cambio.

$$\xi = \frac{1}{2}(u + v) \quad \eta = \frac{1}{2i}(u - v)$$

del que resulta (admitiendo la persistencia de las reglas de derivación respecto de una variable compleja (\*)),

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{1}{2i} \frac{\partial z}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{1}{2i} \frac{\partial z}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} \right)$$

y la ecuación se transforma en otra de la forma

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + L_1 \frac{\partial z}{\partial \xi} + M_1 \frac{\partial z}{\partial \eta} + N_1 z = G_1} \quad [8]$$

Las ecuaciones en las que  $S^2 - 4RT < 0$  se llaman de *tipo elíptico* y la ecuación [8] es la forma canónica correspondiente, sin el término en la derivada mixta  $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}$

III. Si  $S^2 - 4RT = 0$  el cambio expuesto en I no es válido. Pero entonces se puede efectuar este otro

$$u = x \quad v = v(x, y)$$

y la ecuación [3] se reduce a

$$R \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \left( Rv_x + \frac{1}{2} Sv_y \right) + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} (Rv_x^2 + Sv_x v_y + Tv_y^2) + P \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} (Rv_{xx} + Sv_{xy} + \dots) + Zz = F$$

Elegiremos  $v$  para que sea

$$Rv_x + \frac{1}{2} Sv_y = 0$$

(\*) Lo que se verifica para una clase muy amplia de funciones que al tratar de la derivación en el campo complejo.



con lo que también será

$$\left(Rv_x + \frac{1}{2}Sv_y\right)^2 = R^2v_x^2 + RSv_xv_y + \frac{1}{4}S^2v_y^2 = 0$$

y por tanto  $Rv_x^2 + Sv_xv_y + Tv_y^2 = 0$ , es decir, la ecuación queda reducida a la forma

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + L_2 \frac{\partial z}{\partial u} + M_2 \frac{\partial z}{\partial v} + Z_2 z = F_2} \quad [9]$$

que es la forma canónica del tipo llamado *parabólico* con el que se califican las ecuaciones en que  $S^2 - 4RT = 0$ .

Las consideraciones de estos tres tipos tiene singular interés en relación con el problema de Cauchy, del que vamos a hablar en la próxima lección.

**4. Tipos canónicos en ecuaciones de tres o más variables.**—Por analogía con las formas reducidas [7 bis], [8] y [9], toda ecuación lineal en derivadas parciales de segundo orden de una función  $u$  de tres variables independientes  $x, y, z$  de la forma canónica (sin derivadas mixtas)

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + f \frac{\partial u}{\partial z} + g z = h$$

en la que  $a, b, c$  son coeficientes constantes diremos que es:

*Del tipo elíptico* si  $a, b, c$  son del mismo signo.

*Del tipo hiperbólico* si no son del mismo signo (sin ser nulos) (\*).

*Del tipo parabólico* si alguno (no todos) de dichos coeficientes es nulo.

Claro es que el simple cambio  $x = \sqrt{|a|}\xi, y = \sqrt{|b|}\eta, z = \sqrt{|c|}\zeta$  transforma la ecuación en otra en que los coeficientes  $a, b, c$  se reducen a  $+1$  ó  $-1$ .

La definición subsiste para cualquier número de variables independientes  $y$ , como se ve, en esta clasificación sólo intervienen los coeficientes de las derivadas segundas respecto de cada una de las variables, *supuestos nulos los de las derivadas mixtas*. Como veremos en la próxima lección, para las ecuaciones cuyas derivadas segundas tienen coeficientes constantes, se demuestra la posibilidad de efectuar una transformación de variables que permita reducir la ecuación a otra de dicha forma canónica, de modo similar a lo hecho para las ecuaciones con dos variables. En cambio cuando los referidos coeficientes son variables ya no es posible, en general, efectuar una transformación análoga que valga para toda una región del espacio definido por dichas variables. (Las transformaciones que permiten anular los coeficientes de las derivadas mixtas son entonces de carácter local, es decir, varían con el punto.) Pero tales trans-

(\*) Cuando las variables independientes son tres, la diferencia de signo sólo cabe entre un coeficiente y los otros dos, pero si son cuatro o más pueden ser más de uno los coeficientes de cada clase, en cuyo caso la ecuación se denomina «ultrahiperbólica» (Courant).

formaciones carecen, en general, de interés en las aplicaciones, por cuanto la Física suele presentar ya sus ecuaciones en la forma canónica reducida. Así, por ejemplo:

I. Son del tipo *elíptico* las ecuaciones de Laplace y de Poisson fundamentales en la *teoría del potencial*, que para tres variables  $x, y, z$  son (v. Tomo I, lec. 29, § 3), respectivamente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -4\pi\rho$$

También es del tipo Laplace la ecuación de *continuidad* que da el potencial de velocidades en un fluido en régimen irrotacional permanente (v. Tomo I, lec. 29, § 4).

II. Son del tipo *hiperbólico* las ecuaciones que regulan fenómenos de *propagación de ondas*, como:

La ecuación de la cuerda vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{variables } x, t).$$

La ecuación de la membrana vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{variables } x, y, t).$$

Vibración de un medio elástico (ondas sonoras)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{variables } x, y, z, t).$$

La ecuación de los telegrafistas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = cl \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (rc + lg) \frac{\partial u}{\partial t} + rgu \quad (\text{variables } x, t).$$

III. Son del tipo *parabólico*:

La ecuación de propagación del calor (ecuación de la difusión)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = a^2 \frac{\partial u}{\partial t} \quad (\text{Tomo I, lec. 29}).$$

La ecuación de la pila atómica homogénea

$$\frac{\partial N}{\partial t} = k_1 \left( \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} \right) + k_2 N$$

LECCIÓN 27.—EL PROBLEMA DE CAUCHY EN LAS ECUACIONES DE ORDEN SUPERIOR AL PRIMERO. CARACTERÍSTICAS

1. **Enunciado del problema de Cauchy para las ecuaciones con dos variables independientes.**—En una ecuación en derivadas parciales de primer orden con dos variables independientes

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad [1]$$

hemos visto (lección 23) cómo se determinan las superficies integrales que pasan por una curva directriz (distinta de las características)

$$x = x(\theta) \quad y = y(\theta) \quad z = z(\theta) \quad [2]$$

El sistema constituido por las ecuaciones [1], [2] y por

$$z'(\theta) = px'(\theta) + qy'(\theta) \quad [3]$$

permite hallar  $p$  y  $q$  como funciones del parámetro  $\theta$  a lo largo de dicha directriz.

Se comprende que en el caso de una ecuación de segundo orden

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \quad [4]$$

no queda determinada una superficie solución dando sólo una tal curva directriz, pues que aparecen tres funciones nuevas  $r, s, t$  y sólo dos relaciones nuevas

$$p'(\theta) = rx'(\theta) + sy'(\theta) \quad q'(\theta) = sx'(\theta) + ty'(\theta) \quad [5]$$

Pero si damos además una de las dos funciones  $p(\theta)$  o  $q(\theta)$  a lo largo de la curva podemos deducir la otra por [3] (es decir, conocemos la sucesión de planos tangentes), y, al sustituir en [5], las tres ecuaciones [4] [5] determinarán  $r, s$  y  $t$  siempre que sea distinto de cero el jacobiano

$$\begin{vmatrix} F_r & F_s & F_t \\ x' & y' & 0 \\ 0 & x' & y' \end{vmatrix} \neq 0 \quad [6]$$

o sea

$$F_r y'^2 - F_s x' y' + F_t x'^2 \neq 0$$

de otro modo

$$F_r dy^2 - F_s dx dy + F_t dx^2 \neq 0 \quad [7]$$

La no anulación de esta forma diferencial es, pues, una condición *necesaria* para la existencia de la superficie integral que pase por una curva y tenga en ella una sucesión de planos tangentes dada.

Concretándonos al caso de las ecuaciones lineales (el de más interés en la Física)

$$Rr + Ss + Tt + Pp + Qq + Zz = F \quad [8]$$

en el que  $R, S, T, P, Q, Z, F$  son funciones de  $x, y$ , o de las casi-lineales en que son funciones de  $x, y, z$ , podemos, pues, enunciar aquí el llamado problema de Cauchy del siguiente modo:

*Hallar una superficie  $z = z(x, y)$  que satisfaga la ecuación en derivadas parciales [8], que pase por una curva dada, y que tenga a lo largo de ella una sucesión de planos tangentes también dada. En otros términos: Hallar la superficie integral definida por una banda de desarrollable circunscrita a lo largo de una curva dada de ella.*

Matemáticamente se puede definir esta banda dando:

1.º La curva  $c$  proyección en el plano  $x, y$  de la curva del espacio.

2.º Los valores  $z(x, y)$  de las ordenadas, es decir, de la función incógnita  $z$  a lo largo de dicha curva.

3.º La pendiente  $\frac{dz}{dn}$  del plano tangente en dirección de la normal a dicha curva. O, lo que es equivalente, las pendientes  $p(x, y), q(x, y)$  en las direcciones de los ejes a lo largo de dicha curva, teniendo en cuenta que no son independientes sino que deben satisfacer a

$$dz = p dx + q dy$$

a lo largo de dicha curva (puesto que la superficie integral contiene la curva del espacio dada).

La condición [7] se traduce en el siguiente resultado: Para que el problema de Cauchy sea determinado es condición necesaria que la curva  $c$  proyección sobre el plano  $x, y$  de la curva dada *no verifique en ningún punto la ecuación diferencial*

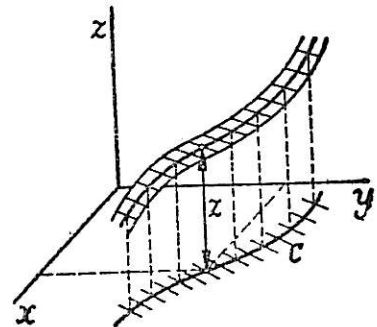
$$R dy^2 - S dx dy + T dx^2 = 0 \quad [9]$$

Se demuestra en los tratados (\*) que si la ecuación define una de las derivadas segundas como función analítica de las demás derivadas y variables, es decir, por ejemplo,

$$r = f(x, y, z, p, q, s, t)$$

siendo  $f$  analítica, la no verificación de [9] es no sólo necesaria sino también suficiente para la existencia y unicidad de la solución al problema de Cauchy en las proximidades de la curva dada.

(\*) V. por ejemplo, *Bieberbach*, «Differentialgleichungen».



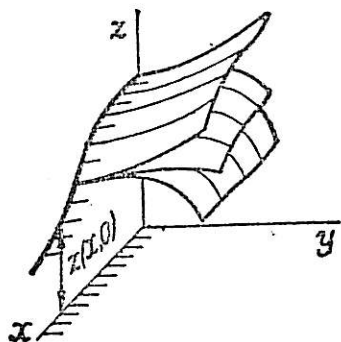
La demostración (debida a Sofia Kowalewski y simplificada posteriormente por Goursat) constituye una verdadera generalización del método de Cauchy para demostrar la existencia de la solución de una ecuación diferencial ordinaria en un entorno del punto en que se fijan las condiciones iniciales, y consiste análogamente: 1.º En establecer la posibilidad del cálculo recurrente de las derivadas sucesivas de la función incógnita por derivaciones de la ecuación dada. 2.º En demostrar la convergencia uniforme de la serie de Taylor obtenida desarrollando dicha función en una banda alrededor de uno de los ejes coordenados (en que se puede transformar previamente, mediante un cambio de variables, la proyección sobre el plano  $z$  de la curva dada) y sustituyendo en dicho desarrollo los coeficientes derivadas parciales por los valores calculados. No resulta difícil construir una serie mayorante que asegure la convergencia uniforme de la serie solución en una zona más o menos próxima al eje considerado. La solución resulta, pues, *analítica regular en dicha zona*.

**2. Las curvas características.**— Las curvas del plano  $x, y$  que verifican la ecuación diferencial

$$R dy^2 - S dx dy + T dx^2 = 0 \quad \text{o sea} \quad R \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - S \frac{dy}{dx} + T = 0 \quad [9]$$

son las llamadas *características* y a lo largo de ellas el problema de Cauchy puede ser imposible o indeterminado.

Sea, por ejemplo, la ecuación  $s=0$  cuya integral general es  $z = \varphi(x) + \psi(y)$ , siendo  $\varphi, \psi$  arbitrarias. Las curvas características vienen dadas por  $dx dy = 0$  y son por tanto  $dx=0, dy=0, x=C_1, y=C_2$ , es decir, *paralelas a los ejes*.



A lo largo, por ejemplo, del eje  $x$  podemos dar arbitrariamente  $z(x, 0) = \varphi(x) + \psi(0)$  lo que determinará  $\varphi$ , pero *no podemos dar arbitrariamente* la derivada en dirección normal  $z_y(x, 0)$  que tiene que ser precisamente una constante  $= \psi'(0)$ .

De modo que si damos  $z_y(x, 0) = f(x)$  variable el problema es imposible y si damos  $z_y(x, 0) = k$  podrá ser  $z(x, y) = k + f(y)$ , siendo  $f(y)$  una función integrable cualquiera que se anule para  $y=0$ , con

lo que  $z(x, y) = ky + \int_0^y f(y) dy + \varphi(x) + \psi(0)$  que cumple la condición  $z(x, 0) = \varphi(x) + \psi(0)$ .

Es decir, el problema resulta indeterminado.

Podemos expresar la no anulación de [9] diciendo: *Para que el problema de Cauchy sea determinado, es condición precisa que la proyección de la curva dada, en el plano  $x, y$ , no sea característica ni tangente en ningún punto a una característica.*

**3. Las curvas características y la reducción a la forma canónica.**— La ecuación [9] que da las curvas características se desdobra en dos ecuaciones diferenciales lineales ordinarias

$$[10] \quad \frac{dy}{dx} = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4RT}}{2R} = \begin{cases} \varphi_1(x, y) \\ \varphi_2(x, y) \end{cases} \quad \text{y por tanto:}$$

I. Si  $S^2 - 4RT > 0$  tenemos dos curvas características por cada punto. Es decir, en las ecuaciones de tipo hiperbólico existen dos haces de curvas características (al menos en la región de plano en que se verifica la desigualdad).

NOTA.—Si  $R=0$ , pero  $T \neq 0$  despejaríamos  $\frac{dx}{dy}$  y la conclusión es la misma.

Si también  $T=0$  las curvas características son  $dx dy=0$ , es decir, los haces de paralelas del ejemplo anterior y también subsiste la conclusión.

II. Si  $S^2 - 4RT \equiv 0$  existe una sola curva característica por cada punto, y por tanto en las ecuaciones de tipo parabólico existe un solo haz de curvas características.

III. Si  $S^2 - 4RT < 0$ , en las ecuaciones de tipo elíptico no existen curvas características.

Obsérvese ahora la relación que existe entre la ecuación [4] del párrafo 3 de la lección anterior sobre la reducción a la forma canónica y la ecuación diferencial [9] de las curvas características.

Si  $w(x, y)$  es una función que verifica la referida ecuación

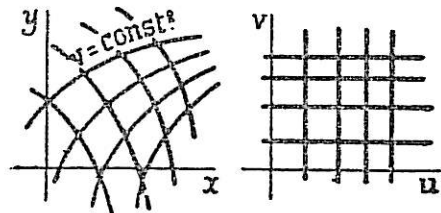
$$R\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + S\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + T\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = 0 \quad [11]$$

toda curva de ecuación  $w(x, y) = \text{const}^\circ$  es curva característica, puesto que a lo largo de ella

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial w}{\partial x} : \frac{\partial w}{\partial y}$$

relación que transforma la ecuación anterior en la ecuación diferencial de las características.

El cambio de variables  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  que nos redujo una ecuación hiperbólica al tipo canónico y que consistía en tomar para  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  soluciones de las dos ecuaciones en derivadas parciales lineales en que se desdoblaba la ecuación [11], no es pues otra cosa que una transformación del plano en la que las homólogas de líneas coordenadas  $u, v$  en el plano  $x, y$  son las curvas características.



Por eso se dice de la ecuación canónica, que es la ecuación diferencial referida a sus curvas características.

NOTA.—Todo cambio de variables independientes efectuado en la ecuación dada  $Rr + Ss + Tt + \dots = F$  transforma las curvas características en las curvas características de la nueva ecuación.

En el caso elíptico las características (imaginarias)  $u = \text{const}^\circ$ ,  $v = \text{const}^\circ$  obtenidas por el primer cambio del § 3 de la lec. anterior se transforman en las curvas  $\xi + i\eta = \text{const}^\circ$ ,  $\xi - i\eta = \text{const}^\circ$  después del segundo cambio, lo que indica que la ecuación diferencial de



las características es  $d\xi = \pm i d\eta$ ,  $d\xi^2 + dy^2 = 0$  y, por tanto, la ecuación es del tipo  $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + \dots = F$  forma canónica a que llegamos en el caso elíptico.

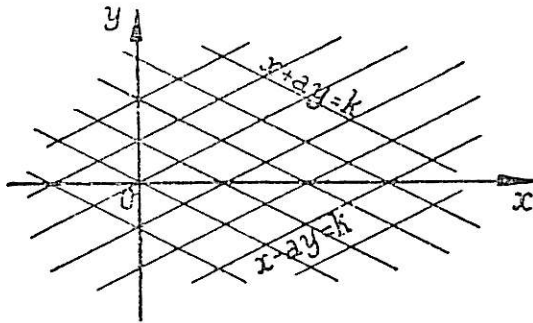
**4. Las curvas características en las ecuaciones de coeficientes constantes.**—En las ecuaciones en las que los coeficientes de  $r$ ,  $s$ ,  $t$ , son constantes, las curvas características definidas por [10] son también de pendiente constante, es decir, forman *haces de rectas paralelas*.

Por tanto: Si la ecuación es hiperbólica podemos transformarla, por una simple afinidad, en otra cuyas características sean paralelas a los ejes, o a sus bisectrices.

**EJEMPLO 1.º** Ya hemos dicho que en la ecuación hiperbólica  $s=0$ , es decir,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$ , las curvas características son las paralelas a los ejes.

**EJEMPLO 2.º** La ecuación de las *cuerdas vibrantes*

$$a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$



tiene por curvas características

$$a^2 dy^2 = dx^2 \pm a dy = dx \quad x \pm ay = k$$

Con el sencillo cambio  $x = a\xi$  (afinidad) se transforma la ecuación en  $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ , y las características en

los haces de paralelas a las bisectrices de los ejes  $\xi \pm y = k$ , mientras la transformación afín  $\xi = x + ay$ ,  $\eta = x - ay$  transforma la ecuación en la  $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}$  de características paralelas a los ejes.

**EJEMPLO 3.º** La ecuación de Laplace  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  (elíptica) tiene por características las rectas isotropas del plano.

**EJEMPLO 4.º** La ecuación de la propagación unidimensional del calor  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = k \frac{\partial u}{\partial y}$  (parabólica) tiene por características  $\frac{dy}{dx} = 0$ ,  $y = \text{const.}$ , es decir, el haz de paralelas al eje  $x$ .

**5. Problema de Cauchy y superficies características en las ecuaciones con tres variables independientes.**—Dada una ecuación lineal en derivadas parciales de segundo orden con tres variables independientes

$$A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2A_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2A_{23} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 2A_{13} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + B_1 \frac{\partial u}{\partial x} + B_2 \frac{\partial u}{\partial y} + B_3 \frac{\partial u}{\partial z} + Cu = F \quad [1]$$

en la que  $A_{ij}$ ,  $B_k$ ,  $F$  son funciones de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , el problema de Cauchy consiste análogamente en: *Hallar una función  $u(x, y, z)$  que verifique esta ecuación y que a lo largo de una superficie dada*

$$\varphi(x, y, z) = 0 \quad [2]$$

*tenga ella y una de sus derivadas valores prefijados.*

Verificadas ciertas condiciones de analiticidad de los coeficientes se demuestra que existe una función  $u$  única que cumple estas condiciones, siempre y cuando la función  $\varphi$  que define la superficie no verifique la ecuación en derivadas parciales (\*)

$$A_{11} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + A_{22} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + A_{33} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + 2A_{23} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + 2A_{13} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad [3]$$

Todas las superficies que verifican la ecuación [2] se llaman *superficies características* del problema de Cauchy considerado. Como se ve, en la formación de la ecuación *en derivadas parciales de primer orden y segundo grado* [2] que define las características *sólo intervienen los coeficientes de las derivadas segundas* de la ecuación dada. Su primer miembro es la forma cuadrática que se obtiene sustituyendo, en los términos de las derivadas segundas de la ecuación dada, estas derivadas por productos de las derivadas primeras de la función  $\varphi(x, y, z)$ , cuya anulación [3] define las características.

Si queremos la ecuación en derivadas parciales a que tiene que satisfacer la ecuación explícita  $z = z(x, y)$  de tales características, no tenemos más que recordar que  $\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\partial \varphi}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ . Dividiendo la ecuación [3] por  $\left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2$  se tendrá, pues, la ecuación de las superficies características en forma explícita

$$A_{11} p^2 + A_{22} q^2 + A_{33} + 2A_{12} pq - 2A_{13} p - 2A_{23} q = 0 \quad [4]$$

Obsérvese que esta ecuación lo mismo que la [3] no es lineal, sino de segundo grado.

EJEMPLO: Aplicando [4] a la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad [5]$$

se obtiene

$$p^2 + q^2 = 1 \quad [6]$$

(\*) Véase en la nota al final de la lección una deducción elemental de esta ecuación

Las superficies características son envolventes de planos (o de conos) inclinados 45 grados respecto del plano  $x, y$  (v. lección 23, § 4, núm. 4, ej. 1.º).

Si la ecuación es (ecuación de ondas)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad [7]$$

la transformación  $\zeta = az$  la reducirá al caso anterior y a los planos característicos  $z = x \cos \alpha + y \sin \alpha + C_2$  de [5] corresponderán los planos característicos  $az = x \cos \alpha + y \sin \alpha + C_2$  de [7].

Asimismo resultan los conos característicos  $a^2 z^2 = (x - C_1)^2 + (y - C_2)^2$ .

**6. Reducción a los tipos canónicos de las ecuaciones con tres variables.**

Supongamos ahora efectuada una transformación de coordenadas biunívoca, definida por tres funciones continuas derivables y cuyo jacobiano es  $\neq 0$

$$\xi = \xi(x, y, z) \quad \eta = \eta(x, y, z) \quad \zeta = \zeta(x, y, z)$$

Lo mismo la ecuación dada [1] que la de las características [3] ó [4] sufrirán la transformación correspondiente. Transformemos la [3].

Las derivadas parciales  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$  se relacionan con las nuevas  $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}$  según la transformación lineal

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \eta_x + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \zeta_x \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \eta_y + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \zeta_y \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \xi_z + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \eta_z + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \zeta_z \end{aligned}$$

La transformación formal es la misma que experimentaría la ecuación de la cuádrica (referida a su centro)

$$A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + 2A_{12}xy + 2A_{23}yz + 2A_{13}xz = 0$$

mediante el giro de ejes

		$\xi$	$\eta$	$\zeta$
$x = \xi \alpha_x + \eta \beta_x + \zeta \gamma_x$	$x$	$\alpha_x$	$\beta_x$	$\gamma_x$
$y = \xi \alpha_y + \eta \beta_y + \zeta \gamma_y$	$y$	$\alpha_y$	$\beta_y$	$\gamma_y$
$z = \xi \alpha_z + \eta \beta_z + \zeta \gamma_z$	$z$	$\alpha_z$	$\beta_z$	$\gamma_z$

donde los coeficientes  $\alpha, \beta, \gamma$  son ahora los cosenos directores de los ejes nuevos  $\xi, \eta, \zeta$  respecto de los antiguos  $x, y, z$  según el cuadro indicado.

Ahora bien, es sabido por teoría de cuádricas la existencia en toda cuádrica con centro, de tres ejes rectangulares y por tanto la posibilidad de hallar un giro, es decir, un sistema de coeficientes  $\alpha, \beta, \gamma$  en la transformación anterior, que conviertan la ecuación de la cuádrica en su ecuación reducida sin términos rectangulares.

Por consiguiente la misma transformación lineal (escribimos la recíproca)

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha_x x + \alpha_y y + \alpha_z z \\ \eta &= \beta_x x + \beta_y y + \beta_z z \\ \zeta &= \gamma_x x + \gamma_y y + \gamma_z z \end{aligned} \quad \text{en la que} \quad \begin{cases} \xi_x = \alpha_x & \xi_y = \alpha_y & \xi_z = \alpha_z \\ \eta_x = \beta_x & \eta_y = \beta_y & \eta_z = \beta_z \\ \zeta_x = \gamma_x & \zeta_y = \gamma_y & \zeta_z = \gamma_z \end{cases}$$

transformará la forma cuadrática [3] en otra sin términos rectangulares, y por tanto la ecuación diferencial [1] en otra que no contiene derivadas mixtas.

Obsérvese que los coeficientes  $\alpha, \beta, \gamma$  de la transformación dependen de la cuádrica, es decir, de los coeficientes  $A_{ij}$ . Si éstos son constantes, la transformación será también independiente de  $x, y, z$ ; por tanto:

Si la ecuación en derivadas parciales [1] tiene coeficientes constantes será posible hallar una transformación lineal de variables independientes que la reduzca a otra de tipo canónico de la forma

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + f \frac{\partial u}{\partial z} + gu = h$$

en la que  $a, b$  y  $c$  son también constantes. Finalmente estos coeficientes pueden reducirse fácilmente a  $\pm 1$  sin más que efectuar la nueva transformación  $\xi = \sqrt{|a|}x, \eta = \sqrt{|b|}y, \zeta = \sqrt{|c|}z$ , con lo que queda demostrada la afirmación contenida en el párrafo 4 de la lección anterior y la consiguiente clasificación de las ecuaciones de segundo orden con tres variables en los tipos *elíptico, hiperbólico y parabólico*.

En cambio si los coeficientes  $A_{ij}$  son variables, la cuádrica de referencia varía con el punto considerado, y con ella varían los coeficientes de la transformación que adquiere así carácter *local*, pero que ya no sirve para toda la región del espacio en que se cumple el teorema de existencia.

**7. Significado físico de las curvas y superficies características. Frentes de onda.**—Nos hemos detenido un tanto en el estudio de las curvas y superficies características por el importante papel que desempeñan en los problemas de la Física matemática en que aparecen.

Para dar una idea de ello, vamos a ceñirnos a las ecuaciones de propagación de ondas en dos y en tres variables independientes, una de ellas el tiempo, es decir,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad [1] \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad [2]$$

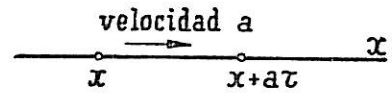
Hemos dicho (lec. 24, § 3) que la primera admite soluciones de las formas  $\varphi(x-at)$  y  $\psi(x+at)$  y en general

$$u = \varphi(x-at) + \psi(x+at) \quad \varphi, \psi \text{ arbitrarias}$$

mientras acabamos de ver (§ 4, ej. 2.º) que las características son precisamente

$$x+at=k$$

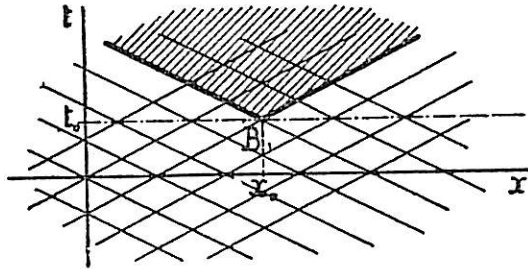
$$x-at=k$$



Consideremos la solución  $u = \varphi(x-at)$ . Significa: en el instante  $t$  y en el punto (o los puntos) de abscisa  $x$  del medio físico considerado, una cierta magnitud física  $u$  (deformación elástica, presión, densidad...), tiene el valor  $u$ , el mismo que tendrá  $\tau$  segundos después el punto de abscisas  $x + a\tau$  ( $x + a\tau - a(t + \tau) = x - at$ ). Esta solución indica, pues, un estado que se propaga a lo largo del medio considerado a la velocidad lineal  $a$  en el sentido de las  $x$  crecientes.

Análogamente la solución  $u = \psi(x+at)$  representa la propagación de un estado en el sentido de las  $x$  decrecientes.

La solución general aparece así como una superposición de dos ondas, una de avance y otra de retroceso, ondas que se repiten en otras ecuaciones de tipo hiperbólico como la que regula la propagación de tensión en una línea eléctrica, bien conocida de los electrotécnicos.



Si representamos las variables  $x$ ,  $t$  convencionalmente en unos ejes cartesianos, las «líneas»  $x-at=k$ ,  $x+at=k$  indicarán los lugares-tiempo en los que el estado es el mismo, es decir las gráficas horarias con que se propagan estos estados en sentido

directo y retrógrado (análogas a las gráficas de tráfico de ferrocarriles en una vía).

Suponiendo un medio inicialmente en reposo y perturbado en un punto (vibración en una sección plana de un tubo sonoro, en un punto de una cuerda tensa, etc.) entre estas líneas figurará la que señala el avance del estado inicial de perturbación, es decir, el *frente de onda*; por eso se llaman también las líneas características «frentes de onda».

Producida una perturbación en el punto de abscisa  $x_0$  en el instante inicial  $t_0$  las dos características que pasan por dicho punto separan dos regiones del semiplano superior «futuro»: una (rayada en la figura) de lugares-tiempo en los cuales la perturbación ha pasado, otra (en blanco) de lugares-tiempo en los cuales no ha tenido todavía lugar, las propias características marcan los lugares-tiempo en los cuales la perturbación *está pasando*, es decir, son las gráficas de avance del *frente de onda*.

Parecida interpretación podemos hallar en la ecuación [2]. Se comprueba fácilmente (hágalo el lector) que admite soluciones de la forma

$$u = \varphi(mx + ny - at)$$



para todo par de valores  $m, n$  que verifiquen  $m^2 + n^2 = 1$ . En particular es solución

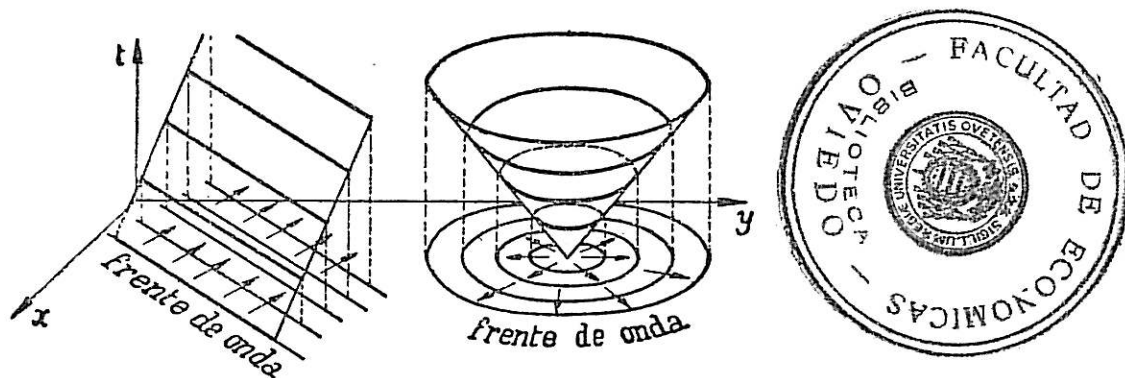
$$u = \varphi(x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha - at)$$

que representa un estado que se propaga en el plano  $x, y$  de tal modo que en el instante  $t$  todos los puntos que están en el mismo estado se sitúan sobre las rectas  $x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha - at = k$  cuya distancia al origen es  $k + at$ . Esta recta se aleja, pues, del origen a velocidad  $a$  (velocidad de propagación) en la dirección que forma el ángulo  $\alpha$  con el eje  $x$ .

La dirección de propagación  $\alpha$ , como se ve, puede ser cualquiera, siendo la velocidad de avance lo mismo en todas ellas (medio isótropo). No ocurriría lo mismo si los coeficientes de las derivadas segundas en la ecuación [2] fuesen distintas (medio anisótropo).

Representando la variable  $t$  como una tercera coordenada cartesiana, ya hemos dicho (§ 5, ejemplo) que las «superficies» características son aquí envolventes de planos  $at = x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha + C_2$  o de conos  $a^2 t^2 = (x - C_1)^2 + (y - C_2)^2$  (al dar una relación entre  $\alpha$  y  $C_2$  o entre  $C_1$  y  $C_2$ ).

Estos planos o conos (o superficies en general) son cortados por los distintos planos  $t = \tau$  según rectas o circunferencias (o líneas en general) que dan los lugares geométricos de puntos de igual estado en el instante  $\tau$ .



Entre ellos se hallan los lugares de puntos con estado de perturbación inicial, es decir, los *frentes de onda* en el plano considerado (\*). Y análogas consideraciones podríamos hacer para las ecuaciones con cuatro variables en el espacio ordinario ampliado con la cuarta coordenada tiempo.

Obsérvese finalmente que en tales frentes de onda que separan la región del medio perturbado de la no perturbada ( $w=0$ ) ocurre el tránsito de la solución trivial  $u=0$  a la no trivial buscada.

Las características son, pues, líneas a lo largo de las cuales la solución deja de ser analítica regular, presentándose en ellas discontinuidades en la segunda derivada. Esta propiedad puede servir también para definir las y para hallar su ecuación (\*\*).

(\*) Estos conos característicos han adquirido un singular relieve teórico y experimental en la moderna teoría del vuelo supersónico. Son los conos de Mach que acusan de manera admirable las fotografías obtenidas en los ensayos realizados en los túneles aerodinámicos.

(\*\*) V. Courant-Hilbert. «Methoden der Mathematischen Physik». Tomo II, Cap. V, párrafo 1.



NOTAS

§. Obtención de la ecuación de las superficies características.—La existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy sobre una superficie no característica es de demostración algo larga (Kowalewski-Goursat) que omitimos. (Los rasgos esenciales de dicha demostración han sido indicados en el párrafo 1.)

En cambio es relativamente fácil darse cuenta de cómo la no existencia o no unicidad de la solución conduce a la ecuación [4] de las superficies características.

En efecto, dada la ecuación

$$A_{11} u_{xx} + A_{22} u_{yy} + A_{33} u_{zz} + 2 A_{12} u_{xy} + 2 A_{23} u_{yz} + 2 A_{13} u_{xz} + B_1 u_x + B_2 u_y + B_3 u_z + Cu = F \tag{1}$$

y supuestos conocidos los valores de la función  $u(x, y, z)$  y de  $u_z(x, y, z)$  a lo largo de una superficie

$$z = f(x, y) \tag{2}$$

es decir, supuestas conocidas las funciones

$$u[x, y, f(x, y)] = U(x, y) \quad u_z[x, y, f(x, y)] = V(x, y) \tag{3}$$

propongámonos calcular a lo largo de dicha superficie las derivadas sucesivas de la función  $u$ . Se tendrá por derivación de estas relaciones

$$u_x + u_z f_x = U_x \quad u_y + u_z f_y = U_y \tag{4}$$

que permiten calcular  $u_x, u_y$ , por ser conocidas las restantes funciones a lo largo de la superficie.

Derivando nuevamente éstas y la [4] con respecto a  $x$  e  $y$ , resulta

$$u_{xx} + 2 u_{xz} f_x + u_{zz} f_x^2 + u_x f_{xx} = U_{xx} \tag{5}$$

$$u_{yy} + 2 u_{yz} f_y + u_{zz} f_y^2 + u_y f_{yy} = U_{yy} \tag{6}$$

$$u_{xy} + u_{xz} f_y + u_{yz} f_x + u_{zz} f_x f_y + u_x f_{xy} = U_{xy} \tag{7}$$

$$u_{zx} + u_{zz} f_x = V_x \tag{8}$$

$$u_{zy} + u_{zz} f_y = V_y \tag{9}$$

Estas cinco ecuaciones y la [1] dada, constituyen un sistema lineal del que podemos despejar las seis derivadas segundas  $u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}, u_{xy}, u_{yz}, u_{xz}$ , siempre y cuando el determinante de los coeficientes sea  $\neq 0$ . La no existencia o no unicidad de la solución supone, pues, la anulación del determinante. Ordenados los términos en la forma que se indica, resulta:

		Términos							
		$u_{zz}$	$u_{xz}$	$u_{yz}$	$u_{xx}$	$u_{yy}$	$u_{xy}$		
{	Ecuaciones	[1]	$A_{33}$	$2 A_{13}$	$2 A_{23}$	$A_{11}$	$A_{22}$	$2 A_{12}$	$= 0$
		[9]	$f_x$	$1$	$0$	$0$	$0$	$0$	
		[10]	$f_y$	$0$	$1$	$0$	$0$	$0$	
		[6]	$f_x^2$	$2 f_x$	$0$	$1$	$0$	$0$	
		[7]	$f_y^2$	$0$	$2 f_y$	$0$	$1$	$0$	
		[8]	$f_x f_y$	$f_y$	$f_x$	$0$	$0$	$1$	

Desarrollado este determinante por los elementos de la primera fila y columna se obtiene fácilmente (después de breves simplificaciones)

$$A_{33} + A_{23} f_y^2 + A_{13} f_x^2 - 2 A_{13} f_x - 2 A_{23} f_y + 2 A_{12} f_x f_y = 0$$

que es la ecuación [4] dada en el párrafo 5. De ésta se pasa a la [3] del mismo párrafo sustituyendo  $f_x = -\varphi_x : \varphi_z$ ,  $f_y = -\varphi_y : \varphi_z$ , obteniéndose

$$A_{11} \varphi_x^2 + A_{22} \varphi_y^2 + A_{33} \varphi_z^2 + 2 A_{12} \varphi_x \varphi_y + 2 A_{23} \varphi_y \varphi_z + 2 A_{13} \varphi_x \varphi_z = 0$$

La simetría de esta ecuación respecto de las tres variables indica que, hubiésemos llegado al mismo resultado si en lugar de suponer conocida  $u_z$ , hubiésemos dado los valores de  $u_x$  o de  $u_y$ .

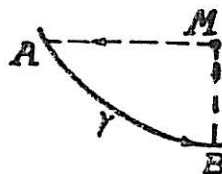
El método se generaliza, sin dificultades de mayor cuantía, a las derivadas de segundo orden con cuatro o más variables. Las hipersuperficies características vienen siempre dadas por una ecuación en derivadas parciales obtenida sustituyendo las derivadas segundas por productos de derivadas parciales simples e igualando a cero la forma cuadrática así obtenida en estas derivadas (\*).

**9. Método de Riemann para la integración de las ecuaciones hiperbólicas con dos variables.**—Tiene por objeto resolver el problema de Cauchy en las ecuaciones de tipo hiperbólico. Sea la ecuación hiperbólica canónica homogénea

$$H(z) \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + P \frac{\partial z}{\partial x} + Q \frac{\partial z}{\partial y} + Zz = 0 \quad [1]$$

en la que  $P$ ,  $Q$ ,  $Z$  son funciones de  $x$ ,  $y$ , y cuyo primer miembro hemos designado abreviadamente  $H(z)$ , y supongamos dada una curva  $\gamma$  (no característica ni tangente en ningún punto a ninguna característica) de ecuaciones  $x = x(\theta)$ ,  $y = y(\theta)$  a lo largo de la cual se suponen conocidos los valores de  $z$  y de  $z_x$ .

Tratemos de determinar el valor de  $z$  en otro punto  $M(x_0, y_0)$  cualquiera, por el que trazaremos las dos características  $MA$ ,  $MB$  paralelas a los ejes (v. § 4) hasta cortar en  $A$  y  $B$  la curva  $\gamma$ .



Consideremos una nueva función  $\zeta(x, y)$  que satisfaga la ecuación

$$G(\zeta) \equiv \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial(P\zeta)}{\partial x} - \frac{\partial(Q\zeta)}{\partial y} + Z\zeta = 0 \quad [2]$$

llamada *adjunta* de [1], y apliquemos la fórmula de Riemann o Green (tomo I, lec. 22, § 4) a las funciones  $X$  e  $Y$  que indican las llaves

$$\int_{A\gamma BM} \left( \overbrace{-Q\zeta z - \zeta \frac{\partial z}{\partial x}}^X dx + \overbrace{P\zeta z - z \frac{\partial \zeta}{\partial y}}^Y dy \right) = \iint_{A\gamma BM} \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy =$$

$$= \iint_{A\gamma BM} \left\{ \underbrace{\zeta \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + P \frac{\partial z}{\partial x} + Q \frac{\partial z}{\partial y} + Zz \right)}_{H(z)} - z \underbrace{\left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y \partial x} - \frac{\partial(P\zeta)}{\partial x} - \frac{\partial(Q\zeta)}{\partial y} + Z\zeta \right)}_{G(z)} \right\} dx dy \quad [3]$$

(Es fácil comprobar término a término la identidad de las expresiones subintegrales efectuando las derivaciones y teniendo en cuenta que se anulan en la primera expresión de la integral doble los términos en  $\frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x}$  y en la segunda los términos en  $Z\zeta z$ .)

Esta integral doble se extiende en el recinto  $A\gamma BM$  mientras la integral curvilínea se extiende a lo largo de su contorno recorrido a izquierdas. Como  $z$  satisface a [1] y  $\zeta$  a [2] quedará en definitiva

$$\int_{A\gamma BM} X dx + Y dy = 0 \quad \text{o sea} \quad \int_M^A X dx + \int_A^B (X dx + Y dy) + \int_B^M Y dy = 0$$

(\*) Para un estudio menos elemental véanse las profundas lecciones de *Hadamard*, «Le problème de Cauchy».

Estudiemos estas integrales. La primera es

$$\int_A^M \left( Q\zeta z + \zeta \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx = [\zeta z]_A^M + \int_A^M z \left( Q\zeta - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) dx = [\zeta z]_A^M$$

si adoptamos para  $\zeta$  a lo largo de  $AM$  el valor  $\zeta = e^{\int_{x_0}^x Q dx}$  que anula el paréntesis.  
La tercera

$$\int_{B^*}^M \left( P\zeta z - z \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) dy$$

se anula análogamente si adoptamos para la función  $\zeta$  a lo largo de  $BM$  el valor  $\zeta = e^{\int_{y_0}^y P dy}$  (ambas expresiones dan en  $M$  el valor  $\zeta=1$ ), con lo que quedará al sumar

$$[\zeta z]_M - [\zeta z]_A + \int_A^B (X dx + Y dy) = 0$$

o sea

$$z_M = [\zeta z]_A + \int_A^B \zeta \left( Qz + \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx - z \left( P\zeta - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) dy \quad [4]$$

fórmula de Riemann que resuelve el problema dando el valor de  $z$  en  $M$ , puesto que se supone  $\zeta$  conocida y conocidos los valores de  $z$  y de  $\frac{\partial z}{\partial x}$  a lo largo del arco  $AB$  sobre la curva  $\gamma$ .

Como se ve, la resolución del problema de Cauchy, mejor dicho el cálculo de  $z$  en cada punto  $M$ , se ha hecho depender de otro algo más sencillo: *La obtención de una solución de la ecuación adjunta [2] que tome valores prefijados a lo largo de las dos características  $MA$  y  $MB$  que pasan por  $M$ .*

La ventaja es decisiva cuando la ecuación [1] es de coeficientes constantes  $P=a$ ,  $Q=b$ ,  $Z=c$ , pues la ecuación adjunta [2] es de la misma forma cambiando  $a$  y  $b$  por  $-a$  y  $-b$ . Es más, en tal caso el cambio  $z = ue^{-bx-ay}$  transforma la ecuación en otra sin términos en las derivadas primeras

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (c-ab)u = 0, \quad \text{es decir,} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + ku = 0 \quad [5]$$

que tiene como ecuación adjunta *la misma ecuación*, y el problema queda reducido a buscar para cada punto  $M$  una solución de ella que a lo largo de las características por  $M(x_0, y_0)$  tome el valor 1 (véanse las anteriores expresiones de  $\zeta$  para  $P=Q=0$ ). Basta para ello poner  $u = \zeta = \varphi(v)$ , siendo  $v = (x-x_0)(y-y_0)$  de modo que  $\varphi(0)=1$ . Sustituyendo en [5] deberá tenerse

$$\varphi''(v)v + \varphi'(v) + k\varphi = 0 \quad \text{es decir} \quad \varphi'' + \frac{1}{v}\varphi' + \frac{k}{v}\varphi = 0$$

que se reduce a una de Bessel de orden cero con el cambio  $v = \sqrt{x}$  (Ejercicio 5.º, lec. 16). Sabido es por otra parte que  $J(0)=1$ .

El método es aplicable a las ecuaciones hiperbólicas no homogéneas, es decir, del tipo [1] con el segundo miembro  $=F(x, y)$  con la modificación de no ser en [3]  $\zeta H(z)=0$  sino  $=\zeta F(x, y)$ , por lo que quedará

$$\int_{A\gamma BM} X dx + Y dy = \iint_{A\gamma BM} \zeta F(x, y) dx dy$$

La integral doble del segundo miembro es sumando que se acarreará asimismo en el segundo miembro de la expresión [4] (o esta integral cambiada de signo si el punto  $M$  ocupa una posición tal respecto de la curva  $\gamma$  que la integral curvilínea sobre  $A\gamma BM$  resulte recorrida a *derechas*).

**10. Sobre las ecuaciones no lineales.**—En algunas cuestiones de Geometría se presentan ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden *no lineales*. Sólo haremos breve mención de las más conocidas.

**ECUACIÓN DE MONGE.**—Es del tipo lineal en las derivadas segundas, pero no en las primeras, es decir (tipo llamado también *casi-lineal* por ciertos autores).

$$Rr + Ss' + Tt = F \tag{1}$$

en la que  $R, S, T, F$  son funciones de  $x, y, z, p, q$ .

Monge integró esta ecuación buscando una *integral primera* o *intermedia* de ella, es decir, una ecuación de primer orden  $\varphi(x, y, z, p, q) = 0$  tal que toda función  $z$  que la satisfaga, satisfaga asimismo a [1]. Si tal se consigue, su integración (según lecciones 22 y 23) nos dará soluciones de la ecuación dada. Para conseguirlo se despejan  $r$  y  $t$  en las identidades

$$\left. \begin{aligned} d\tilde{p} &= r dx + s dy \\ dq &= s dx + t dy \end{aligned} \right\} \text{ de donde } r = \frac{d\tilde{p} - s dy}{dx} \quad t = \frac{dq - s dx}{dy} \tag{2}$$

sustituyéndolas en [1], con lo que se obtiene, después de multiplicar por  $dx dy$

$$s(R dy^2 - S dx dy + T dx^2) = R d\tilde{p} dy + T dq dx - F dx dy \tag{3}$$

Para satisfacer esta ecuación, equivalente a [1], es *suficiente* satisfacer separadamente las ecuaciones

$$R dy^2 - S dx dy + T dx^2 = 0 \quad \text{o sea} \quad R \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - S \frac{dy}{dx} + T = 0 \tag{4}$$

$$R d\tilde{p} dy + T dq dx - F dx dy = 0 \tag{5}$$

que unidas a

$$dz = p dx + q dy \tag{6}$$

constituyen un sistema que relaciona las cinco variables  $x, y, z, p, q$  y sus diferenciales.

El método de Monge no consiste en integrar dicho sistema, para lo que haría falta una ecuación más, sino en hallar dos *integrales primeras* del mismo, es decir, en deducir de él, si es posible, *dos* relaciones finitas de la forma

$$f_1(x, y, z, p, q) = a, \quad f_2(x, y, z, p, q) = b \tag{7}$$

Se demuestra que si tales integrales existen, toda relación de la forma  $\Phi(f_1, f_2) = 0$  es integral primera de la ecuación dada. En particular lo son, pues  $f_1 = 0$  y  $f_2 = 0$ . Cualquiera de las dos puede ser integrada de acuerdo con las lecciones 22 y 23 dando una solución de [1].

Como la ecuación [4] se desdobra en dos

$$[8] \quad \frac{dy}{dx} = \mu_1(x, y, z, p, q) \quad \frac{dy}{dx} = \mu_2(x, y, z, p, q) \tag{8}$$

se consigue en ocasiones sin dificultad las dos relaciones finitas buscadas [7], una procedente de cada determinación [8] y [8'].

Si de ellas se puede despejar  $p, q$  se demuestra que las expresiones obtenidas  $p(x, y, z), q(x, y, z)$  cumplen la condición de integrabilidad de

$$dz = p(x, y, z)dx + q(x, y, z)dy \tag{9}$$

y la integración de esta diferencial exacta efectuada según lección 22, párrafos 2 y 3, dará asimismo una solución  $z$  de la ecuación dada.

ECUACIONES DE MONGE-AMPÈRE.—Son de la forma

$$Rr + Ss + Tt + U(rt - s^2) = F \quad [10]$$

en la que  $R, S, T, U, F$  son funciones de  $x, y, z, p, q$ .

Este tipo de ecuaciones se obtiene al eliminar por derivación la función arbitraria  $\Phi$  en relaciones de la forma

$$\Phi(u, v) = 0 \quad [11]$$

donde  $u, v$  son funciones conocidas de  $x, y, z, p, q$ . El método de integración consiste precisamente en obtener una integral primera de la forma [11].

Procediendo análogamente a la ecuación anterior, es decir, sustituyendo los valores de  $r$  y  $t$  deducidos de [2] en [10] se obtiene una ecuación que quedará satisfecha anudando separadamente las expresiones siguientes

$$R dy^2 - S dx dy + T dx^2 + U(dx dp + dy dq) = 0 \quad [12]$$

$$R dy dp + T dx dq + U dp dq - F dx dy = 0 \quad [13]$$

que unidas a  $dz = p dx + q dy$  forman un sistema del que se procura hallar integrales primeras  $u(x, y, z, p, q) = a, v(x, y, z, p, q) = b$ . Se demuestra entonces que al sustituir estas  $u, v$  en [11] se obtiene una integral primera de [10].

La marcha general para la obtención de tales integrales primeras es prolija y no es precisa para los sencillos ejemplos que nos limitaremos a presentar (\*).

EJEMPLO 1.º Sea la ecuación  $q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0$ . Las ecuaciones [4] y [5] se convierten aquí en

$$q^2 dy^2 + 2pq dx dy + p^2 dx^2 = 0 \quad \text{o sea} \quad q dy + p dx = 0 \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{p}{q} \quad [14]$$

$$q^2 dp dy + p^2 dq dx = 0 \quad \text{o sea} \quad \frac{dq}{dp} = -\frac{q^2 dy}{p^2 dx} = \frac{q}{p} \quad \frac{dq}{q} = \frac{dp}{p} \quad [15]$$

De esta última se desprende la integral primera  $q - kp = 0$  que se integra mediante el sistema de características

$$-\frac{dx}{k} = dy \quad dz = 0 \quad \text{es decir} \quad x + ky = k_1 \quad z = k_2$$

generatrices rectilíneas paralelas al plano  $xy$ . Las superficies formadas por tales generatrices son, pues, soluciones del problema.

Al mismo resultado se llega combinando directamente las integrales primeras del sistema formado por [14] [15] y por  $dz = p dx + q dy (= 0$  por [14])

$$\frac{q}{p} = k \quad p dx + kp dy = 0 \quad x + ky = k_1 \quad z = k_2$$

Las dos integrales intermedias a que se llega son

$$\frac{q}{p} = \varphi(z) \quad x + \frac{q}{p} y = \psi(z) \quad \text{de donde} \quad \psi(z) = x + \varphi(z) y$$

EJEMPLO 2.º Propongámonos obtener superficies cuyos puntos sean todos parabólicos, es decir, que verifiquen

$$rt - s^2 = 0$$

(\*) El lector que desee más detalles puede consultar las obras y tratados especiales de Goursat, Valiron, Bieberbach, Miller, etc.

El sistema [12] [13] se reduce aquí a  $dp dq=0$ ;  $dx dp + dy dq=0$  que da  $p=a$ ,  $q=b$  y la integral primera  $\Phi(p, q)=0$  ( $\Phi$  arbitraria) que a su vez da (Lagrange-Charpit)  $p=k_1$ ,  $q=\varphi(k_1)$  (arbitraria), de donde  $dz=k_1 dx + \varphi(k_1)dy$  que suministra la integral completa  $z=k_1 x + \varphi(k_1)y + k_2$  (planos).

La integral general se obtendrá sustituyendo  $k_2$  por  $\psi(k_1)$  arbitraria, es decir,

$$z = k_1 x + \varphi(k_1)y + \psi(k_1)$$

haces de planos cuyas envolventes son superficies desarrollables.

EJERCICIOS (Lec. 26 y 27)

Integrar las ecuaciones siguientes :

1.  $x^2 r - xys - xq = 0$ .
2.  $xys - y^2 t - 2xp + 2yq - 2z = 0$ .
3.  $2x^2 z_{xx} - 5xyz_{xy} + 2y^2 z_{yy} + 2xz_x + 2yz_y = 5xy^3$ .
4.  $x^2 r - 3xys + 2y^2 t + xp - 2yq = 4x^2 y \log_0 x$ .
5.  $(x^2 y D_x^2 D_y - xy^2 D_x D_y^2 - x^2 D_x^2 + y^2 D_y^2)z = 6x^2/y$ .
6.  $(D_y^2 + 2D_y - 3)z = 9x^2 y$ .
7.  $(2x D_x^2 - y D_x D_y + 2D_x)z = -2x$ .
8.  $xz_{xy} + z_y = 4e^{2x-u}$ .
9.  $z_{xx} - 3yz_x + 2y^2 z = 2(y-2)e^{2x-u}$ .
10.  $(y D_x D_y - 2D_x)z = 3y \cos x$ .
11.  $s = 4ye^{-2x}$ .
12.  $r + 9z = y^2$ .
13.  $(x D_x^2 + D_x D_y + D_x)z = 0$ .
14.  $xz_{xx} + 2yz_{xy} - z_x = x$ .
15.  $(D_x^2 + y D_x D_y - D_x)z = 0$ .
16. ¿En qué casos será aplicable a la ecuación hiperbólica canónica [7] del § 2 de la lección 26, lo dicho en el § 2 de la misma lección?
17. Demostrar que la ecuación canónica hiperbólica [7] del § 3, lec. 26 se puede integrar mediante dos integraciones sucesivas de ecuaciones de primer orden si  $N - L_u - LM = 0$ . Idem si  $N - M_v - LM = 0$ . Escribáse la ecuación en la forma

$$\frac{\partial}{\partial u} (z_v + Lz) + M(z_v + Lz) + Nz - L_u z - MLz = G$$

18. Aplicar lo anterior a la ecuación  $z_{xy} + e^{xz_x} - z_y = 0$ .
19. Región del plano en la que la ecuación  $r + yt = 0$  es elíptica; ídem hiperbólica. Características y forma canónica reducida en esta última.
20. Ídem para  $r + xt = 0$ .
21. Comprobar que el problema de Cauchy

$$r + 2x = 0, \quad z(x, 0) = 0, \quad z_y(x, 0) = 1 - x^2$$

no es determinado. ¿Por qué?

22. Demostrar que las superficies integrales de las ecuaciones de tipo elíptico, que sólo tienen los términos en las derivadas segundas, tienen sus puntos hiperbólicos (\*).
23. Expresar la solución de la ecuación  $s=0$  que cumpla las condiciones

$$z(x, 0) = f(x), \quad z(0, y) = \varphi(y)$$

$f$  y  $\varphi$  dadas de modo que toman igual valor en el origen  $f(0) = \varphi(0)$ .

24. Aplicar el § 3 de la lec. 26 para hallar la transformación que convierte la ecuación  $a^2 r = t$  en la forma canónica e integrarla valiéndose de dicha transformación
25. Integrar  $u_{xz} = y_{yz}$  donde  $u$  es función de  $x, y, z$ .
26. Expresión general de las funciones  $u(x, y, t)$  que verifican  $u_{xzt} = u_{yzt}$ .
27. Idem para la ecuación  $u_{xxzt} = u_{xyzt}$ .
28. Integrar  $pr = xy^2$ .
29. Idem  $qs = pt$ .
30. Idem  $(D_x^2 - 2x D_x D_y + x^2 D_y^2 - D_y)z = \epsilon x$ .
31. Idem  $x^2 r - xys + yq = 0$

(\*) Las ecuaciones de tipo hiperbólico pueden en cambio tener soluciones con puntos de las tres clases hiperbólicos, parabólicos y elípticos. La relación entre la naturaleza de la ecuación y la de los puntos de las superficies integrales fué cuestión propuesta por Rey Pastor en reciente cursillo desarrollado en el Instituto Nacional de Técnica Aero-náutica.



## Capítulo X.—APLICACIONES DE LAS ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES A LA FÍSICA

### LECCIÓN 28.—PROBLEMAS DE TIPO HIPERBÓLICO CON DOS VARIABLES. CUERDA VIBRANTE. ECUACIÓN DE LOS TELEGRAFISTAS.

**I. Carácter de los problemas de la Física matemática.**—En este capítulo nos proponemos simplemente dar una muy ligera idea de los problemas relativos a ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden, que pueden llamarse ya clásicos de la Física matemática, y presentar, con ocasión de ellos, algunas muestras de cómo se manejan los recursos teóricos expuestos en el capítulo anterior, y otros que presentaremos como especialmente adecuados a cada problema en estudio.

En dos grandes grupos podemos clasificar estos problemas :

I. Los que describen estados *variables con el tiempo*. Los más interesantes, por llenar casi toda la Física, son los relativos a fenómenos de carácter ondulatorio, propagatorio. Se comprende que en ellos se presentarán frentes de onda, es decir, curvas o superficies características en los que la solución deja de ser regular por presentar discontinuidades, en general, en las derivadas segundas. Esta clase de fenómenos vienen descritos por ecuaciones de *tipo hiperbólico* (cuerdas, placas y medios vibrantes, transmisiones en cables eléctricos) o de *tipo parabólico* (propagación del calor, difusión...).

II. Los que describen *estructuras o estados físicos estacionarios*. Los problemas más salientes de esta naturaleza son los relativos a la teoría del potencial (potencial de fuerzas mecánicas, eléctricas, magnéticas, potencial de velocidades, etc. ...). Por definición misma de *potencial* se comprende que en estos últimos problemas interesarán sobre todo soluciones *regulares*, es decir, *derivables y con derivadas continuas*, al menos hasta un cierto orden. Corresponden a ecuaciones de *tipo elíptico*.

En unos y en otros problemas cuyas soluciones generales dependen de funciones arbitrarias, habrá que determinar estas funciones por condiciones supletorias que, a su vez, se clasifican en dos categorías :

a) Condiciones llamadas *iniciales*: Para un valor particular de una de las variables' (generalmente el instante *inicial* de la variable tiempo) se dan los valores de la función y de una de sus derivadas parciales. Dan lugar a problemas del tipo Cauchy.

b) Condiciones llamadas de *contorno*: Sólo se dan los valores de la función o de una derivada en una línea o superficie límite del dominio considerado y hay que determinar los valores de la función en el interior de dicho dominio sabiendo, por ejemplo, que la función tiene que ser

regular en su interior. Tal es el problema llamado de Dirichlet consistente en hallar una función regular en un dominio que cumpla en él la ecuación de Laplace  $\Delta u=0$ , dados sus valores en el contorno. La nueva condición de regularidad *en todo el dominio* suple al conocimiento de una de las funciones derivadas en: el problema de Cauchy.

Los problemas del tipo de Cauchy y de Dirichlet son los dos problemas centrales de la teoría de ecuaciones en derivadas parciales, el primero generalmente unido a las ecuaciones de tipo hiperbólico y el segundo a las de tipo elíptico, por las razones antes expuestas.

Ello no significa que no se pueda enunciar y resolver problemas de tipo Cauchy en las ecuaciones de tipo elíptico. Lo que ocurre es que el teorema de existencia en los problemas de tipo Cauchy (v. lec. anterior) sólo asegura la regularidad de la solución en las inmediaciones (más o menos amplias) de la curva o superficie inicial. En cambio el problema de Dirichlet no suele tener solución en las ecuaciones de tipo hiperbólico, más que aplicado a contornos de carácter excepcional (por ejemplo, dando los valores de la función a lo largo de dos características en las ecuaciones con dos variables).

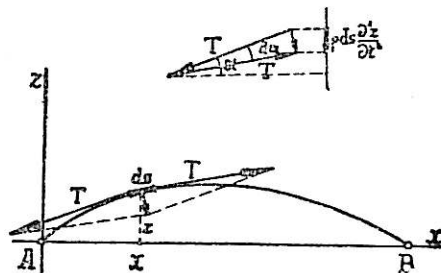
Finalmente, hemos de advertir que existen numerosos problemas con *condiciones mixtas*: *iniciales* y de *contorno* cuyo tratamiento se pondrá de manifiesto en los ejemplos que seguirán en este capítulo.

**2. La ecuación de la cuerda vibrante.**— El primer ejemplo de problema con condiciones mixtas que vamos a desarrollar va a ser el estudio de las vibraciones de una cuerda tensa sujeta por los extremos  $A, B$  (cuerdas de los instrumentos musicales: piano, violín, guitarra, etc.).

Esta cuerda se aparta inicialmente ( $t=0$ ) de su posición de equilibrio según una curva dada de ecuación  $z=f(x)$  (referida a un eje  $x$  coincidente con la posición de equilibrio y a un eje  $z$  perpendicular) origen en un extremo  $A$  de la cuerda y se suelta sin velocidad inicial o, más generalmente, dando a cada punto una velocidad inicial en dirección del eje  $z$  que suponemos conocida  $v(x)$ .

Se trata de averiguar la ecuación  $z=z(x, t)$  que da el movimiento de cada uno de sus puntos o, lo que es lo mismo, la configuración de la cuerda en función del tiempo. Como se ve, este problema es caso particular del de Cauchy, puesto que se conocen la curva inicial  $z(x, 0)=f(x)$  y la velocidad inicial  $z_t(x, 0)=v(x)$ . Pero se añade a estas condiciones iniciales la sujeción en los extremos  $A, B$ , es decir, las condiciones de contorno  $z(0, t)\equiv 0, z(l, t)\equiv 0$ , siendo  $l$  la longitud de la cuerda.

Despreciando el peso de la cuerda frente a la tensión y a las fuerzas de inercia, en todo momento debe existir equilibrio entre las tensiones  $T$  aplicadas en los extremos de un elemento de cuerda  $ds$  y la fuerza de inercia cuya proyección sobre el eje  $z$  se formulará (llamando  $z$  a la distancia de dicho elemento a su posición de equili-



brio,  $\rho$  a la masa por unidad de longitud)  $\rho ds \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ , usando la notación de derivada parcial para indicar la derivación con respecto al tiempo, ya que  $z$  depende asimismo de la distancia  $x$  del elemento considerado al extremo  $A$  de la cuerda. Llamando, finalmente,  $\alpha$  al ángulo que forma la tangente a la curva adoptada por la cuerda al deformarse, se tendrá, proyectando el triángulo de equilibrio (v. figura) sobre la vertical

$$T \operatorname{sen} \alpha - T \operatorname{sen} (\alpha - d\alpha) = \rho ds \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

Sustituyendo  $\operatorname{sen} \alpha$  por  $\alpha$ , toda vez que se trata de ángulos muy pequeños, quedará

$$\frac{T}{\rho} \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

pero  $\frac{d\alpha}{ds} = \text{curvatura} = z''$  en la hipótesis de pequeñez del ángulo  $\alpha$  (véase tomo I, lecc. 31); por consiguiente, quedará la ecuación

$$a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad [1]$$

donde la constante  $a^2 = T/\rho$  es esencialmente positiva (\*). Las soluciones de esta ecuación darán las configuraciones  $z(x, t)$  de la cuerda al variar  $t$ .

Ahora bien, para la integración de esta ecuación podemos seguir dos caminos.

**3. La solución de D'Alembert.**—El primer camino es adaptar la integral general de esta ecuación, obtenida en lección 24, § 3.

$$z = \varphi(x - at) + \psi(x + at) \quad \varphi, \psi \text{ arbitrarias} \quad [2]$$

a las condiciones iniciales dadas, con lo que se deberá tener

$$z(x, 0) = \varphi(x) + \psi(x) = f(x) \\ z_t(x, 0) = a[-\varphi'(x) + \psi'(x)] = v(x) \quad \varphi(x) - \psi(x) = -\frac{1}{a} \int_0^x v(x) dx$$

lo que determina las funciones arbitrarias  $\varphi\psi$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x v(x) dx \quad \psi(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x v(x) dx$$

y con ellas la solución, que adquiere la forma

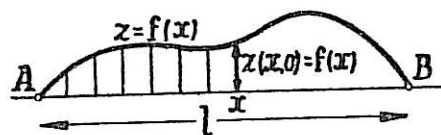
$$z = \frac{1}{2} \left[ f(x - at) + f(x + at) + \frac{1}{a} \int_{x-at}^{x+at} v(x) dx \right] \quad [3]$$

(\*) La constancia de  $T$  es también en el supuesto de ser muy pequeñas las deformaciones.

y para el caso de velocidad inicial nula  $v(x) \equiv 0$

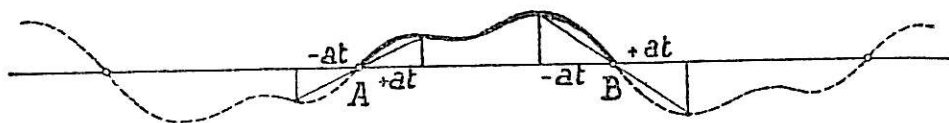
$$z = \frac{1}{2} [f(x - at) + f(x + at)] \quad [4]$$

Esta expresión no es en verdad muy elocuente para el físico en relación con la esencia acústica del fenómeno planteado. ¿Dónde están en ella de manifiesto los armónicos del sonido emitido por la cuerda al vibrar? Veamos, sin embargo, como la sujeción de los extremos  $A$  y  $B$  de la cuerda engendra el carácter periódico ondulatorio de las soluciones



Observemos que  $f(x)$  se supone sólo definida, por la deformación inicial de la cuerda, en el intervalo  $0, l$ ; sin embargo, al crecer  $t$  los argumentos  $x - at$  y  $x + at$  de la solución [4] varían de  $-\infty$  a  $+\infty$ .

¿Cómo completar, pues, la función  $f(x)$  en todo el intervalo real de la

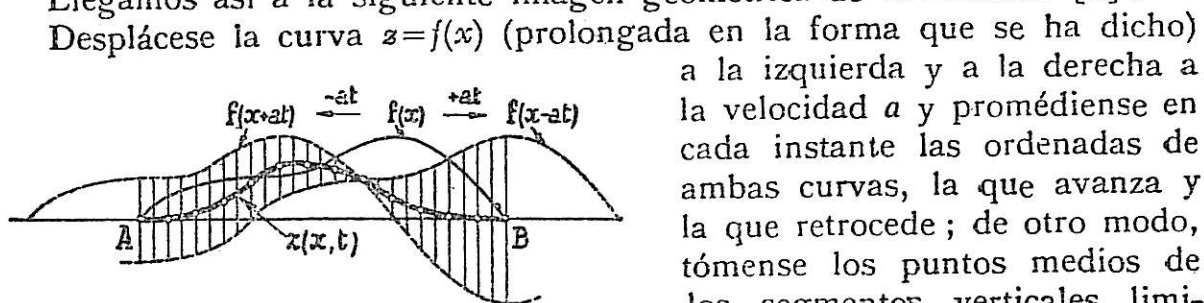


variable? Procurando que la solución [4] sea constantemente nula para  $x=0$  y  $x=l$ ; es decir, deberá tenerse, cualquiera que sea  $t$

$$f(at) = -f(-at) \quad f(l+at) = -f(l-at)$$

lo que indica (v. figura) que la curva  $f(x)$  prolongada tiene que ser simétrica respecto de los puntos  $A$  y  $B$ . Ahora bien, cada trozo añadido a un extremo engendra un nuevo trozo simétrico en el otro, con lo que la curva  $f(x)$  se prolonga indefinidamente en los dos sentidos, como deseábamos, y adquiere además carácter periódico.

Llegamos así a la siguiente imagen geométrica de la solución [4]:



Desplácese la curva  $z=f(x)$  (prolongada en la forma que se ha dicho) a la izquierda y a la derecha a la velocidad  $a$  y promédiense en cada instante las ordenadas de ambas curvas, la que avanza y la que retrocede; de otro modo, tómense los puntos medios de los segmentos verticales limitados por ambas curvas y el lugar geométrico de los puntos así obtenidos dará en cada instante la forma teórica de la cuerda vibrante.

Vemos, pues, cómo se pueden manejar las dos ondas de avance y retroceso de que hemos hablado en la lección anterior, párrafo 7, para construir gráficamente la solución. Pero sigue sin aparecer, con este tratamiento matemático, la descripción musical del fenómeno, que es el que interesa en Acústica. Esta interpretación no la da la solución general, sino las soluciones particulares, según vamos a ver.

4. **La solución de Bernoulli.**—Aplicemos a esta ecuación puesta en la forma  $\Phi(D_x D_y)z \equiv (a^2 D_x^2 - D_t^2)z = 0$  el método indicado en los párrafos 4.º y 5.º de la lección 24, es decir, hallemos soluciones del tipo  $e^{\alpha x + \beta t}$ . Los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  deberán verificar la condición

$$a^2 \alpha^2 - \beta^2 = 0 \quad \text{de donde} \quad \beta = \pm a \alpha$$

La ecuación admite, pues, soluciones de la forma

$$z = e^{\pm a \alpha t} \cdot e^{\alpha x} \quad \alpha \text{ arbitrario}$$

Pero si  $\alpha$  es real, estas funciones no se anulan para ningún valor real de  $x$  y no pueden cumplir las condiciones de contorno. Demos, pues, a  $\alpha$  valores complejos poniendo  $\alpha = \mu + \nu i$  y las soluciones adoptarán la forma

$$z = e^{\pm a \mu t} e^{\mu x} \text{ sen } (a \nu t + \varphi) \text{ sen } (\nu x + \psi)$$

Ahora bien, para  $x=0$  y  $x=l$  debe ser  $z=0$  cualquiera que sea  $t$ , lo que exige  $\text{sen } \psi = 0$ ,  $\text{sen } (\nu l + \psi) = 0$ . Adoptemos, pues,  $\psi = 0$  y, por tanto,  $\nu = \pm \frac{\pi}{l} n$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ).

Por otra parte, en el fenómeno físico los extremos  $A$  y  $B$  desempeñan entre sí el mismo papel, lo que exige soluciones simétricas respecto del punto medio o de la mediatriz de  $AB$ . Cumplen estas simetrías los factores trigonométricos (pues  $\text{sen } \frac{\pi n}{l} (l-x) = \text{sen} \left( \pi n - \frac{\pi n}{l} x \right) = \mp \text{sen } \frac{\pi n}{l} x$ ) pero no el exponencial  $e^{\mu x}$ . Pongamos, pues,  $\mu = 0$  y quedémonos, en definitiva, con soluciones de la forma

$$z = \text{sen} \left( \frac{a \pi n}{l} t + \varphi_n \right) \text{ sen} \left( \frac{\pi n}{l} x \right) \quad [5]$$

formando con ellas una combinación lineal arbitraria, en forma de suma o serie (lec. 24, § 5),

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \text{ sen} \left( \frac{a \pi n}{l} t + \varphi_n \right) \text{ sen} \left( \frac{\pi n}{l} x \right) \quad [6]$$

Hemos omitido el doble signo de  $\nu$  que no da mayor generalidad a la solución, pues debiendo ser *el mismo* valor de  $\nu$  en ambos factores puede suponerse positivo cambiando el signo en ambos si es preciso.

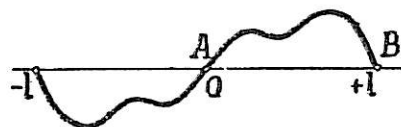
Los coeficientes  $C_n$  (amplitudes), así como las fases  $\varphi_n$  de los términos de esta serie trigonométrica, vendrán determinados por la configuración inicial y por la velocidad inicial de la cuerda. Dada, por ejemplo,  $z=f(x)$  para  $t=0$  y velocidad inicial  $z'_t$  nula, habrá de tenerse

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \text{ sen } \varphi_n \text{ sen } \frac{\pi n}{l} x = f(x) \quad (z'_t)_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{a \pi n}{l} \cos \varphi_n \text{ sen } \frac{\pi n}{l} x = 0$$



Esta última sólo puede verificarse idénticamente para  $\cos \varphi_n = 0$  y, por tanto,  $\sin \varphi_n = 1$ .

Bastará, pues, desarrollar en serie de Fourier en el intervalo  $-l, +l$  la función  $f(x)$  prolongada con su simétrica respecto del origen  $A$  (v. párrafo anterior) función que por imparidad sólo dará términos en *seno* (v. tomo I, lec. 17).



Es decir, desarrollar

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x$$

o su equivalente

$$f\left(\frac{l\xi}{\pi}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} n\xi \quad \text{con} \quad \xi = \frac{\pi}{l} x$$

lo que dará

$$C_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f\left(\frac{l\xi}{\pi}\right) \operatorname{sen} n\xi d\xi$$

Estos valores de  $C_n$ , sustituidos en la serie [6], dan la solución del problema.

**5. Comparación entre la solución matemática y la solución físico-matemática.**—Conviene que el lector se percate bien de la diferencia esencial entre los dos métodos seguidos.

El método del párrafo 3 (d'Alembert) opera sobre la *solución más general*, que podríamos llamar *matemática*, con escasas enseñanzas en el orden físico.

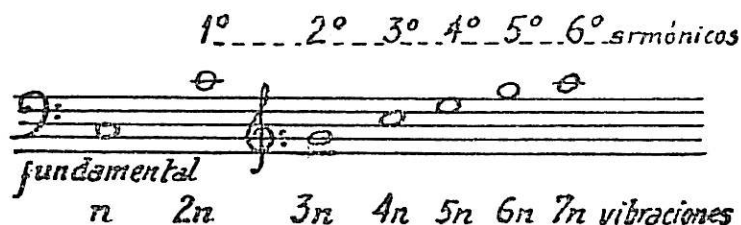
El método seguido en el párrafo anterior (Bernouilli) consiste en *seleccionar* las *soluciones particulares* que mejor se adaptan al fenómeno físico, el cual está así presente en todo el proceso deductivo. No es de extrañar, por tanto, que la solución así obtenida sea asimismo mucho más elocuente y rica en consecuencias de orden físico.

Así en la solución [6] se hallan prácticamente contenidas todas las leyes de la acústica elemental. Esta solución nos dice que la vibración de la cuerda se compone, en general, de una serie de vibraciones superpuestas :

- |   |  |  |
|---|--|--|
| <p>1.ª <math>C_1 \operatorname{sen} \left( \frac{a\pi}{l} t + \varphi_1 \right) \operatorname{sen} \frac{\pi}{l} x</math></p>   | <p>Tono fundamental.</p>   |  |
| <p>2.ª <math>C_2 \operatorname{sen} \left( \frac{2a\pi}{l} t + \varphi_2 \right) \operatorname{sen} \frac{2\pi}{l} x</math></p> | <p>Primer armónico, frecuencia doble. Un nodo intermedio.</p>      |  |
| <p>3.ª <math>C_3 \operatorname{sen} \left( \frac{3a\pi}{l} t + \varphi_3 \right) \operatorname{sen} \frac{3\pi}{l} x</math></p> | <p>Segundo armónico, frecuencia triple. Dos nodos intermedios.</p> |  |



La significación musical de estos armónicos, correspondientes a frecuencias dobles, triples, cuádruples, ..., de la del tono fundamental, es la siguiente: El primer armónico da la nota octava del tono fundamental; el segundo armónico la quinta sobre esta octava, el tercero da la segunda octava, el cuarto da la tercera sobre esta octava, etc. De modo que si la nota fundamental es el  $do_2$  las resonancias de los armónicos dan la siguiente sucesión de notas musicales:



De ello se desprende la relación de frecuencias que caracterizan los intervalos musicales puros: octava =  $\frac{2}{1}$ ; quinta =  $\frac{3}{2}$ ; cuarta =  $\frac{4}{3}$ ; tercera mayor =  $\frac{5}{4}$ ; tercera menor =  $\frac{6}{5}$ ; segunda =  $\frac{7}{6}$ .

NOTA.—Es curioso observar finalmente que la solución de Bernouilli, pese a su significación esencialmente física, tuvo una enorme trascendencia en el campo de la matemática pura, pues fué la que sugirió la posibilidad de desarrollar en serie trigonométrica una función arbitraria incluso representable por trozos de distintas rectas, como es, por ejemplo, la configuración inicial de la cuerda simplemente *pulsada* en un punto. La representación de dos funciones algebraicamente distintas por un mismo algoritmo funcional se tenía por imposible en tiempos de Euler. Por ello el famoso problema de la cuerda vibrante dió origen a una larga polémica entre d'Alembert, Euler, Bernouilli, Lagrange, ... Fué Fourier quien más tarde, al estudiar por método análogo el fenómeno de la propagación del calor, dejó sentada categóricamente la posibilidad de tales desarrollos (\*).

**6. Ecuación de los telegrafistas.**—Al plantear matemáticamente el estudio del régimen de intensidades  $i$  y tensiones  $u$  a lo largo de una línea eléctrica bifilar (o trifilar simétrica) con las constantes  $c$  (capacidad),  $l$  (autoinducción),  $r$  (resistencia),  $g$  (perditancia) por unidad de longitud, se obtiene el clásico sistema de Lord Kelvin (\*\*)

(\*) Véase una breve reseña de esta polémica en las célebres lecciones de Riemann «Partielle Differentialgleichungen».

(\*\*) V., p. ej., nuestras conferencias en la Escuela de Ingenieros Industriales sobre «La matemática en la transmisión de la energía eléctrica».

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= l \frac{\partial i}{\partial t} + ri \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= c \frac{\partial u}{\partial t} + gu \end{aligned} \right\} \quad [1]$$

en el que las variables son el tiempo  $t$  y la distancia  $x$  a un extremo de la línea.

Se elimina fácilmente por derivación una u otra de las funciones, por ejemplo la  $i$ . Así, derivando la primera ecuación respecto de  $x$ , y la segunda respecto de  $t$ , resultará:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= l \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} + r \frac{\partial i}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} &= c \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + g \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \right\}$$

de donde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = lc \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + lg \frac{\partial u}{\partial t} + r \left( c \frac{\partial u}{\partial t} + gu \right)$$

o sea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = cl \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (rc + gl) \frac{\partial u}{\partial t} + rg u \quad [2]$$

y análogamente se obtiene

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = cl \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (gl + rc) \frac{\partial i}{\partial t} + gri \quad [3]$$

Es decir, lo mismo la tensión  $u$  que la intensidad  $i$  son funciones de  $t$  y de  $x$  que verifican la llamada ecuación de los telegrafistas [2], que es del tipo hiperbólico como se ve pasando todos los términos al primer miembro y teniendo en cuenta que las constantes  $r$ ,  $l$ ,  $c$ ,  $g$  de la línea son esencialmente positivas.

Las condiciones iniciales y de contorno pueden ser las más diversas según la clase de problema de que se trate, y para satisfacerlas el electrotécnico las soluciones particulares que mejor se acomoden a cada caso.

Recordando lo dicho en la lec. 24, § 4, obtendremos soluciones de forma exponencial  $e^{\alpha t + \beta x}$  para todo par de valores de  $\alpha$  y  $\beta$  que verifiquen la ecuación

$$cl\alpha^2 + (rc + lg)\alpha + rg = \beta^2 \quad \text{o sea} \quad (l\alpha + r)(c\alpha + g) = \beta^2 \quad [4]$$

de los cuales interesan al electrotécnico sólo los correspondientes a valores imaginarios de  $\alpha$ , es decir, a soluciones periódicas o periódicas amortiguadas en  $t$ , cual corresponde a la verdadera naturaleza de las oscilaciones en la línea.

A tales valores de  $\alpha = -\delta + j\omega$  corresponden valores de  $\beta$  complejos opuestos  $\beta = \pm(\mu + j\nu)$  y, por tanto, pares de soluciones de la forma

$$Me^{-\delta t + \mu x} \operatorname{sen}(\omega t + \nu x + \varphi_1) \quad Ne^{-\delta t - \mu x} \operatorname{sen}(\omega t - \nu x + \varphi_2) \quad [5]$$

Estas soluciones y sus combinaciones lineales por suma o series bastan para satisfacer los diversos casos que interesan al electrotécnico.

I. RÉGIMEN PERMANENTE.—En los problemas de transmisión de energía interesa considerar ante todo el régimen *permanente*, que es el que queda establecido en la línea después de los períodos transitorios de conexión o desconexión de grupos generadores o de cargas consumidoras en la red de explotación. Es un régimen oscilatorio armónico, *cuya frecuencia  $\omega$  viene impuesta por los generadores*. En tal régimen tenemos como dato la variación  $u(o, t)$  de la tensión en el origen de la línea ( $x=0$ ) dada por los generadores, tensión alterna de la forma armónica  $A \operatorname{sen}(\omega t + \psi)$  y se trata de conocer cómo se propaga esta tensión a lo largo de la línea. La oscilación para  $x=0$  sólo será de esta forma si en las soluciones arriba consignadas suponemos  $\delta=0$ , es decir, si  $u(x, t)$  es de la forma

$$u(x, t) = Me^{\mu x} \operatorname{sen}(\omega t + \nu x + \varphi_1) + Ne^{-\mu x} \operatorname{sen}(\omega t - \nu x + \varphi_2) \quad [6]$$

donde  $\omega$  coincide con la pulsación de los generadores, es decir, si éstos originan una f.e.m. alterna de 50 períodos por segundo  $\omega = 100\pi$ .

Razonando como en el párrafo 7 de la lección anterior, se ve que el sumando  $Ne^{-\mu x} \operatorname{sen}(\omega t - \nu x + \varphi_2)$  representa una onda armónica amortiguada en el sentido de las  $x$  crecientes que avanza en el mismo sentido a la velocidad  $\frac{\omega}{\nu}$ , pues al cabo del tiempo  $\tau$  la tensión correspondiente en el punto  $x + \frac{\omega}{\nu} \tau$  es la misma que en el instante actual  $t$  en el punto  $x$  [basta comprobar  $\omega(t + \tau) - \nu(x + \frac{\omega}{\nu} \tau) = \omega t - \nu x$ ].

Análogamente el término  $Me^{\mu x} \operatorname{sen}(\omega t + \nu x + \varphi_1)$  representa una onda armónica amortiguada en el sentido de las  $x$  decrecientes y que avanza en dicho sentido a la misma velocidad.

Impuesta  $\omega$  por la frecuencia de los generadores y existiendo entre  $\mu$  y  $\nu$  las dos relaciones que resultan de sustituir  $\alpha = j\omega$ ,  $\beta = \mu + j\nu$  en [4]

$$(j\omega l + r)(j\omega c + g) = (\mu + j\nu)^2 \begin{cases} rg - l\omega^2 = \mu^2 - \nu^2 \\ \omega(lg + rc) = 2\mu\nu \end{cases} \quad [7]$$

quedan determinadas  $\mu$  y  $\nu$

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{2}(ph + rg - cl\omega^2)} \quad \nu = \sqrt{\frac{1}{2}(ph - rg + cl\omega^2)}$$

donde

$$p = \sqrt{r^2 + \omega^2 l^2} \quad h = \sqrt{g^2 + \omega^2 c^2}$$

Por tanto, en la expresión [6] del régimen quedan sólo indeterminadas las constantes  $M N_{\varphi_1 \varphi_2}$  que se determinarán en función de las constantes terminales (amplitud y fase) en los extremos de la línea.

La variación del régimen en la línea queda mucho más sencillamente expresada usando la notación vectorial, pero la exposición de las ecuaciones vectoriales de Blondel, a que se llega con tal notación, nos prolongaría demasiado este párrafo.

II. OSCILACIONES LIBRES. RÉGIMEN TRANSITORIO.—El tránsito de un régimen permanente a otro (al efectuar una conexión súbita, al variar bruscamente la carga, etc.) no se realiza de modo discontinuo, sino siguiendo un régimen continuo transitorio que puede obtenerse, de acuerdo con el principio físico de superposición de efectos, sumando a la solución que constituye el régimen permanente deseado, las soluciones correspondientes al *régimen libre*, es decir, sin f.e.m. que las mantenga. Tales oscilaciones *libres* darán el sumando de tránsito entre dos regímenes permanentes y habrá que calcularlas de modo que no haya discontinuidad en la variación.

Se comprende que tales oscilaciones serán de carácter amortiguado con el tiempo por la pérdida de energía debida a la resistencia óhmica y a la conductancia lateral y, por consiguiente, que las soluciones que las describen son las del tipo general [5] con  $\delta \neq 0$ . Formularemos, pues, el régimen libre mediante una serie de términos de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\delta_n t + \mu_n x} \operatorname{sen}(\omega_n t + \nu_n x + \varphi_n) + B_n e^{-\delta_n t - \mu_n x} \operatorname{sen}(\omega_n t - \nu_n x + \psi_n) \quad [8]$$

siendo de advertir que ahora los valores de  $\omega$  ya no son impuestos por la frecuencia de los generadores, sino que *dependen de las constantes de la línea y de las condiciones de contorno de la misma*, del mismo modo que la cuerda vibrante del problema anterior tiene sus períodos propios de vibración independientes de los que pudiera imponerles una diapason atado a un extremo (\*).

Entre las cantidades  $\delta$ ,  $\omega$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  existen ahora las relaciones que resultan de poner en [4]  $\alpha = -\delta + j\omega$ ,  $\beta = \mu + j\nu$ , o sea

$$(-\delta l + j\omega l + r)(-\delta c + j\omega c + g) = (\mu + j\nu)^2$$

que se desdobra en

$$\left. \begin{aligned} cl[(m - \delta)^2 - q^2 - \omega^2] &= \mu^2 - \nu^2 \\ cl\omega(m - \delta) &= \mu\nu \end{aligned} \right\} \quad [9]$$

(\*) Obsérvese que la ecuación de los telegrafistas se reduce a la de la cuerda vibrante cuando la resistencia  $r$  y la perditancia  $g$  pueden considerarse despreciables. Para precisar más el símil acústico podríamos recordar el teléfono de los niños constituido por un hilo tenso entre dos membranas de papel atadas a dos tubos, o la imitación de una campana mediante la vibración de una cuchara colgante del hilo por un extremo y sujeto el otro extremo del hilo al «teléfono» citado. Las vibraciones *forzadas* del hilo impuestas a él por la palabra o por la cuchara corresponden al régimen de oscilación creado en la línea por el alternador de la Central generadora. El hilo vibra no con sus frecuencias propias como cuerda vibrante, sino con las que le impone la voz o la cuchara, aunque a ellas se unan las vibraciones propias amortiguadas en períodos transitorios, en general de breve duración.

con  $m = \frac{1}{2} \left( \frac{r}{l} + \frac{g}{c} \right)$   $q = \frac{1}{2} \left( \frac{r}{l} - \frac{g}{c} \right)$  ( $q$  llamado factor de distorsión).

A cada cuaterna de valores  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$ ,  $\omega$  que satisfacen este sistema corresponde una solución particular. Necesitamos otras dos condiciones de contorno para individualizar las soluciones. Estas condiciones son las que resultan de la conexión terminal: extremos en vacío, en corto o conectados a impedancias conocidas.

Supongamos, por ejemplo, la línea *en corto* en ambos extremos, es decir,  $u(0, t) = u(a, t) = 0$  para todo  $t$  ( $a$  longitud de la línea). Toda oscilación *propia* de la línea habrá, pues, de cumplir

$$\left. \begin{aligned} A_n e^{-\delta t} \operatorname{sen}(\omega_n t + \alpha_n) + B_n e^{-\delta t} \operatorname{sen}(\omega_n t + \beta_n) &= 0 \\ A_n e^{-\delta t + \mu a} \operatorname{sen}(\omega_n t + \nu_n a + \alpha_n) + B_n e^{-\delta t - \mu a} \operatorname{sen}(\omega_n t - \nu_n a + \beta_n) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ para todo } t$$

La primera exige  $\beta_n = \alpha_n$ ,  $B_n = -A_n$  (\*), y la segunda, una vez hechas estas sustituciones, exige  $\mu = 0$  y además (recordando la fórmula que da la diferencia de senos)

$$2 \cos(\omega_n t + \alpha_n) \operatorname{sen} \nu_n a = 0 \quad \text{y, por tanto,} \quad \nu_n a = n\pi$$

Tenemos, pues, una sucesión de valores propios para  $\nu$

$$\nu_1 = \frac{\pi}{a}, \quad \nu_2 = \frac{2\pi}{a}, \quad \nu_3 = \frac{3\pi}{a}, \quad \dots, \quad \nu_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \dots$$

y los correspondientes valores para  $\delta$  y  $\omega$  deducidos del sistema [9] poniendo en él  $\mu = 0$ . Resulta  $\delta = m$  fijo,  $\omega_n = \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{cl a^2} - q^2}$ .

Análogos resultados se obtienen para la línea en vacío.

Si la línea está en vacío en un extremo y en corto en el otro, los valores propios de  $\nu$  son  $\nu_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{a}$ . En uno y otro caso la sucesión de valores  $\nu_n$  están en progresión aritmética.

Más complicada es la sucesión de valores propios cuando la línea está cerrada en uno o en ambos extremos por impedancias conocidas (transformadores de entrada y salida). Se obtienen entonces los autovalores resolviendo ecuaciones trascendentes de la forma  $\operatorname{tg} \xi = 1 : \xi$  ó  $\operatorname{tg} \xi = k \xi : (b \xi^2 + d)$  análogas a las expuestas en la lección 14 al tratar del problema general de autovalores de una ecuación diferencial ordinaria (\*\*). La sucesión de autovalores ya no forma aquí progresión aritmética y la serie que se obtendrá al sustituir en [8], aunque trigonométrica no es del tipo Fourier.

**7. Cálculo del régimen transitorio.**—En posesión ya de la solución  $u_p(x, t)$ , que caracteriza un régimen permanente dado por [6] y formuladas las oscilaciones libres de la línea  $u_l(x, t)$  dadas por [8], según las condicio-

(\*) O bien  $\beta_n = \alpha_n \pm k\pi$ ,  $B_n = A_n$ , que conduce a los mismos resultados.

(\*\*) Para más detalles véase las conferencias del autor citadas. Los cálculos se simplifican utilizando la notación vectorial.



nes en los extremos, todo régimen transitorio  $u(x, t)$ , según lo dicho antes, vendrá expresado por

$$u(x, t) = u_p(x, t) + u_1(x, t) \quad [10]$$

Habrá que particularizar el régimen libre  $u_1(x, t)$  teniendo en cuenta el régimen inicial dado, al objeto de asegurar la continuidad de  $u$ .

Así, si se da la función inicial  $u(x, 0) = u_0(x)$  (por ejemplo régimen estático  $u_0 = k$ , o bien régimen permanente anterior existente en el momento  $t=0$ , en que suponemos se verifica el paso brusco al nuevo régimen  $u_p$ ) se habrá de verificar

$$u_1(x, 0) = u_0(x) - u_p(x, 0) \quad [11]$$

En esta ecuación se conoce el segundo miembro; se conoce la forma de la serie trigonométrica que expresa el primero  $u_1$ ; pero se desconocen los coeficientes de dicha serie. El problema del cálculo de un régimen transitorio queda así reducido al cálculo de los coeficientes de una serie trigonométrica o exponencial equivalente, para que esta serie represente una función conocida.

Si los valores propios de  $v_n$ , que aparecen en los términos de dichas series, constituyen una progresión aritmética, el cálculo en cuestión es un problema clásico de análisis armónico.

Si tales valores no están en progresión aritmética (y este es el caso general en que existen impedancias terminales), este cálculo presentará la mayor parte de las veces serias dificultades. Para allanarlas se han ideado modernamente métodos de cálculo más expeditivos, de los que hablaremos más adelante.

NOTA.—El régimen transitorio tiene interés en las líneas de *transmisión de energía* sólo como régimen *excepcional* producido por cambios bruscos de carga en la línea (conexiones, desconexiones, descargas atmosféricas...). En cambio, en líneas de *transmisión de señales* (telégrafos), este régimen es el *habitual*; por eso la ecuación fué bautizada con la especialidad de los ingenieros que más a fondo tuvieron que estudiarla.

#### NOTA

8. **Tubos sonoros.**—Como veremos en la próxima lección, la propagación de ondas en un medio elástico homogéneo e isótropo obedece (bajo ciertas condiciones físicas que pueden admitirse en primera aproximación en el estudio de los fenómenos acústicos) a una ecuación de la forma

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

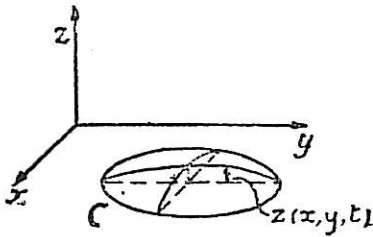
El primer miembro es el operador laplaciano, que en un medio unidimensional, como es sensiblemente un tubo sonoro, se reduce a  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , siendo  $x$  la abscisa longitudinal del

tubo. Las vibraciones de un tubo sonoro se rigen pues por la misma ecuación que las de una cuerda vibrante, con distinta significación para la función  $u$  que puede aquí representar el desplazamiento longitudinal oscilatorio de las moléculas. Si el tubo es cerrado en un extremo las condiciones de contorno son aquí  $u' = 0$  ( $u$  máxima) en el extremo abierto y  $u = 0$  en el cerrado; o bien  $u' = 0$  en ambos extremos si es abierto en ellos.



LECCIÓN 29.—ECUACIONES DE TIPO HIPERBÓLICO CON MÁS DE DOS VARIABLES.  
MEMBRANA VIBRANTE. ECUACIÓN DE ONDAS

**1. Ecuación de la membrana vibrante.**—Consideraciones análogas a las desarrolladas para obtener la ecuación de la cuerda vibrante permiten obtener la ecuación que rige el movimiento vibratorio de una membrana plana en estado de equilibrio, sujeta por su contorno  $C$ . Esta ecuación es



$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad [1]$$

en la que  $a^2$  es una constante positiva igual al cociente  $T : \rho$  de la tensión de la membrana por su masa específica. La función  $z(x, y, t)$  nos dará la forma de la membrana al vibrar. Para cada valor de  $t$  se tiene una superficie. Fijadas  $x, y$  la función de  $t$  resultante habrá de dar la oscilación del punto de la membrana situado en la vertical del punto  $x, y$ .

Esta ecuación, con las tres variables independientes  $x, y, t$  es del tipo *hiperbólico*, como se ve pasando a un miembro todos sus términos.

Con objeto de obtener soluciones adaptadas a las condiciones físicas del problema vamos a aplicar aquí el método de separación de variables buscando soluciones que sean producto de una función de  $x, y$  por otra de  $t$

$$z(x, y, t) = Z(x, y) T(t) \quad [2]$$

hipótesis que equivale a admitir la existencia de oscilaciones sincrónicas en toda la membrana obedientes a una misma ley  $T(t)$  en función del tiempo, pero de valores variables con el punto  $x, y$  de la membrana.

Sustituyendo en [1] resulta

$$a^2 T(t) \left[ \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right] = Z(x, y) T''(t) \quad \text{o bien} \quad \frac{a^2}{Z(x, y)} \left( \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right) = \frac{T''(t)}{T(t)} \quad [3]$$

Como el primer miembro es independiente de  $t$  y el segundo es independiente de  $x, y$  no pueden ser iguales más que siendo ambos iguales a una constante.

Pondremos, pues,

$$\frac{T''}{T} = -\omega^2 \quad \frac{a^2}{Z} \left( \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right) = -\omega^2$$

La primera ecuación da

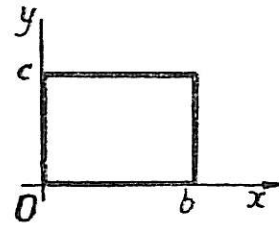
$$T'' + \omega^2 T = 0 \quad \text{de donde} \quad T = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

ecuación del movimiento armónico que dice que la oscilación vertical de cada punto de la membrana tiene carácter armónico. Obsérvese que con signo positivo de  $\omega^2$  hubiésemos obtenido soluciones de la forma  $T = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}$ , es decir, movimiento vertical aperiódico y, por tanto, ausencia de vibraciones. Por ello hemos igualado a  $-\omega^2$  los dos miembros de [3]. Resta ahora estudiar la configuración de la superficie  $Z(x, y)$  de la membrana, cuyas ordenadas oscilan armónicamente. Y aquí desempeña ya papel esencial el contorno.

**2. Caso de contorno rectangular.**—Si el contorno es rectangular y adoptamos como ejes  $x, y$  las rectas de los lados  $b$  y  $c$  del rectángulo, la función buscada debe ser idénticamente nula para dos valores particulares de  $x$ ,  $x=0$ ,  $x=b$ , y para dos de  $y$ ,  $y=0$ ,  $y=c$ .

Lo más cómodo para cumplir esta condición es ensayar soluciones de la forma (\*)

$$Z(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \quad [6]$$



de modo que sea el factor  $X$  el que se anula para  $x=0$ ,  $x=b$ , y sea  $Y$  quien se anule para  $y=0$ ,  $y=c$ .

Sustituyendo en la ecuación se obtiene

$$a^2 \frac{X''}{X} + a^2 \frac{Y''}{Y} = -\omega^2 \quad \text{o sea} \quad a^2 \frac{X''}{X} = -\omega^2 - a^2 \frac{Y''}{Y} \quad (= -\mu^2)$$

Razonando como antes, estos dos miembros independientes el primero de  $y$ , el segundo de  $x$ , sólo pueden ser iguales siéndolo a una nueva constante  $-\mu^2$ , y esta ecuación queda a su vez desdoblada en

$$[7] \quad a^2 X'' + \mu^2 X = 0 \qquad a^2 Y'' + (\omega^2 - \mu^2) Y = 0 \quad [8]$$

habiendo elegido este signo para la constante  $\mu^2$ , porque con el signo contrario daría soluciones para  $X$  de términos exponenciales y no podría anularse simultáneamente para  $x=0$ ,  $x=c$ , como exige la condición de contorno. Poniendo  $\omega^2 - \mu^2 = \nu^2$ , lo que exige dar a  $\mu^2$  valores  $< \omega^2$  podremos escribir para  $X(x)$  e  $Y(y)$  soluciones de la forma

$$X = B \operatorname{sen} \left( \frac{\mu}{a} x + \psi \right) \qquad Y = C \operatorname{sen} \left( \frac{\nu}{a} y + \chi \right)$$

La anulación de  $X(x)$  para  $x=0$ ,  $x=b$  da  $\psi=0$   $\mu = \frac{am\pi}{b}$ ; la anulación de  $Y(y)$  para  $y=0$ ,  $y=c$  da  $\chi=0$   $\nu = \frac{an\pi}{c}$  ( $m, n$ , enteros).

(\*) Decimos cómodo y no indispensable porque, por ej., la función  $[\operatorname{sen}(x^2 \cdot y^2) - \operatorname{sen} y^2] \cdot [\operatorname{sen}(y^2 \cdot x^2) - \operatorname{sen} x^2]$  se anula idénticamente para  $x=+1$ ,  $x=-1$ , así como para  $y=+1$ ,  $y=-1$  y no tiene la forma  $X(x) \cdot Y(y)$ .

Resulta, en definitiva, como soluciones aptas para satisfacer la cuestión (recuérdese que  $\omega^2 = \mu^2 + \nu^2$ ).

$$\begin{aligned} z(x, y, t) &= TXY = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{c} y\right) = \\ &= A \operatorname{sen}\left(\pi a \sqrt{\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}} t + \varphi\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{c} y\right) \end{aligned}$$

y más general una combinación lineal por doble suma o doble serie

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{m,n} \operatorname{sen}\left(\pi a \sqrt{\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}} t + \varphi_{m,n}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{c} y\right) \quad [9]$$

cuyos coeficientes  $A_{m,n}$  y fases  $\varphi_{m,n}$  habrá que determinar con las condiciones iniciales

$$f(x, y) = z(x, y, 0) = \sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} \overbrace{A_{m,n} \operatorname{sen} \varphi_{m,n}}^{M_{m,n}} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{c} y\right) \quad [10]$$

$$v(x, y) = z_t(x, y, 0) = \sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} \underbrace{A_{m,n} \omega_{m,n} \cos \varphi_{m,n}}_{N_{m,n}} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{c} y\right) \quad [11]$$

conde

$$\omega_{m,n} = \pi a \sqrt{\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}}$$

Haciendo el cambio  $x = \frac{b\xi}{\pi}$   $y = \frac{c\eta}{\pi}$  se debe tener

$$f\left(\frac{b\xi}{\pi}, \frac{c\eta}{\pi}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} n\eta \sum_{m=1}^{\infty} M_{m,n} \operatorname{sen} m\xi$$

$$v\left(\frac{b\xi}{\pi}, \frac{c\eta}{\pi}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} n\eta \sum_{m=1}^{\infty} N_{m,n} \operatorname{sen} m\xi$$

De la primera se desprende que  $\sum M_{m,n} \operatorname{sen} m\xi$  es el coeficiente del desarrollo en serie de senos de  $f\left(\frac{b\xi}{\pi}, \frac{c\eta}{\pi}\right)$  considerada como función impar de  $\eta$  (es decir, completada con su simétrica respecto del origen entre  $\eta=0$  y  $\eta=-\pi$ ) y, por tanto,

$$\sum_{m=1}^{\infty} M_{m,n} \operatorname{sen} m\xi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f\left(\frac{b\xi}{\pi}, \frac{c\eta}{\pi}\right) \operatorname{sen} n\eta \, d\eta$$

de donde, finalmente, el coeficiente  $M_{m,n}$  será análogamente

$$M_{m,n} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f\left(\frac{b\xi}{\pi}, \frac{c\eta}{\pi}\right) \operatorname{sen} m\xi \operatorname{sen} n\eta \, d\xi \, d\eta$$

Análogamente,

$$N_{m,n} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi v \left( \frac{b\xi}{\pi}, \frac{c\eta}{\pi} \right) \operatorname{sen} m\xi \operatorname{sen} n\eta \, d\xi \, d\eta \quad [13]$$

de cuyos valores se desprenden fácilmente los de  $A_{m,n}$  y  $\varphi_{m,n}$ .

De esta solución resulta la existencia de *líneas nodales* en la membrana cuando la razón entre lados del rectángulo es de cuadrado racional (\*).

**3. Caso de contorno circular.**—Si el contorno de la membrana es circular de radio  $\rho$ , su simetría respecto del centro indica la conveniencia de tomar coordenadas polares con origen en dicho centro. En esta forma se simplifica la condición de contorno, ya que se reducirá a la anulación de  $Z(r, \theta)$  para  $r = \rho$  (constante).

Empecemos, pues, pasando a coordenadas polares la ecuación [4] que define la función  $Z$ . Se trata del simple cambio de variables independientes

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}$$

del que resulta

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{x}{r} & r_y &= \frac{y}{r} & \theta_x &= \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = -\frac{y}{r^2} & \theta_y &= \frac{x}{r^2} \\ r_{xx} &= \frac{r^2 - x^2}{r^3} & r_{yy} &= \frac{r^2 - y^2}{r^3} & \theta_{xx} &= \frac{2yx}{r^4} & \theta_{yy} &= -\frac{2xy}{r^4} \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial x} &= \frac{\partial Z}{\partial r} r_x + \frac{\partial Z}{\partial \theta} \theta_x & \frac{\partial Z}{\partial y} &= \frac{\partial Z}{\partial r} r_y + \frac{\partial Z}{\partial \theta} \theta_y \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} r_x^2 + 2 \frac{\partial^2 Z}{\partial r \partial \theta} r_x \theta_x + \frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2} \theta_x^2 + \frac{\partial Z}{\partial r} r_{xx} + \frac{\partial Z}{\partial \theta} \theta_{xx} = \\ &= \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} \frac{x^2}{r^2} - 2 \frac{\partial^2 Z}{\partial r \partial \theta} \frac{xy}{r^3} + \frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2} \frac{y^2}{r^4} + \frac{\partial Z}{\partial r} \frac{r^2 - x^2}{r^3} + 2 \frac{\partial Z}{\partial \theta} \frac{xy}{r^4} \end{aligned}$$

y, análogamente,

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} \frac{y^2}{r^2} + 2 \frac{\partial^2 Z}{\partial r \partial \theta} \frac{yx}{r^3} + \frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2} \frac{x^2}{r^4} + \frac{\partial Z}{\partial r} \frac{r^2 - y^2}{r^3} - 2 \frac{\partial Z}{\partial \theta} \frac{xy}{r^4}$$

Sumando estas dos derivadas segundas se obtiene la expresión de la laplaciana en polares, expresión que conviene recordar por radicar en ella la aparición de las funciones de Bessel en multitud de fenómenos físicos con simetría cilíndrica:

(\*) V. para más detalles: *Riemann*, «Differentialgleichungen der Mathematischen Physik».

Laplaciana en polares

$$\boxed{\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2} \frac{1}{r^2} + \frac{\partial Z}{\partial r} \frac{1}{r}} \quad [14]$$

La ecuación [4] en  $Z$  se transforma, pues, ahora en

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial Z}{\partial r} + \frac{\omega^2}{a^2} Z = 0 \quad [15]$$

Ensayemos en ella, por razones análogas a las antes expuestas, soluciones de la forma

$$Z(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$$

y resultará, después de multiplicar por  $r^2$ :  $R\Theta$

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + \frac{\omega^2}{a^2} r^2 = - \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta}$$

Razonando como siempre ambos miembros, independiente de  $\theta$  el primero y de  $r$  el segundo, no pueden ser iguales más que siéndolo a una constante, que deberá ser positiva  $\nu^2$  para que no dé soluciones exponenciales aperiódicas para  $\Theta(\theta)$  (función del ángulo polar esencialmente periódica de período  $2\pi$ ). Por tanto, el problema queda recucido a la resolución de las dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\Theta'' + \nu^2 \Theta = 0 \quad [16]$$

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \left( \frac{\omega^2}{a^2} - \frac{\nu^2}{r^2} \right) R = 0 \quad [17]$$

La primera es nuevamente la ecuación del movimiento armónico y da para  $\Theta$  soluciones de la forma

$$\Theta = K \operatorname{sen}(\nu\theta + \psi) \quad [18]$$

en la que  $\nu$  debe ser entero  $\nu = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$ , puesto que  $Z$  y, por tanto,  $\Theta$  tiene que ser, como hemos dicho más arriba, una función de  $\theta$  ángulo polar de período  $2\pi$ .

La segunda es la ecuación típica de Bessel y admite soluciones de la forma

$$R(r) = C_1 J_n \left( \frac{\omega}{a} r \right) + C_2 Y_n \left( \frac{\omega}{a} r \right) \quad [19]$$

Ahora bien, recordaremos que  $Y_n = \infty$  para  $r=0$ ; la finitud de la  $Z$  en el origen exige  $C_2=0$ , y como, además, en el borde  $r=\rho$  debe ser  $Z=0$  para todo  $\theta$ , deberá tenerse

$$R(\rho) = C_1 J_n \left( \frac{\omega}{a} \rho \right) = 0$$

lo que determina finalmente los valores propios del parámetro  $\omega$ . Si  $\xi_{1n}, \xi_{2n}, \dots, \xi_{kn}, \dots$ , son los ceros de  $J_n(\xi)=0$  se tendrá para cada  $n$  la sucesión de valores de  $\omega$

$$\omega_{kn} = \frac{a \xi_{kn}}{\rho}$$

En función de estos autovalores podemos expresar las soluciones particulares buscadas  $z = TZ = TR\Theta$  multiplicando las soluciones [5], [18] y [19] (recordando que  $C_2 = 0$ )

$$z(r, \theta, t) = A_{k,n} \operatorname{sen}(\omega_{kn} t + \varphi_{kn}) \operatorname{sen}(n\theta + \psi_n) J_n\left(\frac{\omega_{kn}}{a} r\right)$$

y, finalmente, obtener soluciones más generales por doble suma de tales sumandos, como antes,

$$z(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{kn} \operatorname{sen}(\omega_{kn} t + \varphi_{kn}) \operatorname{sen}(n\theta + \psi_n) J_n\left(\frac{\xi_{kn}}{\rho} r\right)$$

Observemos, de paso, que las pulsaciones  $\omega_{kn}$  no están en progresión aritmética por no estarlo los ceros  $\xi_{kn}$  de la  $J_n$ ; por tanto, los armónicos de las vibraciones de la membrana no siguen la sencilla ley de frecuencia de los armónicos musicales de la cuerda o tubo sonoro (\*).

Si se dan ahora, como condiciones iniciales, la configuración inicial de la membrana y la velocidad vertical de sus puntos

$$z(r, \theta, 0) = f(r, \theta) \qquad z_t(r, \theta, 0) = v(r, \theta)$$

se podrán determinar los coeficientes  $A_{kn}$  y las fases  $\varphi_{kn}$  de modo análogo a como hemos hecho antes con la serie doble de Fourier, que ahora es serie mixta trigonométrica y de funciones de Bessel. La ortogonalidad de las funciones  $\sqrt{r} J_n(\xi_{kn} x)$  ( $k=1, 2, 3, \dots$ ) permite aquí obtener los coeficientes mediante una formulación análoga, recordando lo dicho en el tomo I, lección 18. En efecto, debiendo verificarse

$$f(r, \theta) = \sum_n \operatorname{sen}(n\theta + \psi_n) \sum_k A_{kn} \operatorname{sen} \varphi_{kn} J_n\left(\frac{\xi_{kn}}{\rho} r\right)$$

la suma segunda es el módulo del armónico  $\operatorname{sen}(n\theta + \psi_n)$ , en el desarrollo de  $f(r, \theta)$  en serie de Fourier, respecto de la variable  $\theta$ , llamémosle  $M_n(r)$  y supongámosle calculado de acuerdo con tomo I, lección 17. (Calculando previamente los coeficientes  $a_n, b_n$  por las fórmulas de Euler,  $M_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ ) Se tendrá

$$\sum_k A_{kn} \operatorname{sen} \varphi_{kn} \sqrt{r} J_n\left(\frac{\xi_{kn}}{\rho} r\right) = M_n(r) \sqrt{r}$$

lo que indica que  $A_{kn} \operatorname{sen} \varphi_{kn}$  es, a su vez, el coeficiente de  $\sqrt{r} J_n\left(\frac{\xi_{kn}}{\rho} r\right)$  en

(\*) Nótese el hecho en el tono de los timbales de una orquesta que se percibe siempre como algo impreciso.



el desarrollo de  $M_n(r) \sqrt{r}$  en funciones Bessel de orden  $n$  en el intervalo  $0 \leq r \leq \rho$  de lo que resulta (\*) (V. § 5, lección 16)

$$A_{kn} \operatorname{sen} \varphi_{kn} = \frac{1}{\rho^2 K_k} \int_0^\rho r M_n(r) J_n\left(\frac{\xi_{kn} r}{\rho}\right) dr \quad \text{siendo} \quad K_k = \int_0^1 s J_n^2(\xi_{kn} s) ds$$

De la segunda relación de contorno

$$v(r, \theta) = z_t(r, \theta, 0) = \sum_n \operatorname{sen}(n\theta + \psi_n) \sum_k A_{kn} \omega_{kn} \cos \varphi_{kn} J_n\left(\frac{\xi_{kn} r}{\rho}\right) dr$$

se desprende análogamente el valor de

$$A_{kn} \omega_{kn} \cos \varphi_{kn} = \frac{1}{\rho^2 K_k} \int_0^\rho r N_n(r) J_n\left(\frac{\xi_{kn} r}{\rho}\right) dr$$

donde  $N_n(r)$  es el módulo del armónico  $\operatorname{sen}(n\theta + \psi_n)$  en el desarrollo en serie de Fourier de  $v(r, \theta)$ , considerada como función de  $\theta$ .

Obtenidos los valores de  $A_{kn} \operatorname{sen} \varphi_{kn}$ , y de  $A_{kn} \omega_{kn} \cos \varphi_{kn}$  se podrán calcular fácilmente  $A_{kn}$  y  $\varphi_{kn}$ .

El valor de  $K_k$  que resulta de la propiedad de ortogonalidad de las funciones  $\sqrt{x} J_n(\xi_{kn} x)$  se calcula mediante la relación

$$K_k = \int_0^1 s J_n^2(\xi_{kn} s) ds = \frac{1}{2} J_{n+1}^2(\xi_{kn})$$

establecida en el § 11 de la lección 16.

#### 4. La ecuación general de ondas.—Las ecuaciones

$$[1] \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad [2]$$

dan, respectivamente, como hemos visto, las oscilaciones de una cuerda y de una membrana elástica, es decir, de un medio unidimensional y bidimensional. Análogamente se demuestra que las oscilaciones de un medio elástico de tres dimensiones, cuyo equilibrio interno ha sido perturbado por una causa cualquiera, obedece (bajo ciertas hipótesis físicas que no vamos a especificar aquí) a una ley similar con una variable independiente más, que escribiremos abreviadamente utilizando el operador laplaciano

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{es decir} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad [3]$$

La función  $u$  puede tener los más distintos significados, según los casos: puede ser la componente sobre un eje del desplazamiento de cada punto material del sólido o fluido, puede ser la densidad, la presión, la dilatación cúbica, etc., en el entorno de cada punto.

(\*) Para pasar del intervalo  $(0, \rho)$  de  $r$  al  $(0, 1)$  basta efectuar el cambio  $\frac{r}{\rho} = s$ .

En particular, esta ecuación es la que rige el fenómeno de propagación del sonido, y es análoga a la que da la propagación de las ondas electromagnéticas (cuya ecuación obtuvimos en el tomo I, lección 29). De aquí el papel central de esta ecuación en la Física matemática.

I. ONDAS PLANAS.—Recordemos que en el caso unidimensional la ecuación admite la solución d'Alembert  $w=f(x-at)+\varphi(x+at)$ , la cual se interpreta como la superposición de dos ondas progresivas, la primera avanzando en el sentido de las  $x$  crecientes y la segunda en sentido inverso. Obsérvese que ésta es también solución de la ecuación general de ondas (3), puesto que  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$  y se interpretará en el espacio como la superposición de dos ondas planas, avanzando por planos perpendiculares al eje  $x$  y trasladándose en su dirección a la velocidad  $\pm a$ , puesto que en cada instante  $t$  la función  $u$  tiene el mismo valor para todos los puntos de igual abscisa  $x$ . Análogamente obtendríamos soluciones en forma de ondas planas trasladándose en dirección de los ejes  $y$  y  $z$ ; más general, se obtienen ondas planas en una dirección cualquiera mediante soluciones de la forma

$$u=f(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - at) \quad [4]$$

Los lugares geométricos de los puntos para los cuales  $u$  tiene el mismo valor en cada instante son los planos

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - at = 0$$

que se trasladan en la dirección dada por los cosenos directores  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  distando del origen  $at$ ; es decir alejándose de él a la velocidad  $a$ .

Se comprueba inmediatamente que esta solución, en la que  $f$  puede ser cualquier función dos veces derivable, satisface la ecuación [3], pues al sustituir en ella  $u$  por  $f$  resulta la identidad

$$(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) f'' = \frac{1}{a^2} a^2 f''$$

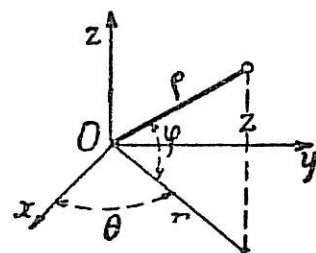
II. ONDAS ESFÉRICAS.—Pasando la ecuación [3] a coordenadas cilíndricas  $z=z$ ,  $x=r \cos \theta$ ,  $y=r \sin \theta$ , lo que equivale a cambiar las coordenadas cartesianas  $x, y$  por las polares  $r, \theta$  en el plano  $xy$ , se obtendrá (§ 3).

Ecuación de ondas en coordenadas cilíndricas,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad [5]$$

Si ahora pasamos a coordenadas esféricas cambiando  $r, z$  por  $\rho, \varphi$  mediante

$$\begin{aligned} r &= \rho \cos \varphi & z &= \rho \sin \varphi \\ \rho &= \sqrt{r^2 + z^2} & \varphi &= \text{árc tg } \frac{z}{r} \end{aligned}$$



Los dos primeros términos de [5] se transforman análogamente en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

Bastará, por tanto, transformar el término en  $\frac{\partial u}{\partial r}$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{r}{\rho} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{z}{\rho^2} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\rho^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

y sustituyendo en [5] resulta la ecuación de ondas convertida en (\*)

Ecuación de ondas en coordenadas esféricas,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\rho^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad [6]$$

En un medio con simetría esférica respecto del origen, es decir, en que la variación de  $u$  sea la misma a lo largo de todos los radios,  $u$  es independiente de  $\theta$  y  $\varphi$  y la ecuación se reduce a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{o sea} \quad \rho \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\rho}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

que también puede escribirse

$$\frac{\partial^2 (u\rho)}{\partial \rho^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 (u\rho)}{\partial t^2} \quad [7]$$

Es decir, la función  $u\rho$  verifica la ecuación de la cuerda vibrante. De aquí resultan las soluciones generales de la forma

$$u = \frac{F(\rho - at)}{\rho} + \frac{\Phi(\rho + at)}{\rho} \quad F, \Phi \text{ arbitrarias} \quad [8]$$

que se interpretan como pares de *ondas esféricas* cuyos radios  $\rho$  crecen o disminuyen a la velocidad  $a$ .

En efecto, si consideramos en un instante cualquiera  $t$  la superficie esférica de radio  $\rho$  y calculamos el valor que tiene  $F$  en esta superficie, resulta ser el mismo que tendrá al cabo de un tiempo  $\Delta t$  en la superficie esférica de radio  $\rho + a\Delta t$ , puesto que  $\rho + a\Delta t - a(t + \Delta t) = \rho - at$ , lo que demuestra la propagación del estado  $u = \frac{F(\rho - at)}{\rho}$  por ondas esféricas concéntricas; pero como el divisor  $\rho$  ha aumentado en  $a\Delta t$ , el valor  $u$  disminuye. La intensidad de la magnitud propagada es inversamente proporcional al radio, a diferencia de las ondas planas en las que se propaga sin alteración.

(\*) La transformación pudo haberse hecho directamente efectuando el cambio  $x = \rho \cos \varphi \cos \theta$ ,  $y = \rho \cos \varphi \sin \theta$ ,  $z = \rho \sin \varphi$ . El cambio intermedio a cilíndricas no ha tenido otro objeto que ahorrar cálculos utilizando resultados del párrafo anterior.

Consideremos (en un medio homogéneo e isótropo) las ondas que emergen y convergen en un instante  $t$  en un punto  $P$  que tomaremos como origen de coordenadas ( $\rho=0$ ). La función  $u$  verificará en este instante [8]  $\rho u=0 = F(-at) + \Phi(at)$  de donde (supuesto  $u$  finita)  $F(-at) = -\Phi(at)$  y por tanto  $u$  será de la forma

$$u = \frac{1}{\rho} [-\Phi(-\rho + at) + \Phi(\rho + at)] \quad [9]$$

cuyo verdadero valor en el origen es (regla de l'Hôpital)

$$u(0, t) = 2\Phi'(at) \quad [10]$$

lo que da la función  $\Phi$  y, por tanto, la solución [9] conocida la perturbación  $u(0, t)$  en el origen.

**5. Problema de Cauchy. Fórmula de Poisson.**—También queda determinada la solución  $u$  de la ecuación si se da el valor de la solución  $u$  y de su derivada  $u_t$  respecto del tiempo en un instante, que podemos considerar inicial  $t=0$  (problema de Cauchy), es decir, se da

$$u(x, y, z, 0) = \psi(x, y, z) \quad u_t(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z)$$

Esta solución viene dada por la fórmula de Poisson

$$u(x, y, z, t) = tU(x, y, z, t) + \frac{\partial}{\partial t} tV(x, y, z, t)$$

designando con  $U(x, y, z, t)$  y  $V(x, y, z, t)$  los valores medios de las funciones dadas  $\varphi$  y  $\psi$  en una superficie esférica de centro  $x, y, z$  y radio  $at$ , es decir

$$U(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \iint \varphi(x + at \cos \alpha, y + at \cos \beta, z + at \cos \gamma) d\sigma$$

$$V(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \iint \psi(x + at \cos \alpha, y + at \cos \beta, z + at \cos \gamma) d\sigma$$

donde  $d\sigma$  es el elemento de superficie esférica de centro  $x, y, z$  y radio unidad, es decir, extendidas las integrales dobles a todo el ángulo sólido alrededor del punto  $x, y, z$  (\*).

(\*) La demostración de esta fórmula puede verse en *Courant-Hilbert*, «Methoden der Mathematischen Physik», tomo II, cap. VI, § 2, o en *Persico*, «Introduzione alla Fisica Matematica», cap. V, § 117.

LECCIÓN 30.—ECUACIONES DE TIPO PARABÓLICO. TRANSMISIÓN DEL CALOR.  
DIFUSIÓN

1. **Ecuación de la transmisión del calor.**—La ecuación parabólica más importante de la Física matemática clásica es la que rige el fenómeno de la transmisión del calor en el seno de un medio conductor, ecuación que fué obtenida en el tomo I, lección 29 y es de la forma

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = a^2 \frac{\partial T}{\partial t} \quad [1]$$

(parabólica (v. § 4, lec. 26) por faltar en ella la segunda derivada respecto de  $t$ ).  $T(x, y, z, t)$  es la temperatura función del lugar y del tiempo. El coeficiente  $a^2$  depende de la materia del conductor, siendo proporcional a su densidad y a su calor específico e inversamente proporcional a su conductibilidad.

En la técnica los dos casos que tienen más interés son la transmisión a través de los muros de paredes planas paralelas y a través de tubos de paredes cilíndricas concéntricas, es decir la transmisión paralela unidimensional y la transmisión bidimensional radial. A estos dos casos ceñiremos, pues, los ejemplos que presentemos de esta ecuación. Para el primero es natural que busquemos soluciones en forma de *ondas planas*, observando que la ecuación admite integrales del tipo (lec. 24)

$$T = ke^{mx+ny+pz+\delta t}$$

para toda cuaterna de valores de  $m, n, p, \delta$  que verifique  $m^2+n^2+p^2=a^2\delta$  en particular para  $\delta = \frac{1}{a^2}$ ,  $m = \cos \alpha$ ,  $n = \cos \beta$ ,  $p = \cos \gamma$ , cosenos directores de una recta, lo que da

$$T = ke^{\frac{t}{a^2}} e^{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}$$

función correspondiente al tipo de ondas planas de que hemos hablado en la lección anterior.

Tomemos como eje  $x$  la dirección de propagación de la onda, es decir  $\cos \alpha = 1$ ,  $\cos \beta = 0$ ,  $\cos \gamma = 0$  y resultará la ecuación unidimensional

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial T}{\partial t} \quad [2]$$

que admite soluciones de la forma  $T = ke^{\mu x + \delta t}$  con  $\mu^2 = a^2 \delta$ .

A través de un muro con temperatura uniforme en cada cara la transmisión se formulará mediante la ecuación diferencial reducida anterior en la

que el eje  $x$  es normal al muro. El problema se reduce al estudio de la transmisión a lo largo de una varilla o prisma obtenido taladrando el muro normalmente, puesto que es la misma en todas las que yuxtapuestas componen el muro.

**2. Régimen de temperaturas a lo largo de una varilla.**—Consideremos, pues, una varilla de longitud  $l$  (igual al espesor del muro) y supongamos en un extremo  $x=0$  una temperatura constante de  $T_0$  grados y en el otro  $x=l$  una temperatura de  $T_1$  grados, es decir

$$T(0, t) \equiv T_0 \quad T(l, t) \equiv T_1 \quad (\text{condiciones de contorno})$$

Es muy fácil obtener una solución de la ecuación [2] que cumpla estas condiciones *para toda*  $t$ , pues basta formar la función lineal sólo dependiente de  $x$  que tome los valores  $T_0, T_1$  en los extremos del intervalo  $0, l$ ; esta función es

$$T_p = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{l} x \quad \left\{ \begin{array}{l} = T_0 \text{ para } x=0 \\ = T_1 \text{ para } x=l \end{array} \right. \quad [3]$$

Tal solución representa el régimen *permanente* de temperaturas, es decir, el que *prácticamente* quedará establecido después de un tiempo más o menos largo (teóricamente infinito) de régimen variable. Para obtener este régimen variable hemos de añadir a  $T_p$  un sumando  $T_t(x, t)$  *transitorio* que establezca el tránsito del *régimen inicial de temperaturas*  $T(x, 0)$  que se supone dado al régimen permanente final; por tanto  $T_t$  tiene que tender a cero al crecer  $t$ .

Para formular este sumando transitorio, que debe ser también solución de [2], adoptaremos una serie de términos soluciones de la forma

$$T_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n e^{\mu_n x + \delta_n t} \quad \text{con} \quad \mu_n^2 = a^2 \delta_n \quad [4]$$

que se anulen en los extremos del intervalo (para no alterar las temperaturas que en ellos establece el sumando permanente).

La transitoriedad exige que el factor exponencial  $e^{\delta_n t}$  de cada término sea decreciente, es decir,  $\delta_n = -\omega_n^2$  (negativo) y, por tanto,  $\mu$  imaginario  $\mu = \pm a\omega_n j$ , con lo que resulta la serie Fourier

$$T_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n e^{-\omega_n^2 t} \text{sen}(a\omega_n x + \varphi_n)$$

La anulación de estos términos para  $x=0$  se consigue tomando  $\varphi_n=0$  y la anulación en el extremo  $x=l$ , tomando los valores  $\omega_n$  que hagan  $\text{sen } a\omega_n l = 0$  es decir  $\omega_n = \frac{n\pi}{al}$  (autovalores). En resumen, el régimen variable general

$T(x, t) = T_p(x) + T_t(x, t)$  se formulará

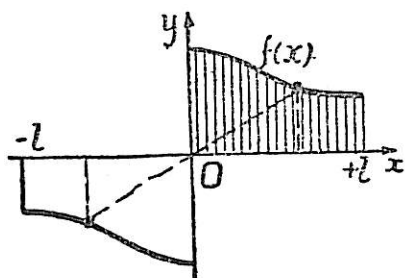
$$T(x, t) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{l} x + \sum_{n=1}^{\infty} k_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{a^2 l^2} t} \text{sen} \frac{n\pi}{l} x \quad [5]$$



Sólo queda por determinar los coeficientes  $k_n$ , lo que se conseguirá identificando esta solución para  $t=0$  con la distribución inicial de temperaturas dada  $T(x, 0)$ , pues se habrá de tener entre 0 y  $l$

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x = T(x, 0) - T_0 - \frac{T_1 - T_0}{l} x (= f(x)) \quad [6]$$

Llamando  $f(x)$  al segundo miembro conocido, el problema es equivalente al desarrollo en serie de Fourier entre  $-l$  y  $+l$  de la función impar que tome el valor  $f(x)$  entre 0,  $l$  y el valor  $-f(|x|)$  entre 0 y  $-l$ . Mediante el cambio  $x = \frac{l\xi}{\pi}$  se obtiene para los coeficientes



$$\begin{aligned} k_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f\left(\frac{l\xi}{\pi}\right) \operatorname{sen} n\xi d\xi = \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x dx \end{aligned} \quad [7]$$

EJEMPLO: Supongamos una varilla de temperatura inicial  $10^\circ$  colocada con los extremos en contacto con medios a temperaturas constantes de  $20^\circ$  y  $100^\circ$  respectivamente. Se tiene ahora

$$\begin{aligned} \text{Condiciones de contorno} & \left\{ \begin{array}{l} T(0, t) = 20 \\ T(l, t) = 100 \end{array} \right\} \text{ para toda } t \\ \text{Condición inicial} & T(x, 0) = 10 \text{ para toda } x \end{aligned}$$

El régimen permanente de temperaturas es

$$T_p = 20 + \frac{80}{l} x \quad \left\{ \begin{array}{l} = 20 \text{ para } x=0 \\ = 100 \text{ para } x=l \end{array} \right.$$

y el régimen variable vendrá dado por

$$T(x, t) = 20 + \frac{80}{l} x + \sum_n k_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{a^2 l^2} t} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x$$

Debiendo verificarse la condición inicial  $T(x, 0) = 10$  se tendrá

$$\sum_n k_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x = -10 - \frac{80}{l} x$$

El cálculo de los coeficientes  $k_n$  da

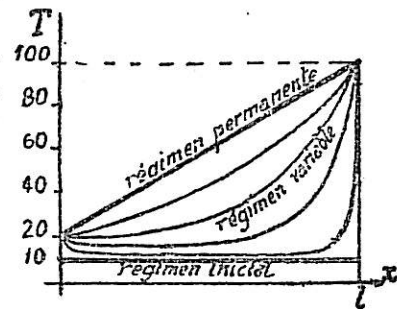
$$k_n = \frac{20}{\pi} \left( \frac{9 \cos n\pi - 1}{n} \right) = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{200}{n\pi} \text{ para } n=1, 3, 5, \dots \\ \frac{160}{n\pi} \text{ para } n=2, 4, 6, \dots \end{array} \right.$$

con lo que la solución que da el régimen variable es

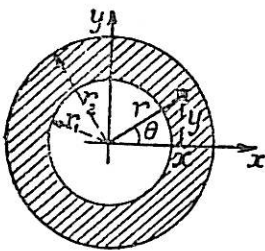
$$\begin{aligned} T(x, t) &= 20 + \frac{80}{l} x - \frac{40}{\pi} \left( 5 e^{-\frac{\pi^2}{a^2 l^2} t} \operatorname{sen} \frac{\pi}{l} x - \frac{4}{2} e^{-\frac{2\pi^2}{a^2 l^2} t} \operatorname{sen} 2 \frac{\pi}{l} x + \right. \\ &\quad \left. + \frac{5}{3} e^{-\frac{3\pi^2}{a^2 l^2} t} \operatorname{sen} 3 \frac{\pi}{l} x - \frac{4}{4} e^{-\frac{4\pi^2}{a^2 l^2} t} \operatorname{sen} 4 \frac{\pi}{l} x + \dots \right) \end{aligned}$$

NOTA.—La forma trigonométrica de la solución no debe sugerir al lector la falsa idea de que existan oscilaciones de la temperatura, puesto que no existen términos senoidales en  $t$ . Y en cuanto a la periodicidad en  $x$  sólo se presentaría para valores de  $x$  exteriores a la varilla o al muro, valores que carecen de interés. La figura adjunta da idea del tránsito de la temperatura inicial al régimen permanente, dando las gráficas de la temperatura a distintos tiempos.

He aquí cómo el físico Fourier en sus estudios sobre la transmisión del calor se vió conducido al uso de las series trigonométricas y a la formulación mediante ellas de una función arbitraria como es la distribución inicial de temperaturas.



**3. Transmisión a través de tubos.**— La ecuación de la transmisión del calor a través de un tubo circular con temperatura uniforme en el interior y en el exterior se simplificará adoptando el eje del tubo como eje  $z$ , puesto que  $T$  no depende de  $z$ .



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial T}{\partial t}$$

Y más fácilmente aún adoptando coordenadas polares en el plano  $xy$  en el eje del tubo, es decir, haciendo el cambio

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

Pero la transformación a polares de la laplaciana del primer miembro ha sido hecha ya en la lección anterior a propósito de la ecuación de la membrana vibrante. Transcribiendo el resultado allí obtenido resulta aquí

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = a^2 \frac{\partial T}{\partial t} \quad [1]$$

Puesto que hemos supuesto uniforme la temperatura en los bordes interior y exterior, se comprende que el régimen de temperaturas es independiente de  $\theta$  y, por tanto, la ecuación queda reducida a

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = a^2 \frac{\partial T}{\partial t} \quad [2]$$

Para satisfacer esta ecuación procederemos como antes. Formaremos una solución  $T_p$  que dé para todo  $t$  (régimen permanente) el salto de temperatura del interior  $T_1$  al exterior  $T_2$

$$T(r_1, t) \equiv T_1 \quad T(r_2, t) = T_2 \quad (\text{condiciones de contorno}) \quad [3]$$

y le sumaremos el sumando transitorio  $T_t(r, t)$  que se adapte a la distribución inicial de temperatura para  $t=0$ , y tenga valor nulo en las paredes interior y exterior para toda  $t$ .

1.º El régimen *permanente* se obtendrá integrando la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^2 T'}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT'}{dr} = 0 \quad \text{es decir} \quad \frac{dT'}{dr} + \frac{1}{r} T' = 0$$

que da

$$\frac{dT'}{T'} = - \frac{dr}{r} \quad \text{de donde} \quad T' = \frac{dT'}{dr} = \frac{C_1}{r}$$

y por tanto, finalmente,

$$T = C_1 \ln r + C_2 \quad [4]$$

Las constantes se hallarán expresando que

$$\begin{aligned} T(r_1) = C_1 \ln r_1 + C_2 = T_1 \\ T(r_2) = C_1 \ln r_2 + C_2 = T_2 \end{aligned} \quad \text{de donde} \quad C_1 = \frac{T_1 - T_2}{\ln r_1 - \ln r_2} \quad C_2 = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln r_1 - \ln r_2} \ln r_1$$

y, sustituyendo sus valores resulta como expresión del régimen permanente

$$T_p(r) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\ln r_2 - \ln r_1} \ln \frac{r}{r_1} \quad [5]$$

2.º El sumando *transitorio* se obtendrá agregando soluciones de la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = a^2 \frac{\partial T}{\partial t}$$

que den  $T_1(r_1, t) = T_2(r_2, t) = 0$  para toda  $t$ . Parece, pues, natural buscar soluciones de la forma  $R(r) \cdot \Theta(t)$  (factores de variables separadas) en las que sea  $R(r_2) = R(r_1) = 0$ . Esta separación de variables conduce a

$$\begin{aligned} R''(r) \Theta(t) + \frac{1}{r} R'(r) \Theta(t) = a^2 \Theta'(t) R(r) \\ \frac{R''(r)}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R} = a^2 \frac{\Theta'(t)}{\Theta(t)} \end{aligned} \quad [6]$$

Razonando como siempre (v. lec. anterior), esta ecuación se desdobra en dos. La correspondiente a  $\Theta(t)$

$$\frac{a^2 \Theta'(t)}{\Theta(t)} = -m^2 \quad \text{da} \quad \Theta(t) = e^{-\frac{m^2}{a^2} t} \quad [7]$$

habiendo atribuído signo negativo a  $m^2$  para asegurar el carácter *transitorio*.

La segunda da

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} = -m^2 \quad \text{o sea} \quad R'' + \frac{1}{r} R' + m^2 R = 0 \quad [8]$$

ecuación del tipo de Bessel de orden cero, que admite las soluciones  $J_0(mr)$  y  $Y_0(mr)$ . Adoptemos, pues, para  $R(r)$  soluciones del tipo

$$AJ_0(mr) + BY_0(mr) \quad [9]$$

que cumplan las condiciones de contorno  $R(r_1) = R(r_2) = 0$

$$\begin{aligned} A J_0(mr_1) + B Y_0(mr_1) &= 0 \\ A J_0(mr_2) + B Y_0(mr_2) &= 0 \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{J_0(mr_1)}{Y_0(mr_1)} = \frac{J_0(mr_2)}{Y_0(mr_2)} \quad \left( = -\frac{B}{A} = k \right)$$

Llamando  $\frac{r_2}{r_1} = \lambda$ ,  $mr_1 = \xi$ , la ecuación trascendente

$$\frac{J_0(\xi)}{Y_0(\xi)} = \frac{J_0(\lambda\xi)}{Y_0(\lambda\xi)} \quad [10]$$

dará la sucesión de autovalores de  $\xi$ ,  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  de los que se obtendrán los correspondientes para  $m$ ,  $m_i = \xi_i : r_1$ , y para  $k_i = J_0(\xi_i) : Y_0(\xi_i)$ .

Podemos, pues, construir la solución mediante una serie de términos que resulten de multiplicar soluciones de la forma [9] para  $m = m_i$  con las expresiones correspondientes de [7].

La expresión que dará el régimen variable  $R(x, t)$  será, pues, de la forma

$$R(x, t) = T_p(r) + \sum A_i e^{-\frac{m_i^2 t}{a^2}} [J_0(m_i r) - k_i Y_0(m_i r)]$$

y los coeficientes  $A_i$  se habrán de determinar por la adaptación a la distribución inicial de temperaturas, *supuesta* efectuada asimismo con simetría cilíndrica, es decir, función sólo de  $r$ . El cálculo de estos coeficientes, como se comprende, tiene aquí dificultades mayores que en el caso de la pared plana, y como en la técnica interesa principalmente el régimen permanente ya hallado (en el que se basan los cálculos de rendimiento calorífico, pérdidas por enfriamiento, etc.) creemos suficiente lo expuesto como ejemplo de aplicación.

**4. Propagación en medios ilimitados.**—Sólo añadiremos dos palabras acerca de los problemas de propagación del calor en medios unidimensionales o pluridimensionales de dimensión infinita, por el interés matemático de sus soluciones.

Para la adaptación a las condiciones iniciales y de contorno que se presentan en tales casos, es útil manejar las siguientes soluciones de la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial T}{\partial t} \quad [11]$$

llamadas fundamentales

$$\tau(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{a^2 x^2}{4t}} \quad \tau_x(x, t) = -\frac{a^2 x}{2t\sqrt{t}} e^{-\frac{a^2 x^2}{4t}}$$

Se comprueba fácilmente que la primera satisface a [1] por simple sustitución, pues se obtiene

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} = e^{-\frac{a^2 x^2}{4t}} \left( -\frac{a^2}{2t\sqrt{t}} + \frac{a^4 x^2}{4t^2\sqrt{t}} \right); \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} = e^{-\frac{a^2 x^2}{4t}} \left( -\frac{1}{2t\sqrt{t}} + \frac{a^2 x^2}{4t^2\sqrt{t}} \right)$$

de donde

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial \tau}{\partial t}$$

Derivando esta identidad respecto de  $x$  resulta

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tau_x = a^2 \frac{\partial}{\partial t} \tau_x$$

que prueba que también es solución la segunda solución fundamental  $\tau_x$ .

Como muestra del interés de tales soluciones, consideremos solamente el problema teórico de propagación de una cantidad de calor supuesta súbitamente liberada en una región del espacio asimilable a un punto, que tomaremos como origen de coordenadas. La simetría esférica del problema hace indicadas las coordenadas esféricas. La temperatura será una función exclusiva del radio  $\rho$  y  $t$  que obedecerá a la ecuación que resulte de transformar la laplaciana del primer miembro de la ecuación de conducción

$$\Delta T = a^2 \frac{\partial T}{\partial t}$$

a coordenadas esféricas según el resultado obtenido en la lección anterior para la ecuación de ondas (v. § 4, fórmula [6]) y de suponer en ella  $T$  independiente de  $\varphi$  y de  $\theta$ . Resulta así la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial T}{\partial \rho} = a^2 \frac{\partial T}{\partial t}$$

que puede escribirse

$$\frac{\partial^2 (T\rho)}{\partial \rho^2} = a^2 \frac{\partial (T\rho)}{\partial t}$$

Como ocurría en la ecuación de ondas: En la propagación radial esférica del calor, la función  $T\rho$  obedece a la ecuación de propagación lineal.

Adoptando para  $T\rho$  la solución fundamental  $\tau_x(r, t)$  antes indicada pongamos

$$T(\rho, t) = \frac{k}{t\sqrt{t}} e^{-\frac{a^2 \rho^2}{4t}}$$

y comprobemos que se adapta a todas las condiciones físicas iniciales y de contorno del problema planteado.

- 1.ª La función  $T(\rho, 0)$  (temperatura inicial) es nula en todo el espacio.  
 2.ª La función  $T(\rho, \infty)$  es nula. (Temperatura final nula en todo el espacio.)  
 3.ª La función  $T(\infty, t)$  es constantemente nula. (Temperatura nula en el infinito.)

La distribución radial de temperaturas es una curva exponencial de Gauss (campana de probabilidades)  $Ce^{-\lambda\rho^2}$ . La variación en el tiempo viene dada por una ley de la forma  $C_1 e^{-\frac{h}{t} t^{-\frac{3}{2}}}$ .

La constante  $k$  puede expresarse en función de la cantidad  $Q$  de calor liberada, expresando que ésta es la cantidad de calor existente en el espacio en todo instante, o sea, llamando  $\gamma$  al calor específico y  $\delta$  la densidad

$$Q = \iiint_{\infty} T(\rho, t) \gamma \delta \, dv = \frac{4\pi\gamma\delta}{t\sqrt{t}} \int_0^{\infty} k e^{-\frac{a^2\rho^2}{4t}} \rho^2 \, d\rho$$

e integrando por partes

$$Q = \frac{4\pi\gamma\delta}{t\sqrt{t}} \left\{ \left| -\frac{2kt}{a^2} \rho e^{-\frac{a^2\rho^2}{4t}} \right|_0^{\infty} + \frac{2kt}{a^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{a^2\rho^2}{4t}} \, d\rho \right\} = \frac{8k\pi\gamma\delta}{a^2\sqrt{t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{a^2\rho^2}{4t}} \, d\rho$$

de donde, poniendo  $\frac{a^2\rho^2}{4t} = \xi^2$  y recordando que

$$\int_0^{\infty} e^{-\xi^2} \, d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(v. tomo I, lec. 14, § 4) queda

$$Q = \frac{16k\pi\gamma\delta}{a^3} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{de donde} \quad k = \frac{Qa^3}{8\gamma\delta\pi\sqrt{\pi}}$$

y por tanto la solución del problema es

$$T(\rho, t) = \frac{Qa^3}{8\gamma\delta\pi t\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2\rho^2}{4t}}$$

Es de interés que el lector anote este hecho: la aparición de la ley de las probabilidades en la formulación matemática de un fenómeno de propagación.

**5. Ecuación de la difusión.**—La Física y la Química presentan ejemplos frecuentes de un fenómeno designado con el nombre genérico de difusión, en virtud del cual un conjunto de corpúsculos desigualmente diseminados en un medio (moléculas de un gas en otro, de una sal en disolución, etc.) tienden a difundirse, es decir, a distribuirse uniformemente en él.

Definida la concentración en el entorno esférico de un punto, como el número de corpúsculos por unidad de volumen de dicho entorno, es decir,



como el cociente  $\frac{N \text{ (número de corpúsculos)}}{V \text{ (volumen del entorno)}}$  y definida la concentración en el punto como el límite de este cociente cuando el volumen del entorno tiende a cero (\*), para cada punto tenemos una concentración  $u(x, y, z, t)$ , escalar, función del punto y del tiempo, al que corresponde un gradiente  $u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$ . Pues bien, se puede dar una forma elemental a la ley de la difusión estableciendo que los corpúsculos se mueven en dirección de dicho gradiente con velocidad proporcional a él. La cantidad de corpúsculos que en un intervalo  $dt$  atraviesan una superficie  $\sigma$  cerrada en el seno del medio en cuestión es, pues, proporcional al flujo de dicho gradiente que transformado por el teorema de Ostrogradski da

$$\delta \cdot dt \iint_{\sigma} \vec{\nabla} u \cdot d\vec{\sigma} = \delta \cdot dt \iiint_{\text{vol}} \nabla \cdot \nabla u \cdot dv = \delta \cdot dt \iiint_{\text{vol}} \Delta u \cdot dv$$

el factor de proporcionalidad  $\delta$  es el llamado coeficiente de difusión. Pero por otra parte esta cantidad de corpúsculos puede calcularse integrando la cantidad que gana o pierde cada unidad de volumen que es  $\frac{\partial u}{\partial t} dv dt$ , es decir

$$\delta \cdot dt \iiint_{\text{vol}} \Delta u \cdot dv = dt \iiint_{\text{vol}} \frac{\partial u}{\partial t} dv$$

y como esta igualdad debe verificarse cualquiera que sea el volumen en el que se integre, deberá verificarse

$$\Delta u = \frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial t}$$

ecuación idéntica a la de propagación del calor y que tendrá, por consiguiente, tratamiento análogo.

NOTA.—La ecuación obtenida en la lección 16, § 10 como reguladora del efecto pelicular en un conductor cilíndrico de resistividad  $\rho$  y permeabilidad magnética  $\mu$

$$\rho \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} + \frac{\rho}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial r} = 4 \pi \mu \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

es también una ecuación en derivadas parciales de segundo orden en las variables  $r, t$ , de tipo parabólico, de la que nos limitamos a hallar en aquella lección soluciones de la forma  $\rho(r, t) = \sigma(r) e^{j\omega t}$ , con una variación en función de  $t$  impuesta por la corriente alterna que por el conductor circula, con lo que el problema quedaba reducido a la ecuación diferencial ordinaria que daba la variación de la densidad de corriente  $\sigma$  en función de  $r$ .

(\*) En el sentido físico, naturalmente, es decir, tiende a hacerse muy pequeño aunque no comparable a las dimensiones del corpúsculo. En el mismo sentido, en definitiva, en que se admite en Física un peso, una masa, una energía, una carga eléctrica, etcétera, infinitésima.

LECCIÓN 31.—PROBLEMAS DE TIPO ELÍPTICO. ECUACIÓN DE LAPLACE-POISSON.  
NOCIONES SOBRE LA TEORÍA DEL POTENCIAL

**1. Propiedades fundamentales del potencial newtoniano.**—Supongamos conocida una distribución de masas en el espacio, es decir, definida una densidad o masa específica  $\mu(\xi, \eta, \zeta)$  en cada punto  $\xi, \eta, \zeta$ , de modo que la masa contenida en cada elemento  $dv$  sea  $\mu dv$ , siendo  $\mu$  la densidad en un cierto punto de dicho elemento. El potencial  $U$  creado por esta distribución de masas en un punto  $x, y, z$  viene definido por la integral

$$U(x, y, z) = \iiint \frac{\mu dv}{r} \quad \text{siendo} \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \quad [1]$$

extendida a todo el espacio. Cuando las masas atractivas son cuerpos materiales aislados, esta integral queda automáticamente extendida al interior de los volúmenes de dichos cuerpos, puesto que fuera de ellos  $\mu=0$ .

Esta integral tiene las siguientes propiedades fundamentales unas de mostradas en el tomo I, otras cuya demostración hallará el lector en los tratados de Mecánica y Física matemática (\*).

I. Es finita, continua y derivable para todo punto  $x, y, z$  del espacio lo mismo en el exterior que en el interior de la masa atractiva.

I'. Tiende a cero al alejarse el punto  $x, y, z$ , siendo un infinitésimo del orden de  $1/\rho$ , llamando  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Es decir, se verifica  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} U = 0$  mientras  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho U = \text{finito}$ .

II. Sus derivadas  $U_x, U_y, U_z$  (gradiente) son finitas y continuas en todo el espacio. Se exceptúa el caso de una superficie o línea atractiva en la que sólo son continuas las derivadas fuera de la superficie o línea y a lo largo de ella en dirección del plano tangente o de la tangente, pero no en dirección normal u oblicua.)

II'. Estas derivadas tienden a cero en el infinito, siendo infinitésimos de orden  $1/\rho^2$ . Es decir  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \nabla U = 0$  mientras  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^2 \nabla U = \text{finito}$ .

III. Finalmente, la función  $U(x, y, z)$  verifica la ecuación de Poisson

$$\Delta U = -4\pi\mu \quad [2]$$

siendo  $\mu(x, y, z)$  la densidad de materia en el punto  $x, y, z$  considerado. En el exterior de las masas atractivas  $\mu=0$ , y el potencial verifica la ecuación de Laplace

$$\Delta U = 0 \quad [3]$$

(\*) V., por ejemplo, *Persico*: «Introduzione alla Fisica matematica».

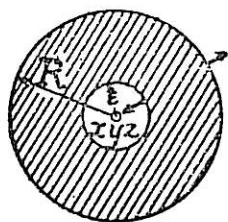
Esta propiedad indica que las segundas derivadas presentan una discontinuidad en la superficie de las masas atractivas (\*).

**2. Caracterización analítica del potencial mediante sus propiedades diferenciales. Aplicación de la fórmula de Green.**—Vamos a demostrar recíprocamente que estas propiedades caracterizan o definen el potencial, es decir que toda función  $U(x, y, z)$  que verifica la ecuación de Poisson [3] en punto punto del espacio y que cumple, además, las propiedades I, I' y II, II', tiene necesariamente la expresión [1].

En efecto, consideremos un punto cualquiera  $P(x, y, z)$  y apliquemos el teorema de Green (tomo I, lecc. 28, § 8)

$$\iiint_v (U\Delta W - W\Delta U) dv = \iint_\sigma \left( U \frac{dW}{dn} - W \frac{dU}{dn} \right) d\sigma \quad [4]$$

a la función  $U(\xi, \eta, \zeta)$  y a la  $W = \frac{1}{r} = 1/\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$  tomando  $\xi, \eta, \zeta$  como variables de integración, y como recinto de integración el espacio comprendido entre dos esferas con centro en  $P$ , la interior  $\sigma_i$  de radio  $\epsilon$  y la exterior  $\sigma_e$  de radio  $R$ . Sabemos (tomo I, lecc. 28, § 6) que la divergencia del campo newtoniano creado por una masa puntual es nula



y, por tanto, que  $\Delta W = \Delta \frac{1}{r} = 0$ . Por otra parte,

$$\frac{dW}{dn} = \frac{d}{dr} \frac{1}{r} = \begin{cases} +\frac{1}{\epsilon^2} & \text{en } \sigma_i \\ -\frac{1}{R^2} & \text{en } \sigma_e \end{cases}$$

siendo positivo el valor  $\frac{1}{\epsilon^2}$  por ser interior a la esfera pequeña, la semi-normal *exterior* al recinto de integración, lo que supone *crecimiento* de  $\frac{1}{r}$ , y negativa la derivada en la esfera grande decreciendo  $\frac{1}{r}$  hacia el exterior.

Por tanto, sustituyendo además  $\Delta U = -4\pi\mu$

$$4\pi \iiint_v \frac{\mu}{r} dv = \frac{1}{\epsilon^2} \iint_{\sigma_i} U d\sigma - \frac{1}{R^2} \iint_{\sigma_e} U d\sigma - \frac{1}{\epsilon} \iint_{\sigma_i} \frac{dU}{dn} d\sigma - \frac{1}{R} \iint_{\sigma_e} \frac{dU}{dn} d\sigma$$

Hagamos ahora tender  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $R \rightarrow \infty$ , con lo que la integral del primer miembro quedará extendida a todo el espacio, y se tendrá ( $U_m$  valor

(\*) En los puntos de tal superficie la expresión del segundo miembro requiere un estudio delicado, pues depende, ante todo, de la definición que se asigne a la densidad  $\mu$  en la superficie de las masas atractivas. Si se toma como tal la densidad en la inmediata proximidad interna de la masa—es decir, al límite del cociente  $\Delta m : \Delta v$  siendo  $\Delta m$  el elemento de masa interior al elemento de volumen  $\Delta v$ , *de cuerpo* (no de espacio) inmediato al punto, cuando este  $\Delta v$  tiende a cero—el segundo miembro debe tomarse  $-2\pi\mu$  en todo punto *ordinario* de la superficie, y en general  $-\Omega\mu$  siendo  $\Omega$  el ángulo sólido del cono de tangentes en un punto singular

medio de  $U$  en la superficie esférica interior,  $U_m$  valor medio en la superficie exterior, y notaciones análogas para las derivadas)

$$\frac{1}{\epsilon^2} \iint_{\sigma_i} U d\sigma = \frac{1}{\epsilon^2} 4\pi\epsilon^2 U_m \rightarrow 4\pi U(x, y, z); \quad \frac{1}{\epsilon} \iint_{\sigma_i} \frac{dU}{dn} d\sigma = 4\pi\epsilon \left( \frac{dU}{dn} \right)_m \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{R^2} \iint_{\sigma_e} U d\sigma = \frac{1}{R^2} 4\pi R^2 U_m \rightarrow 0 \quad \text{por la propiedad I'}$$

$$\frac{1}{R} \iint_{\sigma_e} \frac{dU}{dn} d\sigma = 4\pi R \left( \frac{dU}{dn} \right)_m \rightarrow 0 \quad \text{por la propiedad II}$$

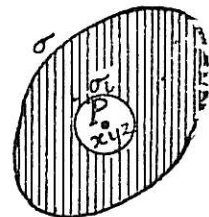
En resumen, quedará el segundo miembro reducido en el límite a  $4\pi U(x, y, z)$ , y dividiendo por  $4\pi$  resultará

$$\iiint_v \frac{\mu}{r} dv = U(x, y, z) \tag{5}$$

como queríamos demostrar.

Si sustituimos la superficie esférica exterior por una superficie cualquiera cerrada  $\sigma$ , y en lugar de dar las condiciones límites I' y II' damos los valores de  $U$  y de  $\frac{dU}{dn}$  a lo largo de dicha superficie, se tendrá, extendiendo ahora la integral triple al interior de  $\sigma$  después de hacer tender  $\epsilon \rightarrow 0$  como antes,

$$4\pi \iiint_v \frac{\mu}{r} dv = 4\pi U(x, y, z) - \iint_{\sigma} \left( U \frac{d}{dn} - \frac{1}{r} \frac{dU}{dn} \right) d\sigma \tag{6}$$



entendiendo las derivadas *hacia el interior*, por lo que se ha cambiado el signo de la integral. Esta fórmula define igualmente  $U(x, y, z)$ , ya que la función  $1/r$  sobre la superficie y su derivada en dirección de la normal interior a la superficie son datos geométricos del problema.

Esta caracterización unívoca del potencial newtoniano mediante la ecuación de Poisson-Laplace y ciertas condiciones límites o de contorno suministra al físico matemático dos caminos para el estudio del potencial: uno, el manejo de las integrales del tipo I; otra la obtención de soluciones de la ecuación [2] ó [3], que cumplan las condiciones mencionadas. Ninguno de los dos caminos es cómodo, pero, exceptuando casos triviales, la ventaja se inclina del lado del segundo, para el que los matemáticos disponen de recursos varios, de los que damos breve idea en lo que sigue

**3. La función de Green.**—La fórmula [6], que acabamos de obtener, nos permite calcular el valor de  $U$  en el punto  $P(x, y, z)$  conocidos los valores de  $U$  y  $\frac{dU}{dn}$  en toda una superficie  $\sigma$  que rodea  $P$ .

Podemos evitar el conocimiento de la  $\frac{dU}{dn}$  utilizando la función de Green, que vamos a definir. Para ello restemos de la fórmula [6] la fórmula de Green [4] aplicada, en el mismo recinto, a la misma función  $U$  y a otra  $W(\xi, \eta, \zeta)$ , continua en él y con derivada continua en su superficie (tomando las derivadas en el sentido de la semnormal interior y, por tanto, cambiando el signo del segundo miembro en [4])

$$4\pi \iiint_v \frac{\mu}{r} dv - \iiint_v (U\Delta W + W4\pi\mu) dv = 4\pi U(x, y, z) + \\ + \iint_\sigma \left[ U \frac{d\left(W - \frac{1}{r}\right)}{dn} - \left(W - \frac{1}{r}\right) \frac{dU}{dn} \right] d\sigma$$

Si elegimos para  $W(\xi, \eta, \zeta)$  una función tal que sea:

1.º  $\Delta W = 0$  en todo el recinto.

2.º  $W - \frac{1}{r} = 0$  en la superficie, y llamamos  $G = W - \frac{1}{r}$ , se tendrá

$$4\pi U(x, y, z) = -4\pi \iiint_v \mu G dv - \iint_\sigma U \frac{dG}{dn} d\sigma \quad [7]$$

La función  $G$  de las variables  $\xi, \eta, \zeta, x, y, z$  se llama *función de Green* y ha de tener las propiedades siguientes, que se desprenden de las exigidas a  $W$ .

1.ª  $G + \frac{1}{r} = W$  debe ser continua y derivable en el recinto y su derivada debe serlo en la superficie.

2.ª La laplaciana de  $G$  respecto de las variables  $\xi, \eta, \zeta$  debe ser nula  $\Delta G = 0$ , en el recinto, puesto que  $\Delta W = 0$  y  $\Delta \frac{1}{r} = 0$ .

3.ª  $G = 0$  en la superficie, como se ha dicho (\*).

Una vez efectuadas las integraciones quedará una función exclusiva de las coordenadas  $x, y, z$  del punto  $P$ , que es el potencial buscado.

El conocimiento de la función de Green nos permitirá, pues, hallar el potencial  $U$  en todo punto  $P$  interior a un recinto, conocido su valor en la superficie  $\sigma$ . Análogamente se procede para puntos exteriores haciendo intervenir las condiciones en el infinito.

**4. Los problemas matemáticos fundamentales de la teoría del potencial.**—No es solamente el potencial newtoniano el que conduce a la resolución de ecuaciones del tipo Laplace-Poisson. Vimos en el tomo I, lec-

(\*) Claro es que  $G$  no es analítica regular en todo el recinto por la singularidad en el punto  $P$ . Por eso puede ser nula en la superficie sin serlo en el interior (v. tomo I, lec. 29)

ción 29 cómo otros escatares derivados de problemas físicos de naturaleza diversa satisfacían asimismo a la ecuación de Laplace.

Así, por ejemplo, el potencial de velocidades de un fluido incompresible en régimen irrotacional permanente verifica la ecuación de Laplace y también la verifica la temperatura de un conductor en régimen estacionario, etc.

Por distintos caminos se ve, pues, el físico matemático conducido a la resolución de ecuaciones del tipo Laplace-Poisson en recintos limitados, disponiendo para la individualización de las soluciones de ciertas condiciones de contorno que suelen ser de los dos tipos más importantes siguientes:

**PROBLEMA DE DIRICHLET.**—Se conocen los valores de la función  $U$  que verifica la ecuación de Laplace-Poisson a lo largo de una superficie cerrada y se pide los valores de la función en el interior o exterior de dicho recinto.

Tal es el problema que determina la función de Green. Una aplicación interesante se presenta, por ejemplo, al estudiar la distribución de cargas en un conductor electrizado en presencia de un campo eléctrico exterior.

**PROBLEMA DE NEUMANN.**—Se conocen los valores de la derivada  $\frac{dU}{dn}$  de la función incógnita  $U$  en dirección de la normal en la superficie, a lo largo de toda ella, y se piden los valores de  $U$  en el interior o en el exterior.

Este segundo problema se presenta, por ejemplo, al estudiar la velocidad de un fluido incompresible irrotacional limitado por paredes fijas y rígidas, a lo largo de las cuales la componente normal de la velocidad del fluido es nula.

Ante la imposibilidad de exponer aquí, ni siquiera en resumen, los múltiples problemas que se presentan en relación con la teoría del potencial y puesto que nuestro objeto es simplemente ofrecer muestras de tratamiento matemático de las ecuaciones más interesantes en las aplicaciones, nos limitaremos a tratar tan sólo el problema de Dirichlet en el plano y en el espacio, utilizando para ello distintos recursos.

**5. El problema de Dirichlet en el círculo.**— Se trata de obtener una función  $U(x, y)$  de dos variables  $x, y$ , continua, con derivadas primeras y segundas continuas en un círculo, que verifique la ecuación de Laplace en el mismo

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

y que tome valores prefijados en el contorno. Sobre este problema hemos de volver en la teoría de funciones de variable compleja.



Es esta teoría la que da la solución más elegante del problema y se comprende la razón. La ecuación de Laplace con dos variables puesta en la forma

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

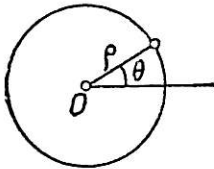
aparece como un caso particular de la ecuación de la cuerda vibrante (lec. 28) en el que  $t=y$ ,  $a^2=-1$ . Transcribiendo la solución formal de d'Alembert a este caso, nos vemos conducidos a considerar soluciones del tipo

$$U = \varphi(x+iy) + \psi(x-iy)$$

es decir, sumas de funciones arbitrarias de variables complejas conjugadas. Dejando para más adelante la justificación de estos resultados al precisar el concepto de derivada respecto de una variable compleja, consignamos simplemente aquí el enlace del problema con dicha teoría desde un punto de vista estrictamente formal.

Puesto que se nos da el valor de la función  $U$  a lo largo de una circunferencia (radio  $\rho$ ) parece natural emplear coordenadas polares  $r, \theta$  con origen en su centro, con lo que la función  $U(\theta)$  en esta circunferencia será periódica en  $\theta$  de período  $2\pi$  y la podemos suponer dada por su desarrollo en serie de Fourier

$$U(\theta) = U_0 + A_1 \text{ sen } (\theta + \varphi_1) + A_2 \text{ sen } (2\theta + \varphi_2) + \dots \quad [1]$$



Expresando ahora la ecuación de Laplace en polares, (V. lecc. 29, § 3.)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = 0 \quad [2]$$

busquemos soluciones de la forma  $U = R(r)\Theta(\theta)$  (separación de variables) Sustituyendo y dividiendo por  $R\Theta$  resulta

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} = - \frac{\Theta''}{\Theta} \quad [3]$$

expresiones que (razonando como tantas veces) no pueden ser iguales más que siéndolo a una constante que escribiremos positiva  $k^2$ , eligiendo, además,  $k$  entero para obtener soluciones periódicas en  $\theta$  de período  $2\pi$ , como corresponde a la periodicidad de la condición de contorno. En resumen, la ecuación se desdobra en

$$\Theta'' + k^2 \Theta = 0 \quad [4]$$

que da

$$\Theta(\theta) = C_k \text{ sen } (k\theta + \varphi_k)$$

$$R'' + \frac{1}{r} R' - \frac{k^2}{r^2} R = 0 \quad [5]$$

que da

$$R = B_k r^k + \frac{B'_k}{r^k}$$

En el interior del círculo hemos de suponer  $B'_k=0$  para obtener soluciones finitas en el centro (\*).

Multiplicando ambas soluciones y formando una serie de términos análogos variando  $k$  de 0 a  $\infty$ , obtenemos la solución en la forma

$$U(r, \theta) = M_0 + \sum_1^{\infty} M_k r^k \text{sen}(k\theta + \varphi_k) \quad [6]$$

faltando sólo la determinación de las constantes  $M_0$ ,  $M_k$  y  $\varphi_k$ , lo que resulta identificando con el desarrollo [1] para  $r=\rho$  radio de la circunferencia dada.

De esta identificación resulta

$$M_k = \frac{A_k}{\rho^k} \quad M_0 = U_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(\theta) d\theta$$

y como  $M_0$  es precisamente el valor de [6] para  $r=0$  se obtiene de nuevo el resultado (demostrado en el tomo I, lección 29, para la esfera): El valor de una función armónica en el centro de una circunferencia es el promedio integral de los valores en ella.

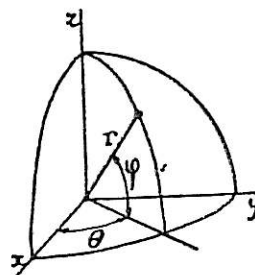
**6. El problema de Dirichlet en la esfera. Caso de simetría cilíndrica.**—Apliquemos método análogo a la determinación de una función armónica  $U$  (potencial) en el interior de una esfera, supuestos dados sus valores sobre su superficie, estudiando primeramente el caso simplificado de una distribución de potencial en esta superficie que sea independiente del ángulo azimutal  $\theta$  (\*\*), con lo que será igualmente independiente de  $\theta$  en todo el espacio (simetría cilíndrica).

Supongamos, pues, conocida  $U(\varphi, r)$  sobre un meridiano, y expresemos la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas. Recordando la expresión de la laplaciana obtenida en la lección 29, §4, y teniendo en cuenta que ahora es  $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$  por la simetría establecida, resulta

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} - \frac{\text{tg } \varphi}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0 \quad [1]$$

Si buscamos ahora soluciones de la forma  $U=R(r)\Phi(\varphi)$  nos veremos conducidos a la ecuación

$$\frac{R''}{R} + \frac{2}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Phi''}{\Phi} - \frac{\text{tg } \varphi}{r^2} \frac{\Phi'}{\Phi} = 0$$



(\*) En cambio en el exterior habríamos de suponer  $B_k=0$  para obtener  $U \rightarrow 0$  para  $r \rightarrow \infty$ .

(\*\*) Tal caso se presentaría, por ejemplo, en una esfera conductora con potencial electrostático inducido por una distribución de cargas eléctricas a lo largo de una recta diametral (eje  $z$ ).

o sea, separando variables,

$$r^2 \frac{R''}{R} + 2r \frac{R'}{R} = - \frac{\Phi''}{\Phi} + \operatorname{tg} \varphi \frac{\Phi'}{\Phi}$$

que sólo puede verificarse si es, separadamente,

$$r^2 \frac{R''}{R} + 2r \frac{R'}{R} = \omega^2 \quad - \frac{\Phi''}{\Phi} + \operatorname{tg} \varphi \frac{\Phi'}{\Phi} = \omega^2$$

La primera

$$r^2 R'' + 2r R' - \omega^2 R = 0$$

es una ecuación de tipo Euler cuyas soluciones son de la forma

$$R = A r^k + \frac{B}{r^{k+1}} \quad \text{donde} \quad k = -\frac{1}{2} + \sqrt{\omega^2 + \frac{1}{4}}, \quad k(k+1) = \omega^2$$

Si elegimos para  $k$  valores enteros positivos y buscamos la solución en el interior de la esfera, deberá ser  $B=0$  para tener un potencial finito en el centro.

Sustituyendo el valor de  $\omega^2$  en función de  $k$  en la segunda queda

$$\Phi'' - \operatorname{tg} \varphi \Phi' + k(k+1)\Phi = 0 \quad [3]$$

que mediante el cambio  $\operatorname{sen} \varphi = x$  se transforma en

$$(1-x^2) \frac{d^2 \Phi}{dx^2} - 2x \frac{d\Phi}{dx} + k(k+1)\Phi = 0 \quad [4]$$

que es una ecuación de *Legendre*, integrada por desarrollos en serie en la lección 15, § 3. Esto explica la denominación de *funciones esféricas* dada a las soluciones  $P_k(x)$  de esta ecuación para valores del parámetro  $k$  enteros, que coinciden con los polinomios obtenidos en el tomo I, lección 18.

La ortogonalidad de tales polinomios entre  $-1$  y  $+1$  (valores extremos de  $x = \operatorname{sen} \varphi$ ) permitirá adaptar la solución buscada a la distribución de contorno dada. En efecto, adoptando soluciones de la forma  $\Sigma R\Phi$ , variando  $k$  de 0 a  $\infty$ , es decir,

$$U(r, \varphi) = \sum_0^{\infty} A_k r^k P_k(\operatorname{sen} \varphi)$$

$r = \rho$  (radio de la esfera), deberá ser

$$U(\rho, \varphi) = \sum_0^{\infty} A_k \rho^k P_k(\operatorname{sen} \varphi)$$

que habrá de coincidir con el desarrollo en funciones  $P_k$  de la función  $U(\varphi)$ , dada a lo largo del meridiano (expresada en función de  $x = \operatorname{sen} \varphi$ ), lo que determinará los coeficientes  $A_k$ .

Se tendrá (véase tomo I, lección 18, §§ 1 y 5)

$$A_k \rho^k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{+1} U(x) P_k(x) dx = \frac{2k+1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} U(\varphi) P_k(\operatorname{sen} \varphi) \cos \varphi d\varphi$$

En particular para  $k=0$ , resulta el término independiente la serie (recuérdese que  $P_0(x)=1$ )

$$A_0 = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} U(\varphi) \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{2 \cdot 2\pi \rho^3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} U \rho^3 \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{4\pi \rho^2} \iint_{\sigma} U d\sigma$$

que nos demuestra nuevamente que el valor de la función  $U$  en el centro ( $r=0$ ) es el promedio de los valores en la superficie esférica.

En resumen, resulta el desarrollo

$$U(r, \varphi) = \sum_0^{\infty} \frac{2k+1}{2} \left(\frac{r}{\rho}\right)^k P_k(\operatorname{sen} \varphi) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} U(\varphi) P_k(\operatorname{sen} \varphi) \cos \varphi d\varphi \quad [7]$$

En particular, para los puntos del eje  $z$ ,  $\operatorname{sen} \varphi=1$ ,  $P_k(1)=1$  y queda

$$U(r) = \sum_0^{\infty} \frac{2k+1}{2} \left(\frac{r}{\rho}\right)^k \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} U(\varphi) P_k(\operatorname{sen} \varphi) \cos \varphi d\varphi$$

Análogamente, en el exterior de la esfera la solución será de la forma

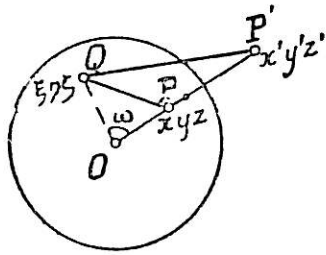
$$U(r, \varphi) = \sum_0^{\infty} \frac{B_k}{r^{k+1}} P_k(\operatorname{sen} \varphi)$$

Para  $r=\rho$ ,  $\frac{B_k}{\rho^{k+1}}$  habrá de coincidir ahora con el coeficiente de  $P_k$  en el desarrollo de  $U(\varphi)$  en serie de funciones esféricas, de donde resulta el cálculo de  $B$  y el desarrollo en el exterior

$$U(r, \varphi) = \sum_0^{\infty} \frac{2k+1}{2} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{k+1} P_k(\operatorname{sen} \varphi) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} U(\varphi) P_k(\operatorname{sen} \varphi) \cos \varphi d\varphi \quad [8]$$

**7.—Caso general. Fórmula de Poisson.**—Para el caso general asimétrico vamos a indicar someramente su resolución haciendo uso de la función de Green. Sea  $P(x, y, z)$  el punto en que deseamos calcular el potencial, y sea  $Q(\xi, \eta, \zeta)$  otro punto en el interior de la esfera. Construyamos el inverso

$P'(x', y', z')$  de  $P$  respecto de la esfera (radio  $R$ ) y comprobemos que la función



$$G = \frac{R}{OP} \frac{1}{QP'} - \frac{1}{QP}$$

es decir,

$$G = \frac{R}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \frac{1}{\sqrt{(x' - \xi)^2 + (y' - \eta)^2 + (z' - \zeta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}} \quad [9]$$

cumple las condiciones exigidas a la función de Green en el párrafo 3.

En efecto:

1.  $W = G + \frac{1}{QP}$  es el primer término de  $G$ , que es continuo y finito por no coincidir  $x', y', z'$  con  $\xi, \eta, \zeta$ , ya que uno es interior y otro exterior.

2.º Como los dos sumandos de  $G$  cumplen la ecuación de Laplace, los derivados respecto de  $\xi, \eta, \zeta$  (como se demostró para  $\frac{1}{r}$  en el tomo I) es  $\Delta G = 0$ .

3.º  $G = 0$  en la superficie de la esfera por ser en ella  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R$  y, además,  $x = x', y = y', z = z'$ .

Llamemos  $r$  a la distancia  $OP$  del punto  $P$  al centro de la esfera,  $r'$  a la distancia  $OP'$ ,  $\rho$  a la distancia  $OQ$ ,  $\omega = \angle POQ$ .

$$\text{Se tendrá } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r \quad r r' = R^2$$

$$r \sqrt{(x' - \xi)^2 + (y' - \eta)^2 + (z' - \zeta)^2} = r \overline{QP'} = r \sqrt{r'^2 + \rho^2 - 2r'\rho \cos \omega} = \sqrt{R^4 - \rho^2 r^2 - 2R^2 \rho r \cos \omega}$$

$$\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2} = \overline{QP} = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \omega}$$

y será

$$G = \frac{R}{\sqrt{R^4 + \rho^2 r^2 - 2R^2 \rho r \cos \omega}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \omega}} \quad [10]$$

de donde la derivada  $\frac{dG}{dn}$  en la superficie esférica valdrá

$$\left( \frac{dG}{d\rho} \right)_{\rho=R} = - \frac{R^3 r^2 - R^3 r \cos \omega}{(R^4 + R^2 r^2 - 2R^3 r \cos \omega)^{3/2}} + \frac{R - r \cos \omega}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \omega)^{3/2}} = \frac{R^2 - r^2}{R(R^2 + r^2 - 2rR \cos \omega)^{3/2}}$$

Cambiando el signo (para valores negativos de  $d\rho$  hacia el interior y

aplicando la fórmula [7] del párrafo 3 en el interior de la esfera, donde supondremos no exista materia atractiva ( $\mu=0$ )

$$U(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} U \frac{R^2 - r^2}{R(R^2 + r^2 - 2rR \cos \omega)^{3/2}} d\sigma \quad [11]$$

En coordenadas esféricas  $d\sigma = R^2 \cos \Phi d\Phi d\Theta$ ,  $\Theta$ ,  $\Phi$  variables de integración sobre la superficie esférica, y queda la llamada *fórmula de Poisson*

$$U(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} U(R, \Theta, \Phi) \frac{(R^2 - r^2) R}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \omega)^{3/2}} \cos \Phi d\Phi d\Theta \quad [12]$$

Las coordenadas  $\theta, \varphi$  del punto  $P$ , donde se calcula el potencial entran bajo el signo integral en la expresión de  $\cos \omega = \sin \Phi \sin \varphi + \cos \Phi \cos \varphi = \cos(\Theta - \theta)$ .

Para facilitar el cálculo de esta integral se desarrolla en serie de potencias de  $x$  la función

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2x \cos \omega + x^2}} = \sum_0^{\infty} x^n P_n(\cos \omega) \quad [13]$$

serie que se demuestra ser uniformemente convergente para  $x < 1$ .

Derivando respecto de  $x$  resulta

$$\frac{\cos \omega - x}{(1 - 2x \cos \omega + x^2)^{3/2}} = \sum_0^{\infty} n x^{n-1} P_n(\cos \omega)$$

que multiplicada por  $2x$  y sumada a la anterior da

$$\frac{1 - x^2}{(1 - 2x \cos \omega + x^2)^{3/2}} = \sum_0^{\infty} (2n + 1) x^n P_n(\cos \omega)$$

y, por tanto, poniendo en [12]  $\frac{r}{R} = x$  resulta

$$U(r, \theta, \varphi) = \sum_0^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} U(R, \Theta, \Phi) P_n(\cos \omega) \cos \Phi d\Phi d\Theta$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{Y_n(\theta, \varphi) \text{ función de Laplace}}$

La expresión abarcada en una llave es una función llamada *esférica generalizada* de Laplace. Como se ve, su valor depende de la distribución de potencial  $U$  sobre la esfera

En el caso particular en que  $U$  sólo dependa de  $\varphi$ , pero no de  $\theta$  y se



trate de obtener el potencial sobre un punto del eje  $z$  (simetría cilíndrica)  $\cos \omega = \sin \Phi$ , y queda

$$U(r) = \Sigma \left( \frac{r}{R} \right)^n \frac{2n+1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} U(R, \Phi) P_n(\sin \Phi) \cos \Phi d\Phi$$

que coincide con la solución obtenida en el párrafo 6 si coinciden los polinomios de Legendre con los coeficientes del desarrollo [13], lo que fué establecido sin demostración en el tomo I, lección 18, y de lo que damos ahora una prueba indirecta fundada en la unicidad de la solución del problema de contorno que nos ocupa (función armónica en una esfera dada por sus valores en la superficie) (\*).

### NOTAS

**8. El potencial newtoniano obtenido como solución de la ecuación de Laplace.**—Hemos visto el papel fundamental que la función  $1/r$  desempeña en la teoría del potencial. En el tomo primero demostramos que, en efecto, esta función cumple la ecuación de Laplace. Veamos inversamente cómo se obtiene dicha solución sin más que imponerle la *simetría esférica* y la anulación en el infinito.

En efecto, la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas cuando la función  $U$  que debe verificarla sólo depende de  $r$ , y no de  $\theta$  ni de  $\varphi$  (simetría esférica) se reduce a

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dU}{dr} = 0$$

que da sucesivamente

$$\frac{dU'}{U'} = -2 \frac{dr}{r} \quad U' = \frac{k}{r^2} \quad U = \frac{C_1}{r} + C_2$$

debiendo ser, finalmente,  $C_2 = 0$  si queremos que  $U = 0$  para  $r = \infty$ .

**9. El potencial logarítmico.**—Busquemos análogamente cuál es la solución de dicha ecuación que tiene simetría cilíndrica, es decir, que sólo dependa de la coordenada cilíndrica  $r$ .

Recordando la expresión de la laplaciana en dichas coordenadas (lección 29, § 3) resulta

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} = 0$$

que da sucesivamente

$$\frac{dU'}{U'} = -\frac{dr}{r} \quad U' = \frac{C_1}{r} \quad U = C_1 \ln r + C_2$$

Este tipo de soluciones convienen al caso teórico de potenciales creados por conductores cilíndricos infinitos, y al caso práctico de conductores de gran longitud como los cables de conducción, etc. Por ello tiene también gran interés en las aplicaciones este tipo de potencial llamado *logarítmico*.

(\*) Para más detalles sobre la resolución del problema de Dirichlet en la esfera en el caso general, y para el estudio de las propiedades de las funciones de Laplace en él utilizadas, puede consultar el lector las obras ya citadas de Courant-Hilbert, Frank-Mises, Hort, Baule, etc.

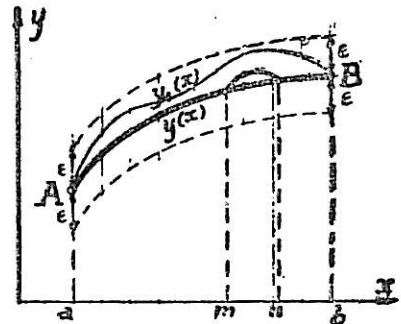
Capítulo XI.—NOCIONES SOBRE CALCULO DE VARIACIONES

LECCIÓN 32.—LA ECUACION DE EULER

1. **Problemas que resuelve el Cálculo de variaciones.**—Sea  $y(x)$  una función uniforme, varias veces derivable, definida en el intervalo  $[a, b]$  y representada en el plano cartesiano por un arco de curva  $A, B$ . Consideremos una cierta función conocida  $f(x, y, y', y'', \dots)$  de los valores que a lo largo de dicha curva toman la variable  $x$ , la función  $y$  y las derivadas sucesivas  $y', y'', \dots$ . Consideremos, finalmente, la integral

$$I = \int_a^b f(x, y, y', y'', \dots) dx$$

Diremos que la curva  $y=y(x)$  es una *extremal* en  $[a, b]$  relativa a  $f$  si hace máxima o mínima dicha integral, es decir si al sustituir  $y(x)$  por cualquier otra función  $y_1(x)$ , igualmente derivable, cuya representación pase igualmente por  $A, B$  y cuyos valores difieran, en valor absoluto, de los correspondientes de  $y(x)$  en menos de un cierto número positivo  $\epsilon$  en todo el intervalo  $[a, b]$ , el nuevo valor de la integral es menor (mayor) que el anterior (\*).



Es fácil ver que el carácter extremal de una curva en  $[a, b]$  implica el mismo carácter en todo intervalo parcial  $[m, n]$ , pues si existiera en  $[m, n]$  otro arco de curva que diera mayor (menor) valor a la integral, complementándolo con los arcos de extremal entre  $a, m$  y entre  $n, b$  tendríamos una curva entre  $A$  y  $B$  que daría, asimismo, mayor (menor) valor a la integral  $I$  que la extremal considerada, en contra de la definición.

EJEMPLO. La línea recta entre dos puntos  $A, B$  de abscisas  $a, b$ , hace mínima la integral

$$\int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx$$

que da la longitud entre ellos y es, por tanto, una *extremal* relativa a la función subintegral  $[1+y'^2]^{1/2}$  y lo es en todo trozo parcial.

(\*) Ciertos autores (*Kneser*, por ejemplo) distinguen entre *extremales fuertes y débiles* según que se acote sólo la variación de la función  $y(x)$ , o también de las derivadas. La formulación que daremos en seguida de tal variación situará implícitamente nuestra teoría en el sentido de las *extremales débiles* (*Schwachextremales*).

El cálculo de variaciones tiene por objeto la determinación de curvas extremales (en el plano, en el espacio o en variedades de orden superior) y análogamente de superficies extremales que hacen máximas o mínimas ciertas integrales extendidas sobre ellas, con determinadas condiciones de contorno.

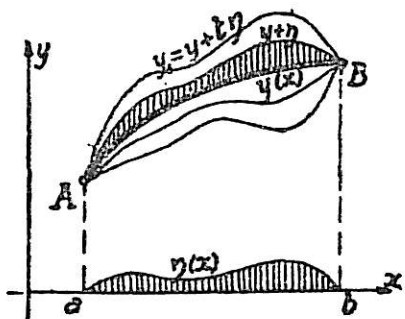
En este capítulo vamos a ocuparnos tan sólo de los problemas más elementales del cálculo de variaciones y de sus aplicaciones más importantes.

**2. La ecuación de Euler.**—Empecemos considerando el caso más sencillo en que la función subintegral sólo depende de  $x, y, y'$ , es decir, tratemos de hallar  $y$  para que sea máxima o mínima la integral

$$I = \int_a^b f(x, y, y') dx \quad [1]$$

en la que supondremos que  $f$  admite derivadas  $f_y, f_{y'}$  uniformemente continuas en el intervalo considerado, siendo en particular  $f_y$  a su vez derivable con derivada continua en el mismo intervalo.

Expresemos para ello la nueva curva  $y_1(x)$  en la forma  $y + t\eta(x)$  en la que  $\eta$  es una función derivable nula en los extremos  $a$  y  $b$  del intervalo, y  $t$  es un parámetro que al variar, hará variar asimismo la diferencia  $t\eta$  entre las ordenadas de la curva extremal y la nueva. La condición buscada conduce a la siguiente: La integral



$$I = \int_a^b f(x, y + t\eta, y' + t\eta') dx \quad [2]$$

dependiente del parámetro  $t$  debe ser máxima o mínima para  $t=0$  cualquiera que sea  $\eta$ .

Derivando, pues, respecto del parámetro  $t$  se deberá tener

$$\left( \frac{dI}{dt} \right)_{t=0} = 0; \quad \text{es decir,} \quad \int_a^b (f_y \eta + f_{y'} \eta') dx = 0$$

Pero podemos transformar la integral del segundo sumando mediante una integración por partes

$$\int_a^b f_{y'} \eta' dx = [\eta f_{y'}]_a^b - \int_a^b \eta \left( \frac{d}{dx} f_{y'} \right) dx$$

La parte integrada es nula por anularse  $\eta$  para  $x=a$  y  $x=b$ . Sustituyendo queda, pues, la condición

$$\int_a^b \eta \left( f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} \right) dx = 0 \quad \text{cualquiera que sea } \eta \quad [3]$$

lo que exige en todo el intervalo

$$\boxed{f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0} \quad [4]$$

En efecto, si fuera esta expresión distinta de cero en algún punto, lo sería, por razón de continuidad, en un entorno  $[m, n]$  del mismo, y eligiendo en este entorno  $\eta(x)$  del mismo signo la integral en  $[m, n]$  sería positiva, la curva no sería extremal en este intervalo parcial y por tanto tampoco lo sería en el total por lo dicho en el § 1.

Esta ecuación es la condición *necesaria* que tiene que cumplir  $y$ . Es una ecuación diferencial de 2.º orden, llamada de Euler, cuya integración introducirá dos constantes arbitrarias que deberán determinarse por la condición de pasar la curva integral por los dos puntos  $A$  y  $B$ , problema de contorno con frecuencia más difícil de resolver que la propia integración.

Caso particular interesante y frecuente es aquel en que no aparece la función  $y$  en el integrando. En este caso  $f_y = 0$  y la ecuación de Euler [4] admite la integral primera,

$$f_{y'} = C_1 \quad [5]$$

El carácter *necesario* de la ecuación [4] indica que sólo entre las soluciones así obtenidas se hallará la buscada. Criterios analíticos de *suficiencia* son difíciles de formular y serán sistemáticamente omitidos de nuestro estudio, pues, afortunadamente, en los problemas de aplicación la naturaleza física o geométrica del problema basta para comprobar la validez de dichas soluciones (\*).

### 3. Ejemplos clásicos.

**EJEMPLO 1.** *Superficies de revolución de área mínima.*—Dados una recta  $r$  y dos puntos  $A$  y  $B$  fuera de ella, propongámonos unirlos por una curva que engendre, al girar alrededor de  $r$ , una superficie de revolución de área mínima. Tomando el eje  $y$  en  $r$  se deberá hacer mínima la integral

$$2\pi \int_a^b x ds; \quad \text{es decir,} \quad I = \int_a^b x \sqrt{1 + y'^2} dx$$

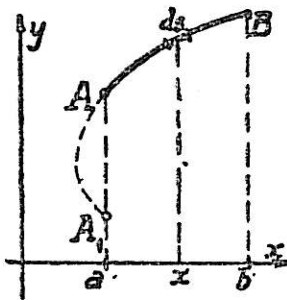
Y aplicando [5] resulta

$$x \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1, \quad y' = \frac{C_1}{\sqrt{x^2 - C_1^2}}$$

(\*) Véase en nota, al final de la lección siguiente, la razón del por qué de tales dificultades.

de donde

$$y + C_2 = C_1 \operatorname{Arg} \operatorname{Ch} \frac{x}{C_1}; \quad \text{es decir,} \quad \frac{x}{C_1} = \operatorname{Ch} \frac{y + C_2}{C_1}$$



La solución es una *catenaria de base* en el eje  $y$  es decir *en el eje de revolución*.

La determinación de las constantes  $C_1$  y  $C_2$  con la condición de pasar la catenaria por los dos puntos dados  $A$  y  $B$ , conduce a un sistema trascendente de solución laboriosa cuyo estudio y discusión omitimos (\*). La solución es válida aún en los casos en que entre dichos puntos no sea  $y$  función uniforme de  $x$  como implícitamente se ha supuesto (figura).

**EJEMPLO II. Braquistocrona.**—Se trata de establecer entre dos puntos  $A, B$  situados a distinto nivel y en el plano vertical que los contiene, una curva tobogán de tal modo que sea mínimo el tiempo empleado por un grave al deslizarse por ella sin velocidad inicial (despreciando los rozamientos).

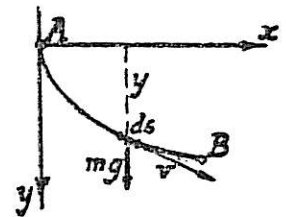
Tomando el eje  $x$  horizontal y el  $y$  en dirección de la plomada, con origen en el punto  $A$ , el teorema de las fuerzas vivas (Lec. 17, § 6) da en todo instante

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g y; \quad \text{o sea,} \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{2 g y}$$

es decir,  $dt = \frac{ds}{\sqrt{2 g y}}$ , y es preciso hacer mínima

la integral

$$\int \frac{ds}{\sqrt{2 g y}} = \int \frac{\sqrt{1 + x'^2} dy}{\sqrt{2 g y}} \quad [6]$$



Hemos escrito la  $ds$  tomando  $y$  como variable independiente puesto que así el integrando no contiene la función  $x$  y, por tanto, puede aplicarse [5] que da

$$f_{x'} = C_1; \quad \text{es decir,} \quad \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{x'}{\sqrt{1 + x'^2}} = C_1 \quad [7]$$

de donde

$$x' = \frac{dx}{dy} = \frac{C_1 \sqrt{y}}{\sqrt{1 - C_1^2 y}}, \quad x = \int_0^y \frac{C_1 \sqrt{y}}{\sqrt{1 - C_1^2 y}} dy \quad [8]$$

(\*) Se trata del llamado «Problema de Goldschmidt», que puede consultar el lector en la Memoria de *E. Terradas*, «Estudios sobre los hilos», así como en un trabajo del autor, «Sobre las catenarias de tensión mínima», presentado en el Congreso de Coimbra, Asociación Española para el Progreso de las Ciencias, año 1925.

Poniendo

$$y = \frac{1}{2 C_1^2} (1 - \cos \theta) = \frac{1}{C_1^2} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \quad [9]$$

resulta

$$dy = \frac{1}{2 C_1^2} \operatorname{sen} \theta d\theta, \quad \sqrt{y} = \frac{1}{C_1} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}, \quad \sqrt{1 - C_1^2 y} = \cos \frac{\theta}{2}$$

y la integral se convierte en

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{C_1^2} \int_0^\theta \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2 C_1^2} \int_0^\theta (1 - \cos \theta) d\theta \\ x &= \frac{1}{2 C_1^2} (\theta - \operatorname{sen} \theta) \end{aligned} \quad [10]$$

Las ecuaciones [9] y [10] son las *ecuaciones paramétricas* clásicas de la *cicloide* correspondiente a un radio del círculo generador  $r = \frac{1}{C_1 \sqrt{2}}$ . Esta es, pues, la curva solución.

#### 4. Notaciones y razonamientos del cálculo de variaciones clásico.—

En la deducción del párrafo anterior el término  $t\eta$ , en el que  $t \rightarrow 0$ , representa la diferencia infinitamente pequeña o variación de la función  $y$  al pasar de la curva extremal a otra infinitamente próxima y se expresa en los tratados clásicos por  $\delta y$ . De modo que, análogamente,  $\delta y' = t\eta'$  representa la variación de  $y'$ , etc.

Se comprueba fácilmente que

$$\frac{d}{dx} \delta y = t\eta' = \delta y' \quad \text{y análogamente} \quad \frac{d^2}{dx^2} \delta y = \delta y'', \quad \dots \circ$$

El símbolo *variación*  $\delta$  es, pues, *permutable con el de derivación respecto a la variable independiente*. Esto permite llegar a la ecuación de Euler razonando a la manera clásica del Cálculo de variaciones, equivalente en el fondo a la deducción anterior y que conviene que el lector conozca por hallarse todavía reproducida en no pocos tratados. Expresemos la variación primera de la integral, es decir la parte principal del infinitésimo diferencia entre los valores de la integral para la función  $y$  y para  $y + \delta y$

$$\delta I = \int_a^b [f(x, y + \delta y, y' + \delta y') - f(x, y, y')] dx = \int_a^b (f_y \delta y + f_{y'} \delta y') dx$$

y transformando la segunda integral

$$\int_a^b f_{y'} \delta y' dx = [f_{y'} \delta y]_a^b - \int_a^b \delta y \frac{d}{dx} f_{y'} dx \quad [11]$$



resulta

$$\delta I = \int_a^b \delta y \left[ f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} \right] dx \quad [12]$$

Pero el carácter extremal de la integral exige la anulación de esta variación primera (equivalente a la diferencial primera respecto del anterior parámetro  $t$ ) *independientemente* de la variación *arbitraria*  $\delta y$ , con lo que obtenemos nuevamente la ecuación [4]. Para el estudio de condiciones suficientes es preciso acudir a las variaciones (diferenciales) de orden superior. De un modo general, toda integral cuya variación es nula se llama *estacionaria* y en algunas cuestiones técnicas interesa muchas veces el carácter estacionario independiente del carácter de máximo o mínimo.

**5. Presencia en el integrando de derivadas de orden superior.**—Dados, análogamente, dos puntos  $A$  y  $B$  y por ellos dos rectas  $t_1, t_2$ , propongámonos hallar la curva  $y(x)$  que pase por  $A$  y  $B$ , que admita en estos puntos las tangentes  $t_1$  y  $t_2$ , y que haga mínima o máxima la integral

$$I = \int_a^b f(x, y, y', y'') dx \quad [13]$$

Se tendrá, análogamente,

$$\delta I = \int_a^b (f_y \delta y + f_{y'} \delta y' + f_{y''} \delta y'') dx \quad [14]$$

debiendo ser ahora la  $\delta y$  una función (de la forma  $t\eta$ ) que se anule en  $a$  y  $b$  así como su derivada  $\delta y'$  con objeto de que todas las curvas consideradas pasen por  $A$  y  $B$  y tengan en dichos puntos las mismas tangentes  $t_1$  y  $t_2$ .

La integral de  $f_{y'} \delta y'$  se transforma como antes según [11]. La integral de  $f_{y''} \delta y''$  se transforma asimismo mediante dos integraciones por partes

$$\int f_{y''} \delta y'' dx = [\delta y' f_{y''}]_a^b - \int_a^b \delta y' \frac{d}{dx} f_{y''} dx = - \left[ \delta y \frac{d}{dx} f_{y''} \right]_a^b + \int_a^b \delta y \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} dx \quad [15]$$

anulándose las partes integradas por ser  $\delta y = 0$ ,  $\delta y' = 0$  en  $a$  y  $b$ . Sustituyendo en [14] queda

$$\delta I = \int_a^b \delta y \left[ f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} \right] dx = 0 \quad [16]$$

lo que exige, por la arbitrariedad de  $\delta y$ ,

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} = 0 \quad [17]$$

ecuación diferencial en  $y$  de *cuarto orden* cuya integración da cuatro constantes, a determinar con la condición de pasar la curva por  $A$  y  $B$  y tener en ella las tangentes indicadas  $t_1$  y  $t_2$ .

**6. Caso de varias funciones en el integrando.**—Supongamos que se trata de hacer mínima o máxima la integral

$$I = \int_a^b f(x, y, z, y', z') dx \quad [18]$$

en cuyo integrando aparecen dos funciones  $y(x)$ ,  $z(x)$  y sus derivadas, funciones que deben tomar valores prefijados para  $x=a$  y para  $x=b$ . Tal el caso de una curva del espacio que pase por dos puntos  $A$  y  $B$  prefijados y haga mínima la integral [18].

Variando estas funciones respectivamente en  $\delta y = t\eta(x)$ ,  $\delta z = t\zeta(x)$  tales que  $\eta(x)=0$ ,  $\zeta(x)=0$  en  $a$  y  $b$  y razonando como antes, es decir derivando o diferenciando respecto a  $t$  deberá resultar

$$\delta I = \int_a^b (f_y \delta y + f_z \delta z + f_{y'} \delta y' + f_{z'} \delta z') dx = 0$$

en la que pueden transformarse dos de las integrales mediante

$$\int_a^b f_{y'} \delta y' dx = [\delta y f_{y'}]_a^b - \int_a^b \delta y \frac{d}{dx} f_{y'} dx$$

$$\int_a^b f_{z'} \delta z' dx = [\delta z f_{z'}]_a^b - \int_a^b \delta z \frac{d}{dx} f_{z'} dx$$

Como son nulas las partes integradas por ser  $\delta y = \delta z = 0$  en  $a$  y  $b$ , resulta

$$\delta I = \int_a^b \left[ \delta y \left( f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} \right) + \delta z \left( f_z - \frac{d}{dx} f_{z'} \right) \right] dx$$

pero la arbitrariedad e independencia de las variaciones  $\delta y$ ,  $\delta z$  exige la anulaci3n separada de los par3ntesis, obteni3ndose el sistema de ecuaciones diferenciales de 2.º orden de Euler

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0, \quad f_z - \frac{d}{dx} f_{z'} = 0$$

cuyas constantes de integraci3n se determinan con las condiciones de contorno fijadas. An3logamente se procede si aparecen en el integrando m3s de dos funciones o si las derivadas de las mismas son de orden superior, lleg3ndose entonces a sistemas de m3s ecuaciones o de mayor orden.

**EJEMPLO Rayos luminosos.**—Seg3n se sabe, la velocidad de propagaci3n de la luz en un medio refringente isot3pico es inversamente proporcional al 3ndice de refracci3n. Si el medio es de 3ndice variable  $n(x, y, z)$  (por ejemplo, la misma atm3sfera), el tiempo empleado por el rayo luminoso en recorrer cada elemento  $ds$  ser3 pues proporcional a  $n(x, y, z) ds$ , siendo  $n(x, y, z)$  el valor del 3ndice en un punto  $x, y, z$  del elemento  $ds$ . Por tanto, seg3n

el principio de *Fermat*, los rayos luminosos serán las curvas extremales que hagan mínima la integral

$$\int_A^B n(x, y, z) ds$$

entre dos puntos cualesquiera del medio.

Si el índice de refracción es fijo bastará hacer mínima la integral

$$\int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx$$

lo que, por no aparecer  $y$  y  $z$  en el integrando, conduce directamente al sistema

$$f_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = C_1, \quad f_{z'} = \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = C_2$$

que resueltas en  $y'$ ,  $z'$  dan

$$y' = k_1 \text{ (const.}^\circ) \quad z' = k_2 \text{ (const.}^\circ)$$

y por tanto

$$y = k_1 x + p \quad z = k_2 x + q$$

comprobándose el carácter rectilíneo de los rayos luminosos en un medio refringente uniforme.

### EJERCICIOS

1. Hallar la forma de los rayos luminosos en un medio transparente isótropo en el que el índice de refracción es inversamente proporcional a la altura.

2. Hallar las curvas que en el campo de fuerzas plano definido por las funciones  $X(x, y)$ ,  $Y(x, y)$  hacen extremal el trabajo entre dos puntos cualesquiera  $A$ ,  $B$

Analícese la naturaleza del problema. Ejemplo:  $X = y^2$ ,  $Y = x^3$ . ¿Cabe dar arbitrarios los puntos  $A$  y  $B$ ? ¿Qué ocurre si el campo admite función potencial?

3. Repetición del problema anterior en el espacio.

Los sencillos ejemplos 2 y 3 constituyen una prueba de la insuficiencia de las ecuaciones de Euler. Son problemas extremales que carecen en general de solución. La ecuación de Euler suministra extremales singulares sobre las que deben estar situados los puntos  $A$  y  $B$ , o se convierte en una identidad; en cuyo caso el trabajo es independiente del camino.

4. Plantear y resolver en coordenadas polares el problema de hallar las curvas que dan la longitud mínima entre dos puntos del plano. Compruébese que la ecuación de Euler conduce a la anulación de la curvatura.

LECCIÓN 33.—EXTREMALES LIGADAS. ISOPERÍMETROS. VARIACIÓN DE INTEGRALES MÚLTIPLES

En la lección anterior hemos considerado diversos problemas de cálculo de variaciones en los cuales la función o funciones incógnitas podían ser variadas *arbitrariamente*, y en la arbitrariedad de dichas variaciones fundábamos el razonamiento conducente a la ecuación diferencial o al sistema de ecuaciones, entre cuyas soluciones deben hallarse las extremales buscadas, es decir las curvas que hacen estacionaria la integral.

Pero ocurre con frecuencia, en las aplicaciones, que las curvas extremales no admiten variaciones *independientes*, sino ligadas por ciertas condiciones como, por ejemplo, la de pertenecer dichas curvas a determinada superficie (tal ocurre en el problema de las geodésicas) o el deber dar un valor fijo a otra integral (problema de los isoperímetros), etc. De unos y otros casos daremos leve idea en lo que sigue.

1. **Extremales ligadas. Geodésicas.**—Sea, por ejemplo, la integral considerada en el § 6 de la lección anterior

$$I = \int_a^b f(x, y, z, y', z') dx \quad [1]$$

en la que las funciones  $y(x)$ ,  $z(x)$  no son ahora independientes, sino que están ligadas por una relación del tipo

$$F(x, y, z) = 0 \quad [2]$$

es decir, la curva  $y=y(x)$ ,  $z=z(x)$  debe estar situada sobre la superficie [2].

En este caso, en la expresión de la  $\delta I$

$$\delta I = \int_a^b \left[ \delta y \left( f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} \right) + \delta z \left( f_z - \frac{d}{dx} f_{z'} \right) \right] dx = 0$$

las variaciones  $\delta y$  y  $\delta z$  no son ya independientes y no podemos argumentar sobre su arbitrariedad para anular independientemente los paréntesis que las multiplican. De [2] se desprende, en efecto, que debe verificarse

$$F_y \delta y + F_z \delta z = 0$$

simultáneamente a

$$\delta y \left( f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} \right) + \delta z \left( f_z - \frac{d}{dx} f_{z'} \right) = 0$$

La eliminación de una de las variaciones permitirá anular el coeficiente de la otra; pero se obtiene una solución más simétrica mediante el método de los multiplicadores. En efecto, multiplicando por la indeterminada  $\lambda$  la primera ecuación y combinando con la segunda deberá tenerse

$$\delta y \left( \lambda F_y + f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} \right) + \delta z \left( \lambda F_z + f_z - \frac{d}{dx} f_{z'} \right) = 0$$

Dando ahora a la indeterminada  $\lambda$  un valor tal que anule el primer paréntesis, quedará la sola variación independiente  $\delta s$  cuyo factor anularemos también y el sistema constituido por

$$\begin{aligned} \lambda F_y + f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} &= 0 \\ \lambda F_z + f_z - \frac{d}{dx} f_{z'} &= 0 \end{aligned} \quad [3]$$

y por la ecuación de condición [2] servirá (teóricamente al menos) para hallar las posibles soluciones  $y, z, \lambda$  del problema.

EJEMPLO. Apliquemos el procedimiento a la determinación sobre la superficie

$$F(x, y, z) = 0 \quad [4]$$

de las curvas de longitud mínima entre dos puntos cualesquiera  $A$  y  $B$  de la misma, es decir, las extremales de la integral

$$\int_A^B ds = \int_{t_0}^{t_1} V \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt \quad [5]$$

Hemos expresado la  $ds$  paramétricamente, con lo que son ahora tres funciones  $x(t), y(t), z(t)$  a determinar, y el sistema [3] se convierte en

$$\lambda F_x - \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = 0, \quad \lambda F_y - \frac{d}{dt} \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = 0, \quad \lambda F_z - \frac{d}{dt} \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = 0$$

del que resulta

$$\lambda dt = \frac{d \cos \alpha}{F_x} = \frac{d \cos \beta}{F_y} = \frac{d \cos \gamma}{F_z} \quad [6]$$

siendo  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  los cosenos directores de la tangente, y sus diferenciales proporcionales a los cosenos directores de la normal principal. Las curvas buscadas tienen, pues, la propiedad de que su normal principal coincide con la normal a la superficie, es decir, son las curvas que en el tomo 1.º, lección 33, § 8 hemos llamado *geodésicas* de la superficie. Queda así estable-

cida analíticamente la propiedad geométrica de dichas curvas comprobada en aquella lección por un razonamiento mecánico intuitivo.

**2. Problemas isoperimétricos.**— Propongámonos, por ejemplo, hallar los valores extremales de  $y$  que hagan estacionaria la integral

$$I = \int_a^b f(x, y, y') dx \quad [1]$$

y que, además, den un valor prefijado  $k$  a otra integral análoga

$$J = \int_a^b F(x, y, y') dx = k \quad [2]$$

Con objeto de manejar debidamente la condición [2] que restringe la libertad de variación de  $y$  demos ahora a dicha variación la forma  $\delta y = t\eta_1(x) + s\eta_2(x)$  dependiente de *dos* funciones derivables arbitrarias  $\eta_1(x)$  y  $\eta_2(x)$  que se anulen en los extremos del intervalo, y de dos parámetros  $t$  y  $s$  los cuales ya no pueden ser independientes puesto que la función  $y + \delta y$  debe satisfacer también a [2].

En resumen: si  $y(x)$  es la extremal buscada, la integral [1]

$$I = \int_a^b f(x, y + t\eta_1 + s\eta_2, y' + t\eta'_1 + s\eta'_2) dx$$

debe tener un mínimo o máximo para  $t=0, s=0$ , estando  $t$  y  $s$  ligados por la ecuación de condición

$$\Phi(t, s) = \int_a^b F(x, y + t\eta_1 + s\eta_2, y' + t\eta'_1 + s\eta'_2) dx = k$$

Recordando la aplicación del método de los multiplicadores a la teoría ordinaria de máximos y mínimos en funciones de varias variables ligadas por ecuaciones de condición, las soluciones  $t=s=0$  deben hacer mínima la función

$$I + \lambda \Phi = \int_a^b (f + \lambda F) dx$$

lo que exige la anulación de las derivadas respecto de  $t$  y de  $s$  para  $t=0, s=0$ , derivadas que se transforman de modo análogo a lo efectuado en el § 1 de la lección anterior dando

$$\int \eta_1 \left( f_y + \lambda F_y - \frac{d}{dx} (f_{y'} + \lambda F_{y'}) \right) dx = 0, \quad \int \eta_2 ( \quad ) dx = 0$$

y como éstas deben verificarse independientemente de la elección de las funciones  $\eta_1$  y  $\eta_2$ , resulta asimismo la ecuación de Euler

$$f_y + \lambda F_y - \frac{d}{dx} (f_{y'} + \lambda F_{y'}) = 0$$



que determinará  $y$  en función de  $\lambda$ , parámetro que se calculará a posteriori sustituyendo la  $y$  obtenida en [2]. En resumen: Basta formar la ecuación de Euler con la función  $f + \lambda F$  y determinar  $\lambda$  a posteriori mediante [2].

Apliquemos el método al cálculo de la curva plana cerrada isoperimétrica de área máxima. Adoptando coordenadas polares  $r, \theta$  con polo interior al recinto limitado por la curva (y limitándonos a considerar las curvas representadas por funciones *uniformes*  $r = r(\theta)$ ) habrá que hacer máxima la función

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta \quad \text{debiendo ser} \quad \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta = k$$

La ecuación de Euler aplicada a la función  $f + \lambda F = \frac{r^2}{2} + \lambda \sqrt{r^2 + r'^2}$  da ahora

$$f_r + \lambda F_r - \frac{d}{d\theta} (f_{r'} + \lambda F_{r'}) = 0 \quad \text{o sea} \quad r + \lambda \frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}} - \lambda \frac{d}{d\theta} \frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}} = 0$$

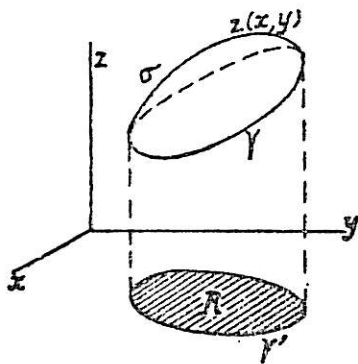
que después de sencillos cálculos se reduce a

$$-\lambda = \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{-rr'' + 2r'^2 + r^2} = \text{radio de curvatura}$$

La solución es, pues, la *curva de curvatura constante*, o sea la circunferencia, cuyo radio coincide con el valor de  $-\lambda$ , de donde  $\lambda = -k/2\pi$ .

**3. Problemas de cálculo de variaciones en integrales dobles.**—Terminemos esta brevísima exposición teórica dando idea de la determinación de funciones extremales de varias variables independientes que hacen estacionarios los valores de integrales múltiples, problema de aplicación frecuente en la técnica matemática moderna del equilibrio elástico. Nos ceñiremos al caso de una integral doble de la forma

$$I = \iint_{\sigma} f(x, y, z, p, q) dx dy, \quad (p = z_x, q = z_y) \quad [1]$$



extendida en un cierto casquete  $\sigma$  de superficie  $z = z(x, y)$  limitado por una curva fija  $\gamma$ . Se trata de determinar  $z$  de modo que esta integral sea máxima o mínima.

Para ello variaremos  $z$  en  $\delta z = t\zeta(x, y)$ ,  $t$  parámetro,  $\zeta$  función derivable, *nula* en el contorno  $\gamma$ , y expresaremos que la

$$I = \iint_R f(x, y, z + t\zeta, p + t\zeta_x, q + t\zeta_y) dx dy$$

tiene un máximo o un mínimo para  $t=0$ , lo que exige que

$$\left( \frac{dI}{dt} \right)_{t=0} = \iint_R (\zeta f_z + \zeta_x f_p + \zeta_y f_q) dx dy = 0 \quad [2]$$

Ahora bien: podemos integrar parcialmente los términos segundo y tercero transformando parte de sus integrales, extendidas al recinto plano  $R$  limitado por la proyección  $\gamma'$  de  $\gamma$  sobre  $xy$ , en integrales curvilíneas sobre  $\gamma'$ , recordando lo dicho en la lección 22, § 4 del tomo 1.º, así:

$$\begin{aligned} \iint \zeta_x f_p dx dy &= \iint \left( \frac{\partial}{\partial x} (\zeta f_p) - \zeta \frac{\partial f_p}{\partial x} \right) dx dy = \\ &= \int_{\gamma'} \zeta f_p dy - \iint_R \zeta \frac{\partial f_p}{\partial x} dx dy = - \iint_R \zeta \frac{\partial f_p}{\partial x} dx dy \end{aligned}$$

por ser nula  $\zeta$  a lo largo de  $\gamma$ . Y análogamente

$$\iint \zeta_y f_q dx dy = - \iint_R \zeta \frac{\partial f_q}{\partial y} dx dy$$

con lo que se debe tener [2]

$$\iint_R \zeta \left( f_z - \frac{\partial f_p}{\partial x} - \frac{\partial f_q}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad [3]$$

y como esto debe verificarse cualquiera que sea la función  $\zeta(x, y)$  deberá tenerse (razonando como en el caso de una variable independiente)

$$f_z - \frac{\partial}{\partial x} f_p - \frac{\partial}{\partial y} f_q = 0 \quad [4]$$

ecuación en derivadas parciales de 2.º orden a la que tiene que satisfacer la función  $z$ , análoga a la de Euler en el caso de la integral simple y de una sola variable independiente.

Desarrollándola resulta

$$f_{p^2} r + 2 f_{pq} s + f_{q^2} t + f_{pz} p + f_{qz} q + f_{px} + f_{qy} - f_z = 0 \quad [5]$$

lineal en las derivadas segundas  $r$ ,  $s$  y  $t$  pero, en general, no en las primeras, ecuación del tipo de Monje someramente tratada en el § 10 de la lección 27.

EJEMPLO: Si queremos, en particular, obtener la ecuación en derivadas parciales de la *superficie de área mínima* que pasa por un contorno  $\gamma$  alabeado dado (forma sensiblemente adoptada por una película jabonosa adherida a un alambre curvado según la forma  $\gamma$ ), se tendrá

$$I = \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy$$

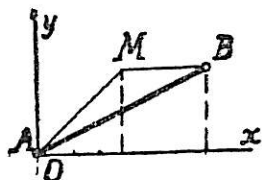
y la ecuación [5] da fácilmente,

$$(1 + q^2) r + (1 + p^2) t - 2 p q s = 0$$

## NOTA

**Sobre la naturaleza y dificultades de los problemas del cálculo de variaciones.**—Después de este ligero recorrido sobre problemas diversos del cálculo de variaciones, conviene que recapacitemos un poco sobre sus dificultades en comparación con los problemas de máximos y mínimos ordinarios de la teoría de funciones. En éstos se piden los *valores numéricos* de una o de varias variables que hacen máxima o mínima una *determinada función* de ellas; el campo numérico en el que hay que buscar estos valores, tiene propiedades perfectamente conocidas. En cambio, en el cálculo de variaciones se busca *la función o funciones* que hacen máxima o mínima *una determinada integral*, que depende de ellas; las incógnitas son aquí infinitas (por ejemplo los valores de  $y(x)$  para los infinitos valores de  $x$  en el intervalo  $(a, b)$  considerado en el § 1 de la lección anterior) y el campo funcional en el que se buscan las soluciones es de un grado de arbitrariedad tan amplio que se impone restringirlo para hacerlo analíticamente manejable. Así, al comparar la hipotética solución  $y(x)$  con todas las de la forma  $y(x) + t\eta_1(x)$  (§ 1, lecc. 32) o bien  $y(x) + t\eta_1(x) + s\eta_2(x)$  (§ 2 de esta lección) no hemos hecho otra cosa que adoptar campos mucho más reducidos de funciones de los que, en consecuencia, no hemos podido obtener más que condiciones *necesarias*. Se comprende, asimismo, la dificultad de hallar condiciones suficientes que aseguren la existencia de la solución sin un estudio previo del campo funcional en que se opere.

EJEMPLO. Si deseamos hacer mínima la



$$\int_0^2 (y' - y'^2)^2 dx$$

entre los puntos  $A(0, 0)$  y  $B(2, 1)$  y aplicamos la ecuación de Euler se obtendrá

$$y' = \text{constante}$$

De ella resulta, como solución, el segmento  $AB$  de pendiente  $1/2$ , que da para la integral el valor  $1/6$ .

Sin embargo, a lo largo de la quebrada  $AMB$  formada por el segmento  $AM$  de pendiente  $y'=1$  y por el  $MB$  de pendiente  $y'=0$  el integrando es nulo, y el valor nulo que así resulta para la integral es *menor* que el anterior, lo que prueba que la solución de Euler no da el mínimo. Se objetará que  $y'$  es discontinua en  $M$ , pero redondeando esta esquina con arcos circulares tan pequeños como se quiera, se obtienen asimismo para la integral valores tan pequeños como se quiera, lo que indica que no existe extremal suministrada por curvas de derivada continua.

## EJERCICIOS

1. Demostrar que toda función  $U(x, y)$  que hace estacionaria la integral del cuadrado del módulo de su gradiente en un recinto plano, satisface en él la ecuación de Laplace  $\Delta U = 0$ .

Esta propiedad permite tratar el problema de Dirichlet como un problema de cálculo de variaciones. Se generaliza sin dificultad al espacio, es decir, para funciones de tres variables  $U(x, y, z)$ .

2. Hallar las geodésicas en una superficie esférica.

3. Idem en un cono de revolución.

4. Idem en un cilindro de revolución.

Es aconsejable operar con ecuaciones paramétricas de dichas superficies, de la forma  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$  [V. tomo I, lecc. 34].

5. Aplicación al helicoides  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $z = k \theta$  (parámetros  $r$  y  $\theta$ ).

## LECCIÓN 34.—ALGUNAS APLICACIONES TÉCNICAS DEL CÁLCULO DE VARIACIONES

Hemos visto en las lecciones anteriores cómo la solución de ciertos problemas de variaciones se ha hecho depender de la solución de determinadas ecuaciones diferenciales ordinarias o en derivadas parciales. Recíprocamente, la Física, en su evolución moderna, ha tendido a uniformar sus leyes y las ecuaciones diferenciales que las traducen, presentándolas en forma de problemas de extremales equivalentes, con lo que han adquirido sus fundamentos una condensación sintética de gran belleza y fecundidad. Sólo una ligerísima idea podremos dar aquí de tales formulaciones, que son de extraordinario interés tanto para los físicos cuanto para los técnicos.

**1. Formulación variacional de las leyes de la Dinámica.**—Nos ceñiremos al caso más sencillo de la dinámica del punto material.

Sabemos que el movimiento de un punto material de masa  $m$  situado en un campo de fuerzas de componentes  $X(x, y, z)$ ,  $Y(x, y, z)$ ,  $Z(x, y, z)$  viene regido por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z \quad [1]$$

Si el campo  $X, Y, Z$  admite función potencial  $U(x, y, z)$  tal que  $U_x = X, U_y = Y, U_z = Z$ , se verifica la integral primera (Lec. 17, § 6)

$$\frac{1}{2} m \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right] - U = \text{constante} \quad [2]$$

que se traduce en el llamado *teorema de la conservación de la energía*, abreviadamente expresado

$$T + V = E \quad [3]$$

en que  $T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m(x'^2 + y'^2 + z'^2)$  es la llamada *energía cinética*;  $V = -U$  es la *energía potencial* y la suma de ambas es una constante  $E$ , *energía total* del punto. El movimiento se verifica, pues, manteniéndose constante dicha energía total.

Ahora bien, las ecuaciones diferenciales [1] se obtienen asimismo al tratar de hacer mínima la integral

$$\int (T - V) dt \quad [4]$$

puesto que al aplicar las ecuaciones de Euler a la expresión  $T - V$ , en la que

$T$  sólo depende de las derivadas  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  y  $V$  sólo depende de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , se obtiene

$$-\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial x'} = 0, \quad -\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial y'} = 0, \quad -\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial z'} = 0$$

es decir

$$X - \frac{d}{dt} mx' = 0, \quad Y - \frac{d}{dt} my' = 0, \quad Z - \frac{d}{dt} mz' = 0$$

que coinciden con [1].

La expresión  $(T-V)dt$ , que tiene la dimensión producto de una energía por un tiempo, se llama *acción elemental*; su integral es la *acción total*. Los movimientos de una partícula material  $m$  en un campo  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , son, pues, *aquellos que hacen mínima la acción total* entre dos posiciones cualesquiera. Tal es el *principio de Hamilton*, el cual se generaliza en la dinámica de los sistemas y medios continuos, a través de la llamada *Mecánica analítica*, cuya exposición prolongaría excesivamente esta lección.

Como durante el movimiento es  $T+V=E$  constante, podemos poner  $T-V=2T-E$ ; y todo movimiento que haga mínima  $\int (2T-E)dt$  y constante  $E$  hará mínima la integral  $\int 2T dt = m \int v^2 dt$ .

Recíprocamente: Los movimientos que hacen mínima la integral

$$\int v^2 dt = \int v ds \quad [5]$$

haciendo simultáneamente  $E$  constante, son movimientos posibles del punto material.

Este es el llamado *principio de Maupertius* adoptado en el siglo XVIII como fundamental en Mecánica.

## 2. Comparación con la Óptica. Origen de la mecánica ondulatoria.—

Es conocida, por otra parte, del lector la forma cómo se pueden deducir sencillísimamente las leyes de la reflexión y refracción que rigen las trayectorias de los rayos luminosos del *principio de Fermat*, en virtud del cual un rayo luminoso en un medio isótropo sigue la trayectoria que da el tiempo mínimo de recorrido, es decir, que hace

$$\int dt = \int \frac{ds}{u} = \text{mínima} \quad [6]$$

donde  $u(x, y, z)$  es la velocidad de propagación en cada punto del medio considerado. Esta propiedad nos permitió comprobar, en la lección anterior, el carácter rectilíneo de la propagación en un medio isótropo homogéneo.

La similitud de las formulaciones [5] y [6], respectivamente reguladoras del movimiento de una partícula mecánica y de la propagación de un pa-

quiere de ondas luminosas, hizo concebir a los físicos modernos la atrevida idea de asociar al movimiento de toda partícula material la propagación de un paquete de ondas cuya velocidad  $u$  fuese inversamente proporcional a la velocidad mecánica  $v$  de la partícula. Lo interesante del caso es que esta idea que, desde un punto de vista estrictamente matemático, tiene el aspecto de una pura y simple transformación formal, se ha mostrado de una fecundidad extraordinaria y llena de significado físico.

Por consideraciones, que no son de este lugar, derivadas, por un lado, de la teoría de la relatividad y, por otro, de la teoría de los quanta (ambas de origen experimental bien conocido) se ha llegado, en efecto, a señalar como relación entre la  $u$  y la  $v$  de la anterior transformación la siguiente

$$uv = c^2 \quad (c = \text{velocidad de la luz}) \quad [7]$$

mientras que existe entre la masa  $m$  y la energía  $e$  de una partícula la relación fundamental

$$e = mc^2 = h\nu \quad [8]$$

en que  $\nu$  es la frecuencia de la onda asociada a la partícula  $m$ , y  $h$  es la llamada constante de Planck que tiene las dimensiones de una acción por ser

$h = \frac{e}{\nu} = e\tau$  ( $\tau$  período) y que se ha comprobado ser la cantidad mínima de acción intercambiable en los fenómenos físicos observables.

**3. La ecuación de Schrödinger.**—Conocido es el dualismo hipotético con que los teóricos se han visto precisados a interpretar el mundo físico, algunos de cuyos fenómenos sólo tienen explicación satisfactoria en la teoría corpuscular y otros en la teoría ondulatoria. La antigua tendencia mecanicista en la explicación de los fenómenos de energía radiante tuvo la primera réplica en la formulación directa que Maxwell estableció de las leyes del campo electromagnético y en las ondas electromagnéticas resultantes. Las teorías de la relatividad y de los quanta han relegado, finalmente, la aplicación de las leyes de la mecánica clásica al mundo macroscópico y en límites discretos de la velocidad, por debajo de los cuales dicha mecánica constituye una aproximación suficiente y además insustituible por su sencillez. Pero la física moderna ya no trata de explicar mecánicamente los fenómenos microcósmicos, sino de formularlos simbólicamente mediante ecuaciones en las que el solapamiento de los conceptos mecánicos y ondulatorios es recíproco. De esta dualidad y acercamiento vamos a dar aquí una doble y sencilla muestra.

Concebida la luz a la manera mecanicista, los rayos luminosos son trayectorias extremales dadas por el principio de Fermat.

$$\int \frac{ds}{a} = \text{mínima} \quad (a \text{ velocidad de propagación}) \quad [9]$$

Concebida la luz al modo ondulatorio (*Huygens-Maxwell*) se propaga por ondas regidas por la ecuación (Lección 29)

$$\Delta \Psi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (a \text{ velocidad de propagación})$$

en la que  $\Psi(x, y, z, t)$  representa una cierta magnitud física variable con el lugar y el tiempo.



Separando en ésta variables, admitiendo  $\Psi$  de la forma  $\Psi = \Phi(x, y, z)T(t)$  se obtiene

$$\frac{\Delta \Phi}{\Phi} = \frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = -k^2$$

que se desdobra en

$$T'' + k^2 a^2 T = 0 \quad \text{es decir} \quad T = A \sin(2\pi\nu t + \varphi); \quad 2\pi\nu = k a \quad (\nu \text{ frecuencia,})$$

$$\text{y en } \Delta \Phi + k^2 \Phi = 0 \quad \text{o bien} \quad \Delta \Phi + \frac{4\pi^2 \nu^2}{a^2} \Phi = 0 \quad [10]$$

ecuación, esta última, en derivadas parciales, que da las superficies de onda, es decir, los lugares geométricos de puntos en los que el estado físico, caracterizado por la magnitud  $\Psi$  es *simultáneamente* el mismo.

Ahora bien, a las trayectorias extremales de una partícula material dadas [5] por

$$\int v ds = \text{mínima} \quad [11]$$

podemos hacer corresponder análogamente una propagación ondulatoria cuyas superficies de onda vengan dadas por la ecuación [10], sustituyendo en ella, según [7],

$a = \frac{c^2}{v}$  es decir,

$$\Delta \Phi + \frac{4\pi \nu^2 v^2}{c^4} \Phi = 0$$

pero de [8] resulta (por ser  $\frac{1}{2}mv^2 = T = E - V$ )

$$\frac{v^2}{c^4} = \frac{m^2}{h^2} \quad \text{con lo que} \quad \frac{4\pi^2 \nu^2 v^2}{c^4} = \frac{4\pi^2 m^2 v^2}{h^2} = \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - V)$$

y así resulta la ecuación de *Schrödinger*,

$$\Delta \Phi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - V) \Phi = 0$$

ecuación en derivadas parciales que da las superficies de onda asociadas a la partícula  $m$  en movimiento. La sucesión de autovalores del coeficiente de  $\Phi$  en esta ecuación en los varios casos de aplicación a partículas microcósmicas en movimiento (electrones atómicos), establece la discontinuidad en los estados de energía de dicha partícula y suministra una interesantísima formulación, al modo clásico en la teoría de ecuaciones diferenciales, de la cuantificación de la energía, que en un principio resultó tan profundamente desconcertante. Este es el mérito más interesante de la ecuación de Schrödinger desde el punto de vista conceptual. Omitimos en este leve comentario los intentos de interpretación física de la magnitud  $\Phi$ , que exige conocimientos ajenos al objeto de este curso.

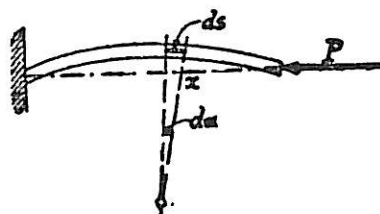
**4. Estados de equilibrio elástico. Pandeo.**—También se puede formular con auxilio del cálculo de variaciones el estado de equilibrio de un cuerpo elástico deformado por un conjunto de fuerzas actuantes sobre su superficie (presiones, tracciones, etc.) o en el seno de su masa (peso propio, fuerza centrífuga, etc.). Tanto los esfuerzos que se desarrollan en el seno del material deformado como los corrimientos o desplazamientos de la totalidad de sus elementos materiales en la deformación vienen regidos por principios de mínimo.

En particular, si se consideran todos los corrimientos posibles compatibles con las condiciones límites o de contorno (apoyos, empotramientos,

etcétera) se demuestra que los corrimientos reales son aquellos que hacen mínima la llamada *energía potencial del sistema*, definida como diferencia entre el trabajo total de deformación y el de las fuerzas exteriores antes aludidas actuantes tanto en la masa cuanto en la superficie del cuerpo (\*).

EJEMPLO: Consideremos el caso del pandeo de una vigueta de longitud  $l$  sometida a una compresión  $P$ .

A lo largo de cada elemento  $ds$  de vigueta el momento flector, al crecer desde cero en la posición rectilínea a  $M(x)$ , ha hecho curvar dicho elemento desde la curvatura nula hasta la  $\frac{d\alpha}{ds}$ , en que las tangentes extremas formen un ángulo  $d\alpha$ , lo que supone desarrollado en este elemento (dentro de los límites de la ley de Hooke) un trabajo interno del material  $= \frac{1}{2} M(x) d\alpha = \frac{1}{2} M(x) \frac{d\alpha}{ds} ds = \frac{EI}{2} \left( \frac{d\alpha}{ds} \right)^2 ds$  (v. Tomo I, Lección 26, § 6).



La energía de deformación total será, pues,

$$\frac{EI}{2} \int \left( \frac{d\alpha}{ds} \right)^2 ds \cong \frac{EI}{2} \int y'^2 ds.$$

(recuérdese que la curvatura para pequeñas deformaciones puede tomarse sensiblemente igual a  $y''$ ). Por otra parte, el trabajo efectuado por las fuerzas exteriores (que pueden reducirse a la compresión  $P$  despreciando el peso propio) es, dentro del mismo orden de aproximación,

$$P \int (ds - dx) = P \int \{ [1 + y'^2]^{1/2} - 1 \} dx \cong \frac{P}{2} \int y'^2 dx$$

En resumen, tomando  $y' = \eta$  como función incógnita habrá que hacer mínima la

$$\int (EI \eta^2 - P \eta^2) dx$$

que conduce a la ecuación de Euler.

$$-P\eta - EI \eta'' = 0 \quad \text{es decir} \quad \eta'' + k^2 \eta = 0 \quad \text{con} \quad k^2 = \frac{P}{EI}$$

ecuación que coincide con la que resulta de derivar la obtenida en el § 11 de la lección 14, y de la que se obtiene fácilmente la carga crítica.

De modo análogo a lo hecho en este sencillísimo ejemplo se plantean modernamente los casos de equilibrio elástico de estructuras más complicadas, arcos, pórticos, tubos, etc.

(\*) V., por ejemplo, *Biezeno Grammel*, «Dinámica Técnica». Traducción española de Pérez-Marín. Ediciones del Instituto Nacional de Técnica Aeronáutica. Madrid, 1947.

5. **Idea de los métodos directos. Método de Ritz.**—Ahora bien, en la técnica moderna la solución de estos problemas y otros similares no se suele relegar ya a la integración de las ecuaciones diferenciales o en derivadas parciales y a los problemas de contorno que resultan de aplicar el método de Euler expuesto en las lecciones anteriores; por el contrario, se buscan métodos más directos y expeditos para hallar los valores máximos o mínimos de las integrales buscadas, métodos cuya fundamentación matemática rigurosa tiene serias dificultades, pero que la técnica no ha tenido empacho en utilizar por su eficacia práctica, al punto de ser aplicados incluso en sentido inverso, es decir para la solución de otros problemas de contorno, previa su transformación en problemas extremales equivalentes. No podemos extendernos aquí en la exposición de tales métodos por la dificultad de teorizar sobre ellos en forma general, pese a lo cual resultará interesante para el técnico futuro darle una leve noción de sus ideas directrices.

Sea la integral

$$I(y) = \int_a^b f(x, y, y', \dots) dx$$

de la que buscamos una extremal  $y(x)$ .

Elegido un cierto campo o conjunto de funciones  $y(x)$  (que den sentido a dicha integral) y sustituidas en el integrando, a cada función corresponderá un número, valor de la integral; buscamos la función extremal que haga, por ejemplo, mínima esta integral en todo el campo elegido. La primera dificultad del problema del cálculo de variaciones estriba en saber si tal extremal existe, dificultad de la que ya hemos hablado al final de la lección anterior y debida a la diferencia teórica esencial existente entre estos problemas y los ordinarios de máximos y mínimos de la totalidad de funciones.

Exista o no la extremal, si el conjunto de valores de  $I(y)$  es acotado inferiormente, tal conjunto tendrá un extremo inferior  $E$  y el valor de este extremo puede interesar al técnico de hecho más que la hipotética función  $y$ , capaz de realizarle.

A tal fin, los métodos llamados *directos* consisten en saber elegir en el campo de las funciones y sucesiones funcionales convenientes  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$  llamadas *minimales*, tales que la sucesión de valores correspondientes  $I(y_1), I(y_2), \dots, I(y_n), \dots$  tienda al extremo  $E$ . Desde un punto de vista técnico, la convergencia práctica de esta sucesión vendrá acusada por el propio cálculo numérico a que la sucesión da lugar. Saltan, sin embargo, a la vista las dificultades *teóricas* del método, que son: 1.<sup>a</sup> La fijación de la sucesión  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$  que asegure a priori la convergencia de la sucesión de valores  $I(y_n)$ . 2.<sup>a</sup> ¿Coincidirá el  $\lim I(y_n)$  con el extremo buscado  $E$ ? Finalmente, la objeción antes apuntada, ¿corresponderá a este extremo  $E$  una función extremal efectiva y del campo que haga  $I(y) = E$ ? Obsérvese que no podemos a priori tomar como tal  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} I(y_n)$ , pues puede ocurrir que aún existiendo  $\lim_{n \rightarrow \infty} I(y_n)$  no exista  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  (\*).

W. Ritz, en una memoria fundamental que tuvo gran resonancia en los medios técnicos (\*\*) propuso la construcción de series minimales del siguiente modo: Se parte de una sucesión de funciones pertenecientes al campo  $\gamma$

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots \quad [1]$$

que tenga las propiedades: 1.<sup>a</sup> Toda combinación lineal de ellas pertenece al campo. 2.<sup>a</sup> Dada otra función  $Y$  cualquiera del campo se puede aproximar mediante una combinación lineal conveniente  $Y_n = \sum \gamma_n \eta_n$  tal que la diferencia de las integrales  $I(\gamma) - I(Y_n)$  sea, en valor absoluto, menor que un número prefijado  $\epsilon$ .

A partir de esta sucesión se forma la sucesión minimal  $y_1, y_2, \dots, y_n$  definiendo  $y_n$  mediante combinaciones lineales

$$y_n = c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + \dots + c_n \eta_n \quad [2]$$

(\*) Véanse luminosos ejemplos en *Gerhard Grüss*, «Variationsrechnung».

(\*\*) Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik (1909).

eligiendo los coeficientes  $c_1, c_2, \dots, c_n$  de modo que hagan mínima la integral  $I(y_n)$  (función bien determinada de las  $c_n$ ), es decir como soluciones del sistema

$$\frac{\partial I(y_n)}{\partial c_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

Es fácil demostrar el carácter *mínimo* de la sucesión  $y_n$  así definida. Basta probar, para ello, que dado  $\epsilon$  existe una  $y_n$  tal que  $I(y_n)$  difiera del extremo  $E$  en menos de  $\epsilon$ . Pero esto es consecuencia de las propiedades exigidas a la sucesión [1], pues al decir que  $E$  es extremo inferior de  $I(y)$  afirmamos la existencia al menos de una función  $Y$  del campo, tal que  $I(Y) - E < \frac{\epsilon}{2}$ ; y como a su vez  $Y$  se puede aproximar con  $Y_n = \sum \gamma_n \eta_n$ , tal que  $|I(Y) - I(Y_n)| < \frac{\epsilon}{2}$  resultará  $I(Y_n) - E < \epsilon$  y con mayor razón  $I(y_n) - E < \epsilon$ , puesto que por la elección de las constantes  $c_n$  es  $I(y_n) < I(Y_n)$ .

Toda la eficacia del método radica, pues, en definitiva, en la acertada elección de la serie de funciones [1]. Con frecuencia se eligen para ello sucesiones ortogonales en el intervalo de variación de la integral. Pero es aventurado dar para ello normas generales.

El lector curioso puede ver la aplicación del método al sencillo problema de contorno  $y'' + \lambda y = 0$   $y(-1) = y(+1) = 0$  en el librito de *Gerhard Grüss* «Variationsrechnung», adoptando como sucesión fundamental [1] una sucesión de polinomios de *Legendre*. Asimismo puede ver la aplicación del método a problemas diversos de equilibrio elástico (velocidades críticas de un árbol de transmisión, cargas críticas de pandeo, etc.), adoptando como sucesiones mínimas polinomios trigonométricos, en el libro de *Karman-Biot*, «Análisis Matemático en Ingeniería» (v. traducción española publicada por el Instituto Nacional de Técnica Aeronáutica). Para más detalle, consúltese *Courant-Hilbert*, «Methoden der mathematischen Physik»

## EJERCICIOS

1. Forma de los rayos luminosos en el plano cuando la velocidad de propagación es directamente proporcional a la distancia a un punto fijo de él.
2. Id. cuando es inversamente proporcional a la distancia a una recta  $r$ .
3. Id. a la raíz cuadrada de la distancia a  $r$ .
4. Id. directamente proporcional a dicha raíz.
5. Un hilo de longitud mayor que la distancia  $AB$  entre dos puntos fijos puede adoptar entre ellos una infinidad de formas; a cada una de ellas corresponde un centro de gravedad. La configuración de equilibrio estable será la que dé la posición más baja del referido c. d. g. Demostrar mediante el cálculo de variaciones que dicha configuración es la catenaria. He aquí el problema de cálculo de variaciones equivalente al resuelto por método infinitesimal directo de la lección 6.<sup>a</sup>, §§ 8 y 9.
6. Si expresamos la energía cinética total  $T$  de una cuerda vibrante en un instante, y su energía potencial  $V$  en el mismo, equivalente al trabajo de alargamiento, se obtiene, bajo las mismas hipótesis adoptadas en lección 28, § 2 ( $\rho$  masa por unidad de longitud,  $\tau$  tensión)

**Capítulo XII.—NOCIONES SOBRE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA Y SUS APLICACIONES**

LECCIÓN 35.—FUNCIONES ELEMENTALES DE VARIABLE COMPLEJA

**1. Función de variable compleja y su representación.**—Suponemos conocida del lector la noción de número complejo y su representación gráfica mediante los puntos (o vectores) del plano de Gauss así como la definición y propiedades fundamentales de las operaciones aritméticas efectuadas con dichos números, propiedades que son las mismas del campo real (excepto en la radicación cuya multiplicidad de soluciones también damos por sabida). Estos conocimientos permiten definir y estudiar las *funciones elementales algebraicas* explícitas de una variable compleja  $z=x+iy$  como el resultado de efectuar con esta variable y ciertos parámetros reales o complejos  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  las operaciones del álgebra. Así, son funciones algebraicas explícitas

$$\begin{array}{lll}
 w = z + \beta & w = \alpha z + \beta & w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \\
 w = z^n & w = \sqrt{z} & w = \sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}, \text{ etc.}
 \end{array}$$

Suponemos, asimismo, que el lector conoce la generalización al campo complejo, de la noción de *límite de una sucesión* y, en particular, conocidas las propiedades fundamentales de las series de términos complejos (algunas de las cuales hemos recordado en el tomo I, lección 11). Ello permite definir las *funciones trascendentes elementales* explícitas, en el campo complejo, sustituyendo la variable real por la compleja  $z=x+iy$  en los desarrollos en serie de dichas funciones en el campo real. Así se obtiene, por ejemplo, la expresión de la función exponencial

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

como complejo cuyo módulo es  $e^x$  y cuyo argumento es  $y$ .

Asimismo se obtiene

$$\operatorname{sen}(x+iy) = \operatorname{sen} x \operatorname{Ch} y + i \cos x \operatorname{Sh} y, \quad \cos(x+iy) = \cos x \operatorname{Ch} y - i \operatorname{sen} x \operatorname{Sh} y, \text{ etc.}$$

El estudio de todas estas funciones y sus propiedades en el campo com-



plejo resultará no sólo interesantísimo por sus múltiples aplicaciones técnicas, sino también indispensable para completar y aclarar las soluciones de muchas cuestiones en el campo real (\*).

El concepto *general* de función de variable compleja es análogo al de función de una variable real. Diremos que la variable compleja  $w$  es *función uniforme* (multiforme) de la variable compleja  $z$ , y se representa por  $w=f(z)$  cuando se ha definido una correspondencia tal que a cada valor de la variable  $z$  corresponde un valor (o más) de la variable  $w$ . Geométricamente: Cuando a cada punto del plano de Gauss donde se representa la variable independiente  $z$  (o región del plano llamada *campo de variabilidad de  $z$* ) corresponde un punto y sólo uno del plano donde se representa la variable  $w$ . La correspondencia inversa (que puede no ser uniforme) define la *función* llamada *inversa*.

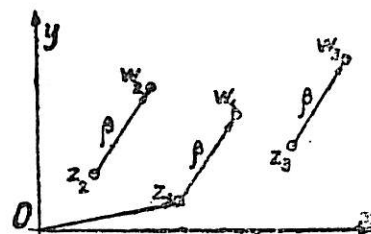
Una función general de variable compleja  $w=f(z)$  es, pues, una correspondencia puntual general entre dos planos de Gauss  $z=x+iy$  y  $w=u+iv$ , y equivale en definitiva a definir las dos componentes de  $w$  como funciones  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  de las componentes  $x, y$  de  $z$  en su campo de variabilidad.

Pero este concepto tan general no tendría apenas trascendencia en el análisis. Es preciso imponer a tales funciones condiciones de derivabilidad e integrabilidad que, como veremos, son en el campo complejo mucho más exigentes que en el campo real. Con objeto de simplificar la exposición, y por ser suficiente en las aplicaciones, *nosotros nos limitaremos a considerar por el momento funciones  $w=u(x, y)+iv(x, y)$  definidas por pares de componentes  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  que admitan derivadas  $u_x, u_y, v_x, v_y$  continuas en los recintos de existencia (salvo a lo sumo en puntos o líneas excepcionales)*. Volvamos ahora a los ejemplos de funciones elementales recordados para estudiar en concreto sus representaciones y propiedades.

**2. La función lineal  $w=az+\beta$ .**— Para las funciones más sencillas, como son las lineales y bilineales, superpondremos los dos planos de  $z$  y  $w$  resultando, con ello, transformaciones entre los puntos de un mismo plano de Gauss, que tienen interpretación geométrica sencilla.

Así, la función  $w=z+\beta$ , en virtud de la ley de suma de vectores, transforma cada punto  $z$  en el extremo del vector  $\beta$  aplicado a él, es decir, significa una *traslación* representada por el vector  $\beta$ .

La función  $w=az$  supone la multiplicación de

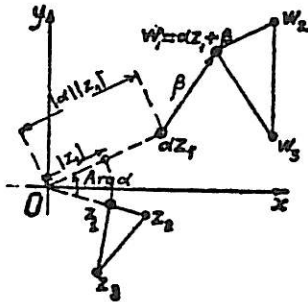


(\*) Recordemos, en efecto, que en distintos puntos de la teoría de ecuaciones diferenciales nos ha sido preciso atribuir a las variables valores complejos y postular provisionalmente la validez, para dichos valores, de las operaciones analíticas utilizadas (derivación e integración) y de los resultados con ellos obtenidos en el campo real (v., por ejemplo, lecciones 16 y 26).



$|z|$  por el  $|\alpha|$ , *homotecia* de centro en el origen y razón  $|\alpha|$ , y luego la adición del  $\text{Arg } \alpha$ , es decir, un *giro*.

Finalmente, toda función lineal de la forma  $w = \alpha z + \beta$  representará una transformación compuesta de un giro, una homotecia y una traslación, es decir, será en general una *semejanza*(\*) En ella se conservarán las razones simples y los ángulos, verificándose, por tanto,



para una terna cualquiera de puntos  $z_1, z_2, z_3$  y sus homólogos  $w_1, w_2, w_3$

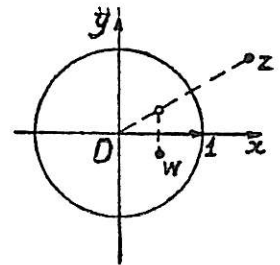
$$\frac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$$

3. La función  $w = \frac{1}{z}$ .— En esta función el módulo de  $w$  debe ser *inverso* del módulo de  $z$  mientras los argumentos son opuestos

$$|w| = \frac{1}{|z|} \quad \text{Arg } w = -\text{Arg } z$$

La transformación en el plano de Gauss consta, pues, de una inversión respecto del círculo unidad con centro en el origen seguida de una simetría respecto del eje real  $x$ .

En esta transformación se conservan los ángulos, se conserva el sentido (después de dos inversiones de sentido producidas por la inversión y la simetría), las rectas que pasan por el origen se transforman en rectas simétricas respecto del eje  $x$ , las que no pasan por el origen se transforman en circunferencias que pasan por él y recíprocamente, mientras las circunferencias que no pasan por el origen se transforman en otras circunferencias (recuérdese las propiedades geométricas de la inversión (2)). Finalmente se comprueba muy fácilmente la invariancia de las razones dobles en tal transformación



$$\frac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3} : \frac{w_1 - w_4}{w_2 - w_4} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$$

4. La función **bilineal**  $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ .— Para que exista función hay que suponer  $\frac{\alpha}{\gamma} \neq \frac{\beta}{\delta}$ , con lo que se puede invertir la relación dando la transformación o función inversa  $z = \frac{-\delta w + \beta}{\gamma w - \alpha}$ . Para números reales esta transformación coincide con la homográfica o proyectiva entre dos series.

Para números reales esta transformación coincide con la homográfica o proyectiva entre dos series.

Expresándola así

$$w = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta - \frac{\alpha}{\gamma} \delta}{\gamma z + \delta} = \mu + \frac{\nu}{\gamma z + \delta}$$

puede considerarse como resultante de las tres transformaciones siguientes

$$z' = \gamma z + \delta, \quad z'' = \frac{1}{z'}, \quad w = \nu z'' + \mu$$

es decir, el producto de una semejanza, una inversión y simetría, y otra semejanza, de donde se desprende que esta transformación tiene todas las propiedades enumeradas en el párrafo anterior, considerando como *origen* el punto  $z = -\frac{\delta}{\gamma}$  que anula  $z'$ .

Esta función tiene importancia y aplicación en electrotecnia por ser del tipo de las que rigen las relaciones entre las impedancias o las admitancias de entrada y salida de un transformador, línea de transmisión, ... o, en general, a través de un cuadripolo lineal cualquiera, utilizándose las propiedades expuestas en la construcción de diagramas de la transmisión (\*).

**5. La noción de polo. Punto del infinito del plano complejo.**—Como hemos visto, la función  $w = \frac{1}{z}$  establece una correspondencia *biunívoca* entre los puntos del plano de Gauss en la que a cada punto  $z$  corresponde un punto  $w$  y viceversa, con la sola excepción de los puntos  $z=0$ ,  $w=0$  a los que no corresponde propiamente ningún punto  $w$  ni  $z$  respectivamente. Para salvar esta excepción y uniformar los enunciados se adopta aquí un convenio: el de llamar asimismo *punto* al infinito del plano de Gauss.

No debe extrañar el choque de este convenio con el adoptado en Geometría proyectiva acerca del infinito del plano euclídeo. Nada de anómalo tiene que la terminología convencional adoptada para la unificación de los enunciados relativos a un cierto grupo de transformaciones no convenga a los enunciados de otro grupo cuyas propiedades son esencialmente distintas.

El punto  $z=0$  al que corresponde el *punto* impropio o del infinito del plano  $w$  se llama *polo* de la función  $w = \frac{1}{z}$ . Del mismo modo llamaremos polo de la función  $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$  al punto  $z = -\frac{\delta}{\gamma}$  que anula el denominador.

(\*) V., p. ej., las conferencias del autor dadas en la Escuela de Ingenieros Industriales de Madrid sobre «La Matemática en la transmisión de la energía eléctrica», año 1947, o también las del Prof. Siegrist, en el año 1945, en la misma Escuela.

Análogamente llamaremos polos de la función

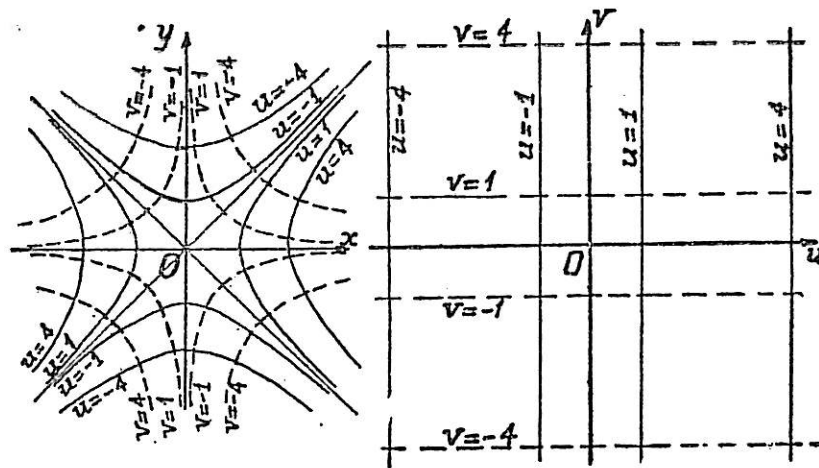
$$w = \frac{m}{(z - a)} + \frac{n}{(z - b)^2} + \frac{p}{(z - c)^4}$$

a los puntos  $z=a$ ,  $z=b$ ,  $z=c$  tales que  $w \rightarrow \infty$  al tender  $z \rightarrow a$ ,  $b$ ,  $c$ . El polo  $a$  se llama de *primer orden*, el  $b$ , de *segundo orden*, el  $c$  de orden  $4$ . En general diremos que  $w=f(z)$  tiene en el punto  $c$  un polo de orden  $n$  cuando el producto  $(z-c)^n f(z)$  tiene un límite finito distinto de cero para  $z=c$ . Más adelante (lección 39) insistiremos sobre este concepto.

**6. La función  $w=z^2$  y su inversa. Plano de Riemann. Puntos de ramificación.**—Para representar con claridad esta función separemos ya los ejes coordenados de los planos  $z=x+iy$  y  $w=u+iv$  y auxiliémonos con el trazado de líneas homólogas en uno y otro plano. Podemos, naturalmente, elegir varios sistemas de ellas, y la claridad de la representación dependerá de su atinada elección. Algunas veces se adoptan las líneas coordenadas  $xy$  del plano  $z$  y sus homólogas en el plano  $w$ , o recíprocamente las líneas coordenadas  $w$ , es decir  $u=\text{constante}$ ,  $v=\text{constante}$  y sus homólogas en el plano  $z$ , bien fáciles de hallar en este caso, puesto que

$$w = u + iv = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

de donde resulta,  $u = x^2 - y^2$ ,  $v = 2xy$ . En resumen, las líneas en el plano  $xy$



homólogas de las  $u = k$ ,  $v = k'$  son los dos sistemas de hipérbolas ortogonales

$$x^2 - y^2 = k$$

$$2xy = k'$$

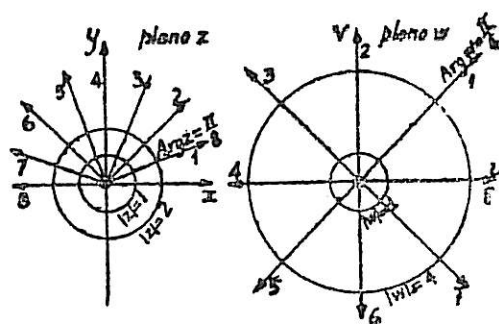
Pero más sencillo es en esta relación funcional tomar como líneas homólogas en ambos planos las rectas que pasan por los orígenes y las circun-

ferencias con centro en ellos. En efecto, al elevar al cuadrado  $z$  se eleva al cuadrado su módulo y se duplica su argumento. Por tanto :

La circunferencia  $|z|=k$  se convierten en la circunferencia  $|w|=k^2$ .

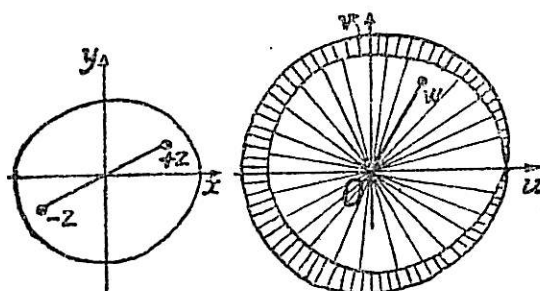
La semirrecta  $\text{Arg } z = \alpha$  se convierte en la semirrecta  $\text{Arg } w = 2\alpha$ .

Se observa entonces que al girar la semirrecta  $\text{Arg } z = \alpha$  desde  $\alpha = 0$  hasta  $\alpha = \pi$  barriendo el semiplano de las  $y$  positivas, la semirrecta homóloga  $\text{Arg } w = 2\alpha$  describe todo el plano  $w$ , plano que vuelve a describir *por segunda vez* cuando la semirrecta del plano  $z$  describe el semiplano de las  $y$  negativas.



El doble recubrimiento del plano  $w$  traduce aquí el hecho de no ser unívoca la transformación inversa

$s = \sqrt{w}$ ; a cada valor de  $w$  corresponden, en efecto, dos de  $z$  (representados por puntos simétricos respecto del origen).



Se puede restituir la biunicidad de la correspondencia imaginando, con Riemann, que la semirrecta del plano

$w$  recubre *dos hojas planas* superpuestas a la manera como se indica en la figura, es decir, volviendo a recorrer la hoja primera cuando ha terminado de engendrar la segunda. Parece natural efectuar aquí el enlace (y corte consiguiente) por el eje  $w$ , pero no es preceptivo ni aún siquiera que dicho corte sea rectilíneo; lo esencial de la representación es el *desdoblamiento del plano  $w$  alrededor del origen  $O$* , que recibe el nombre de *punto de ramificación* de la función (inversa)  $z = \sqrt{w}$ . Naturalmente que para la función  $w = \sqrt{z}$  la ramificación se efectuará en el origen del plano  $z$ .

Del mismo modo, en la representación de la función  $w = \sqrt{z-a}$  el punto de ramificación será el punto  $z=a$ .

La función  $w = \sqrt{(z-a)(z-b)}$  tiene análogamente *dos* puntos de ramificación que son sus ceros  $z=a$  v  $z=b$ . En efecto, de

$$\text{Arg } w = \frac{1}{2} \text{Arg } (z-a) + \frac{1}{2} \text{Arg } (z-b) + k\pi \quad (k = 0, 1)$$

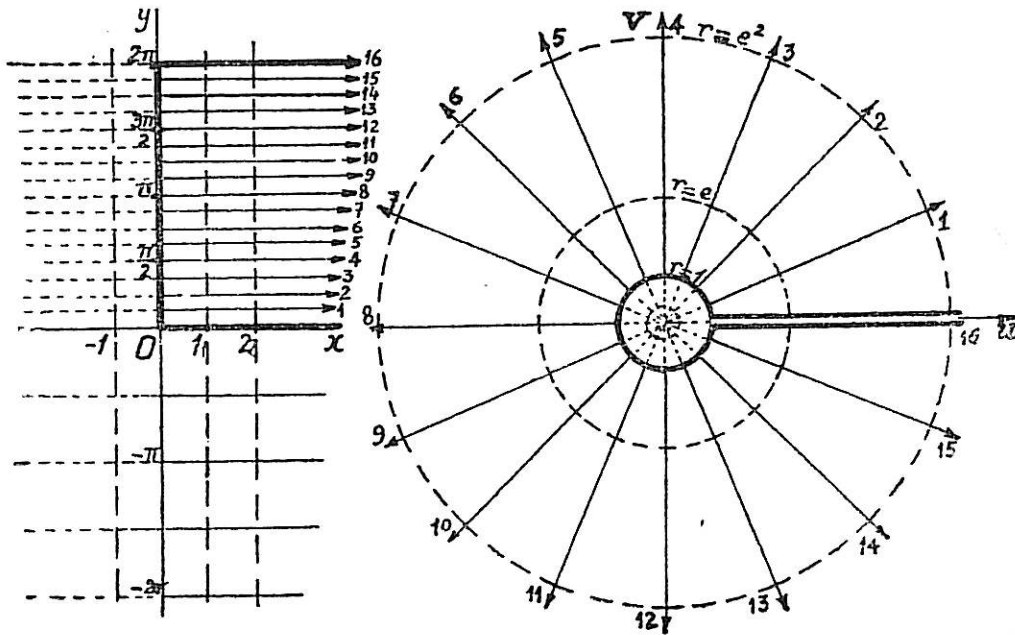
se desprende que es preciso dar *dos vueltas* en el plano  $z$  alrededor del punto  $z=a$  (en un entorno que excluya  $b$ ), aumentando en  $4\pi$  el  $\text{Arg } (z-a)$ , para aumentar en  $2\pi$  el argumento de  $w$ , es decir para dar *una vuelta* alrededor del punto homólogo (origen) del plano  $w$ ; y lo mismo ocurre con  $b$  (en

todo entorno que excluya  $a$ ). Claro es que a medida que aumenta el número de puntos de ramificación, la distribución y enlace de las hojas en que se ramifica el plano se complica, no siendo nuestro propósito profundizar aquí acerca de su estructura (\*).

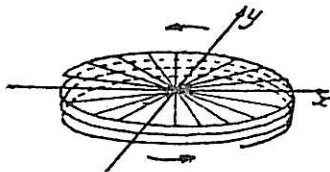
**7. La función exponencial y la logarítmica.**—Tratemos ahora de representar, análogamente, la función

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) \quad \text{de donde} \quad r = |w| = e^x; \quad \varphi = \operatorname{Arg} w = y$$

Adoptando en el plano complejo  $z$  los dos sistemas de líneas coordenadas paralelas a los ejes  $x=k, y=k'$ , a ellas corresponden respectivamente en el plano  $w$  las  $r=e^k$  (const<sup>o</sup>) circunferencias con centro en el origen, y las  $\varphi=y=k'$  semirrectas que parten del origen.



De ello resulta que al recorrer la recta  $y=\alpha$  la faja del plano  $z$  comprendida entre  $y=0$  e  $y=2\pi$ , la semirrecta homóloga  $\operatorname{Arg} w=\alpha$  recorre todo el plano  $w$  (correspondiendo el exterior del círculo  $r=1$  a la semirrecta  $x>0$  y el interior a la semifaja negativa), y vuelve a barrerlo al barrerla la recta  $y=\alpha$  la faja comprendida entre  $y=2\pi$  e  $y=4\pi$  y lo mismo entre  $4\pi$  y  $6\pi, \dots$  y también entre  $0$  y  $-2\pi$ , entre  $-2\pi$  y  $-4\pi$ , etcétera. En resumen, el plano  $w$  se recubre infinitas veces girando la semirrecta  $\operatorname{Arg} w=\alpha$  indefinidamente en los dos sentidos alrededor del origen. Este punto aparece así como un punto de ramificación de infinitas hojas en que habría que desdoblar el plano de la función  $w$  para hacer biunívoca la correspondencia. Esta



blar el plano de la función  $w$  para hacer biunívoca la correspondencia. Esta

(\*) El estudio de estas estructuras geométricas establece el interesante enlace de la Teoría de funciones de variable compleja con la Topología.



ramificación es la que procede en el plano de la variable independiente en la función inversa logarítmica  $z = \log w$ ; tenemos así la interpretación geométrica intuitiva de las infinitas determinaciones de la función logarítmica en el campo complejo

$$\log_e w = x + i(y \pm 2k\pi) = \log_e r + i\varphi \pm 2k\pi i \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

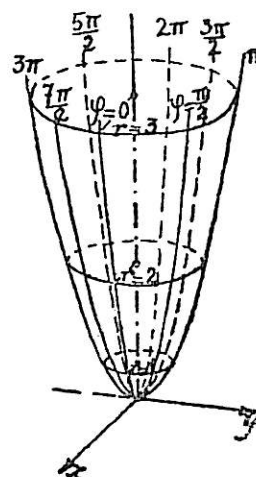
Para  $k=0$  resulta el logaritmo llamado *principal*.

**8. Representación axonométrica de las funciones de variable compleja.**—Algunos autores preconizan una representación visual de las funciones de variable compleja que no deja de tener interés y cuyo uso se ha generalizado en algunas tablas, como las de Jahnke-Emde. Este sistema consiste en lo siguiente:

1.º Adoptar en el plano de la función  $w$  como líneas fundamentales las  $r = |w| = \text{const.}^\circ$  y  $\varphi = \arg w = \text{const.}^\circ$ , es decir las circunferencias con centro en el origen y las semirrectas que parten de él, y hallar las homólogas de ellas en el plano  $z$ , es decir  $r(x, y) = \text{const.}^\circ$ ,  $\varphi(x, y) = \text{const.}^\circ$  (V. figura § 6).

2.º Interpretar las curvas  $r(x, y) = \text{const.}^\circ$ , como líneas de nivel de una superficie y representarlas en sistema axonométrico tomando los valores del segundo miembro como sus cotas.

Si la función es de las llamadas regulares u holomorfas (v. lección siguiente) se conservan los ángulos en la transformación, como ocurre en los ejemplos hasta ahora expuestos, y las líneas  $\varphi(x, y) = \text{const.}^\circ$  serán las ortogonales a las anteriores curvas de nivel, es decir las proyecciones de las líneas de máxima pendiente. Dibujadas también estas líneas y acotadas unas y otras con los valores de las constantes que las determinan, se dispondrá de una representación visual muy eficaz, en que la variación del módulo quedará gráficamente acusada por la variación de la altura de la superficie y el argumento correspondiente señalado en la graduación de las líneas de máxima pendiente. En la figura se ha representado por este sistema la función  $w = z^2$ .



### EJERCICIOS

1. Averiguar en que se transforman los círculos limitados por las circunferencias  $x^2 + y^2 - 4y = 0$ ,  $x^2 + y^2 - 4x = 0$  mediante la transformación  $w = (2z + 3) : (z - 4)$ .
2. Estudiar las curvas homólogas de las  $x = \text{const.}^\circ$ ,  $y = \text{const.}^\circ$  en la transformación  $w = z^2$ . Comprobar que los dos haces de curvas son ortogonales.
3. Estudiar la estructura de la superficie de Riemann en la función  $w = z^3$ ,  $w = z^4$  etcétera.
4. Hallar la transformación bilineal que transforma los puntos  $a, \beta, \gamma$  del plano  $z$  en los puntos  $0, 1, \infty$  del plano  $w$ .  
Aplicación:  $a=1, \beta=i, \gamma=-1$ . Transformación en ésta del círculo de centro en el origen y radio unidad.
5. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que cuatro puntos  $z_1, z_2, z_3, z_4$  estén en una circunferencia (o recta) es que la razón doble  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$  tenga un valor real.
6. Averiguar en qué se transforma el semiplano situado a la izquierda de la recta  $y = x$  mediante  $w = (i - z) : (i + z)$ .
7. Averiguar en que se transforma la región angular del plano  $z$  definida por  $\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg } z \leq \frac{3\pi}{4}$  mediante la transformación del ejercicio anterior.
8. Id. la región (sector circular) que cumple además  $|z| \leq 1$ .
9. Curvas homólogas de las circunferencias con centro en el origen del plano  $z$  en la transformación  $w^2 = z + 1$ .
10. Curva homóloga del eje  $y$  del plano  $z$  en la transformación  $w = 1 + kz^2$  ( $k$  real). Regiones que corresponden a los semiplanos  $x > 0$   $x < 0$ .



LECCIÓN 36.—LA DERIVACIÓN EN EL CAMPO COMPLEJO

**1. Límite y continuidad de una función.**— La noción de límite de una función de variable compleja es análoga a la noción correspondiente en el campo real. Se dice que  $f(z)$  tiende a  $L$  al tender  $z$  a  $\zeta$  y se escribe

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} f(z) = L$$

cuando a todo número positivo  $\varepsilon$  se puede hacer corresponder un entorno del punto  $\zeta$  (por ejemplo, circular de radio  $\delta$ ) tal que para todo punto de este entorno, es decir *para todo* valor  $z$  tal que

$$|z - \zeta| < \delta \quad \text{se verifique} \quad |f(z) - L| < \varepsilon \tag{1}$$

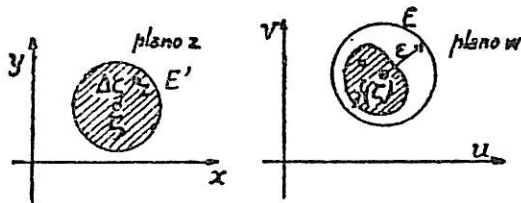
Las barras  $||$  indican aquí el módulo del complejo que encierran.

Si la función  $f(z)$  está definida en el punto  $\zeta$ , tiene límite en él y este límite coincide con el valor  $f(\zeta)$ , se dice que la *función es continua* en el punto  $\zeta$ . La condición de continuidad en un punto  $\zeta$  implica, pues, que a todo número  $\varepsilon > 0$  se puede hacer otro  $\delta$  tal que para todo  $z$  que cumpla

$$|z - \zeta| < \delta \quad \text{se verifique} \quad |f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon \tag{2}$$

escribiéndose  $\lim_{z \rightarrow \zeta} f(z) = f(\zeta) = f(\lim z)$ .

Geoméricamente: A todo entorno  $E$  de  $f(\zeta)$  en el plano  $w$  se puede hacer corresponder otro entorno  $E'$  de  $\zeta$  en el plano  $z$  tal que *todos* los puntos  $z$  de este último tienen sus transformados  $f(z)$  en  $E$  (\*).



Por analogía con el plano se usan las notaciones  $z - \zeta = \Delta\zeta$ ,  $f(z) - f(\zeta) =$

$= \Delta f(\zeta)$ , puesto que uno y otro son los incrementos que experimentan respectivamente la variable y la función al pasar aquella del punto  $\zeta$  al punto  $z = \zeta + \Delta\zeta$ . Entonces la continuidad se podrá expresar según (2) por el hecho de poderse hacer  $|\Delta f(\zeta)| < \varepsilon$  para todo  $|\Delta\zeta| < \delta$ , es decir, por el hecho de tender  $\Delta f \rightarrow 0$  al tender  $\Delta\zeta \rightarrow 0$ .

Obsérvese que si son  $u, v$  las componentes de  $w = f(z)$ , es decir  $w = u + iv$  estas serán, en general, funciones de las componentes  $x, y$  de  $z = x + iy$

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

(\*) Lo que no significa que los entornos sean figuras homólogas en la correspondencia  $w = f(z)$ , sino simplemente que la figura homóloga de  $E'$  pertenece a  $E$  (como se ha querido indicar en la figura).

y, recordando la definición de continuidad en funciones de dos variables, si  $f(z)$  es continua en  $\zeta = \xi + i\eta$  serán también continuas  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  en el punto  $\xi\eta$ , en el que tenderán a  $u(\xi, \eta)$ ,  $v(\xi, \eta)$ ; y recíprocamente, si  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  tienden a estos valores,  $f(z) = f(x + iy)$  tenderá a  $u(\xi, \eta) + iv(\xi, \eta) = f(\zeta)$ .

Si una función es continua en todos los puntos de un recinto, se dice que es continua en él, y la continuidad se llama *uniforme* en este recinto cuando dado  $\epsilon > 0$  se puede hallar un solo valor  $\delta$  que verifique la propiedad [2] para todos los puntos del recinto. En este caso las funciones  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  son asimismo uniformemente continuas en el recinto y, recíprocamente, la continuidad uniforme de éstas en un recinto implica la de  $f(z)$  (basta elegir el menor de los números  $\delta_u, \delta_v$  correspondientes a un  $\epsilon$  dado para la función  $u$  y para la  $v$ ).

El estudio de las funciones continuas de una variable compleja equivale, pues, al de los pares de funciones continuas de dos variables en el campo real. Recordando, en particular, la propiedad fundamental establecida en el tomo I, lección 2.ª, § 5 podemos enunciar aquí:

*Toda función  $f(z)$  continua en un dominio acotado del plano  $z$  es uniformemente continua en él.*

**2. La noción de derivada. Condiciones de monogeneidad.**—Ya dijimos, en la lección anterior, que las funciones generales de variable compleja de la forma  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  sólo tienen interés en Análisis si se puede generalizar a ellas las operaciones de derivación e integración. La derivada en un punto  $z$  se define como en el campo real, es decir, es el límite finito, cuando existe, de  $\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}$  al tender  $\Delta z \rightarrow 0$ . Pero la existencia de este

límite es una condición mucho más exigente aquí que en el campo real, como vamos a ver. En efecto, aun suponiendo que  $u$  y  $v$  admitan derivadas  $u_x, u_y, v_x, v_y$  continuas (como hemos advertido en la lección anterior, § 1) y, por tanto, que sus incrementos son expresables en la forma (\*)

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= u_x \Delta x + u_y \Delta y + \epsilon \Delta x + \epsilon' \Delta y \\ \Delta v &= v_x \Delta x + v_y \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon'_1 \Delta y \end{aligned} \right\} \text{siendo } \epsilon, \epsilon', \epsilon_1, \epsilon'_1, \text{ infinitésimos con } \Delta x, \Delta y$$

se tendrá

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i \Delta v}{\Delta x + i \Delta y} = \frac{u_x \Delta x + u_y \Delta y + i(v_x \Delta x + v_y \Delta y)}{\Delta x + i \Delta y} + \frac{\epsilon \Delta x + \epsilon' \Delta y + i(\epsilon_1 \Delta x + \epsilon'_1 \Delta y)}{\Delta x + i \Delta y}$$

expresión en la que el módulo del denominador  $\Delta z$  es mayor (excepcional-

(\*) Para poder expresar en esta forma los incrementos basta en rigor admitir la *diferenciabilidad* de  $u$  y  $v$  en el sentido de Stolz, es decir, basta exigir que  $\Delta u$  (y análogamente  $\Delta v$ ) se pueda formular en la forma  $\Delta u = A \Delta x + B \Delta y + \epsilon \Delta x + \epsilon' \Delta y$ , siendo  $A$  y  $B$  finitos y  $\epsilon, \epsilon'$  infinitésimos al tender  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ , pues es fácil ver entonces que  $A$  y  $B$  deben coincidir con las derivadas parciales  $u_x, u_y$ .

mente igual) que los de  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ , por lo que podemos afirmar que el módulo del segundo sumando es  $\leq |\varepsilon| + |\varepsilon'| + |\varepsilon_1| + |\varepsilon'_1|$  y, por tanto, que tiende a cero al tender  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$ . De donde

$$\lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{(u_x + iv_x) \Delta x + (v_y - iu_y) i \Delta y}{\Delta x + i \Delta y}$$

Ahora bien, para que este límite exista y sea *único*, sin imponer a  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  más condición que la de tender a cero, es *necesario* que sean iguales los valores de los paréntesis

$$u_x + iv_x = v_y - iu_y \quad [4]$$

En efecto, el primer miembro es el valor que toma dicho límite al poner  $\Delta y = 0$  y el segundo al poner  $\Delta x = 0$ .

Pero, recíprocamente, si se verifica la igualdad [4], el numerador de [3] podrá escribirse indistintamente  $(u_x + iv_x) (\Delta x + i \Delta y)$ , o bien  $(v_y - iu_y) (\Delta x + i \Delta y)$  y existirá el límite único buscado

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = u_x + iv_x = v_y - iu_y$$

En resumen: suponiendo las funciones  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$ , con derivadas continuas en  $x$ ,  $y$ , es *condición necesaria y suficiente*, para que exista derivada  $f'(z)$  en el punto  $z = x + iy$ , que se verifiquen en este punto las dos igualdades (\*).

$$\boxed{u_x = v_y, \quad v_x = -u_y} \quad [5]$$

llamadas *condiciones de monogeneidad*.

Obsérvese que el valor  $u_x + iv_x$  obtenido haciendo  $\Delta y = 0$  no es más que la derivada de  $w = u + iv$  en la dirección del eje de las  $x$ , mientras  $v_y - iu_y = \frac{1}{i} (u_y + iv_y)$  es la derivada en la dirección del eje  $y$ . Al cumplirse las condiciones de monogeneidad, estas derivadas no sólo son iguales entre sí, sino a las que resultarían haciendo tender  $\Delta z \rightarrow 0$  en cualquier otra dirección alrededor del punto, o aún sin dirección límite alguna (acercamientos en espiral, o siguiendo curvas sin tangente en el punto  $z$ , etc.).

**3. Funciones holomorfas o regulares.**—Una función  $w = f(z)$  uniforme que admite derivada en un punto  $P$  se llama *monogénea* en él. Si, además, es monogénea en todos los puntos de un entorno de  $P$  se llamará *holomorfa* o *regular* en  $P$ .

(\*) V. nota al final de la lección.

Por fin, si es *holomorfa* o *regular* en todos los puntos de un recinto se dice que lo es en dicho recinto.

Claro es que la holomorfía supone la existencia de la derivada y, por tanto, la continuidad de la función, pues al existir  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z)$  debe tender  $\Delta w \rightarrow 0$  al tender  $\Delta z \rightarrow 0$ .

También se observa que todo campo de holomorfía tiene que ser *abierto*, puesto que la definición exige que cada punto tenga su entorno en que la función es asimismo holomorfa.

**4. Derivadas de las funciones algebraicas elementales.**—Puesto que la definición de derivada es la misma que en el campo real, el cálculo de las derivadas de las funciones algebraicas se efectuará, en el campo complejo, también como en el campo real, es decir calculando el  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}$  y puesto que las leyes de las operaciones aritméticas subsisten, así como los teoremas sobre los límites de sus resultados, podemos afirmar sin más:

1.º Las funciones algebraicas explícitas elementales de variable compleja son monogéneas excepto en los puntos en que tales funciones tienen límite infinito o en aquéllos otros en cuyo entorno tome la función multiplicidad de valores.

2.º Las reglas de derivación de dichas funciones subsisten, pues, en plano complejo.

En particular:

$$\text{Si } w = z^n \quad \text{es} \quad w' = nz^{n-1}$$

válida en todo el plano si  $n$  es entero positivo, y con excepción del origen si  $n$  es negativo o fraccionario.

Por las mismas razones: Son válidas en el campo complejo las reglas de derivación de una suma, de un producto y de un cociente de funciones monogéneas (exceptuando en este último caso, los ceros del denominador), así como las de derivación de una función de función y de las funciones inversas (probada previamente, en este último caso, la existencia y unicidad de la función inversa). (V. § 7.)

En particular: Toda función holomorfa  $F(w)$  de otra función holomorfa  $w(z)$  es también holomorfa  $F[w(z)]$  y su derivada se calcula multiplicando las derivadas  $F'(w)$  y  $w'(z)$ .

Una primera y notable consecuencia que de este hecho resulta es que desde este momento podemos construir una gran variedad de funciones  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  que cumplan las condiciones de monogeneidad. Bastará calcular las componentes real e imaginaria de una función algebraica uniforme cualquiera de la variable compleja  $z$ . Así, por ejemplo, las componentes de

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

nós dan las funciones  $u=x^2-y^2$ ,  $v=2xy$ , que las cumplen, como fácilmente puede comprobar el lector. Tomando nuevas funciones holomorfas de  $z$  o de  $w$ , los ejemplos pueden multiplicarse innumerablemente.

**5. Derivadas de las trascendentes elementales.**—El lector comprobará fácilmente que en la función exponencial

$$w = e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y), \quad \text{en la que} \quad u = e^x \cos y, \quad v = e^x \operatorname{sen} y$$

se verifican las condiciones de monogeneidad, resultando, por tanto, esta función holomorfa en todo el plano. Su derivada será, pues,

$$w' = u_x + i v_x = e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y = e^z$$

La derivada de  $e^z$  en el campo complejo sigue siendo la misma función  $e^z$ .

De ella resulta la derivada de  $w=lz$ , que es, como en el campo real,  $w' = \frac{1}{z}$  (excepto en el origen).

Análogamente, la función

$w = \operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(x+iy) = \operatorname{sen} x \operatorname{Ch} y + i \cos x \operatorname{Sh} y$  da  $u = \operatorname{sen} x \operatorname{Ch} y$ ,  $v = \cos x \operatorname{Sh} y$  que verifican las condiciones de monogeneidad. De ellas resulta

$$w' = u_x + i v_x = \cos x \operatorname{Ch} y - i \operatorname{sen} x \operatorname{Sh} y = \cos(x+iy) = \cos z$$

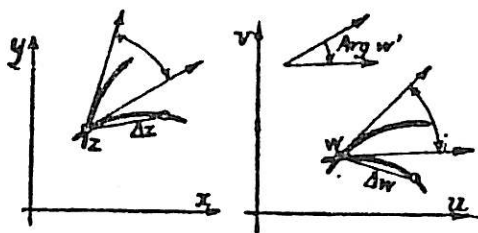
y del mismo modo la derivada de

$$w = \cos z \quad \text{es} \quad w' = -\operatorname{sen} z$$

De ellas se desprenden las derivadas de la  $\operatorname{tg} z$ ,  $\operatorname{arc} \operatorname{sen} z$ ,  $\operatorname{arc} \cos z$ ,  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} z$ ; que son las mismas que en el campo real.

Omitimos, por brevedad, el estudio de estas funciones inversas y de sus ramificaciones.

**6. Interpretación geométrica de la derivada. Transformaciones conformes.**—Consideremos los planos de la variable  $z$  y de la función holomorfa



$w$  orientados de modo que los semiejes  $+x$ ,  $+y$  sean paralelos y del mismo sentido que los  $+u$ ,  $+v$ . Tracemos, por un punto cualquiera  $z$  del plano primero, un arco de curva de origen en  $z$  con semitangente en él, y el arco homólogo por el punto correspondiente  $w$  en el plano segundo.

Puesto que  $\operatorname{Arg} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \operatorname{Arg} \Delta w - \operatorname{Arg} \Delta z$  expresa el ángulo formado



por las direcciones de las cuerdas (vectores)  $\Delta w$  e  $\Delta z$ , el argumento límite  $\text{Arg } w'$  (que es una función continua y uniforme entre 0 y  $2\pi$  salvo para  $w'=0$ ) expresará el límite de la diferencia de rumbos de  $\Delta w$  e  $\Delta z$ ; de modo que si el arco de curva del plano  $z$  tiene semitangente en  $z$ , también tiene semitangente en  $w$  la curva homóloga, y la diferencia de rumbos de ambas semitangentes es precisamente  $\text{Arg } w'$ . Ahora bien, como  $w'$  tiene *valor único* en cada punto, este ángulo será también único (salvo para  $w'=0$ ), es decir, el mismo al tomar otro par cualquiera de arcos homólogos y, por tanto, los dos haces de semirrectas son *directamente iguales*; de otro modo:

*Las tangentes a dos curvas que concurren en un punto del plano  $z$ , donde es  $w' \neq 0$ , forman el mismo ángulo en valor y signo que las tangentes a las curvas homólogas en el plano  $w$ . Más brevemente: La transformación conserva los ángulos y el sentido, y se llama, por tal motivo, conforme directa.*

En resumen: *Toda función holomorfa establece una transformación conforme directa entre los planos o dominios correspondientes de la variable  $z$  y de la función  $w$  en todos los puntos donde es  $w' \neq 0$ .*

El módulo de  $w'$  expresa, a su vez, el  $\lim \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$ ; es decir, el límite de la razón de longitudes de cuerdas homólogas. Esta propiedad, unida a la conservación de ángulos, nos permite decir, en lenguaje intuitivo:

Las figuras homólogas situadas en pequeños entornos de puntos homólogos  $z$ ,  $w$ , donde  $w' \neq 0$ , son sensiblemente *semejantes*, con razón de semejanza igual al módulo de la derivada  $w'(z)$ .

**7. Existencia de la función inversa.**—Es interesante relacionar la condición  $w' \neq 0$  con la existencia de la función inversa. En efecto, decir que la función  $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  define en un entorno del punto  $z = x + iy$  una función inversa  $z = z(w)$  es tanto como afirmar que el sistema  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  define implícitamente  $x, y$  funciones de  $u, v$ , para lo que, en el supuesto en que nos hemos colocado de existencia y continuidad de  $u_x, u_y, v_x, v_y$ , es condición suficiente que sea el jacobiano

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - v_x u_y \neq 0$$

Ahora bien si la función  $w$  cumple las condiciones de monogeneidad, este jacobiano vale  $u_x^2 + v_x^2 = |w'(z)|^2$ . Por tanto,

*Para todo punto de una función holomorfa en que no se anule la derivada podemos afirmar la existencia de la función inversa en un entorno del mismo.*

Las derivadas de la función y de su inversa son entonces recíprocas  $z'(w) = \frac{1}{w'(z)}$  por ser límites de cocientes inversos  $\frac{\Delta z}{\Delta w}, \frac{\Delta w}{\Delta z}$ , y la existencia de  $z'(w)$  prueba la continuidad de la función inversa.



Una función holomorfa de derivada no nula establece, pues (§ 1), una correspondencia de entornos en los dos sentidos y, por tanto, en dos recintos homólogos de los planos  $z$  y  $w$  a puntos interiores del uno corresponden puntos interiores del otro, y recíprocamente.

### NOTA

**Sobre las condiciones de monogeneidad.**—Como advertimos en la lección anterior § 1, hemos partido de funciones  $w=u+iv$ , para las cuales  $u, v$  admiten derivadas continuas. Hemos procedido así porque en este campo funcional se identifican fácilmente las condiciones de derivabilidad y de integrabilidad, según veremos en la lección siguiente.

Ahora bien, ciñéndonos sólo a las condiciones de derivabilidad podemos partir de campos más amplios, obteniendo aparentemente condiciones más amplias. Así, no es difícil probar que

*Son condiciones necesarias y suficientes de monogeneidad de  $w=u(x, y)+iv(x, y)$  en el punto  $x$ , y que las funciones  $u, v$  sean DIFERENCIABLES en dicho punto y verifiquen en él las igualdades (5).*

En efecto, la existencia del  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ , que designaremos por  $A+iB$ , implica que sea

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = A + iB + \varepsilon_1 + i\varepsilon_2, \text{ o bien } \Delta u + i\Delta v = (A + iB)(\Delta x + i\Delta y) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)(\Delta x + i\Delta y)$$

en donde  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  son infinitésimos al tender  $\Delta z \rightarrow 0$ . De aquí resulta  $\Delta u, \Delta v$  de la forma

$$\begin{aligned} \Delta u &= A\Delta x - B\Delta y + \varepsilon_1\Delta x - \varepsilon_2\Delta y \\ \Delta v &= B\Delta x + A\Delta y + \varepsilon_2\Delta x + \varepsilon_1\Delta y \end{aligned}$$

que indican que  $u$  y  $v$  son diferenciables (Stolz) y que  $A=u_x=v_y, B=v_x=-u_y$ , es decir que estas condiciones son necesarias. La suficiencia resulta de lo dicho en el § 2.

Más difícil es probar que la monogeneidad en un recinto implica asimismo en él la continuidad de las derivadas  $u_x, u_y, v_x, v_y$  (Goursat), o sea que esta continuidad es también condición necesaria, con lo que no hace falta en rigor la restricción previa indicada en el § 1 de la lección anterior, con el propósito antes señalado.

Véase, para más detalles, cualquier tratado moderno de Análisis.

### EJERCICIOS

1. Hallar las derivadas de las funciones  $Sh z, Ch z, Th z$ , y sus inversas. Teoremas en que se apoyan las deducciones correspondientes.

2. Comprobar si son holomorfas las funciones siguientes y hallar las derivadas de las que lo sean:

$$w(z) = 3x^3 - 9xy^2 - x^2 + y^2 + i(9x^2y - 3y^3 - 2xy)$$

$$w(z) = \frac{1 - x^2 + y^2 + 2xyi}{(x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2}$$

$$w(z) = |z|, \quad w(z) = \text{Arg } z, \quad w(z) = \bar{z} \text{ (conjugado de } z)$$

3. Dada la función  $u=x^3-3y^2x$  hallar otra función  $v(x, y)$  que forme con  $u$  una función holomorfa de la variable  $z=x+iy, w(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ .

4. Id. para  $u=x^2-y^3; u=x:(x^2+y^2); u=l\sqrt{x^2+y^2}$ .

5. Id. para  $u=\cos x, v=\text{Ch } y$ .

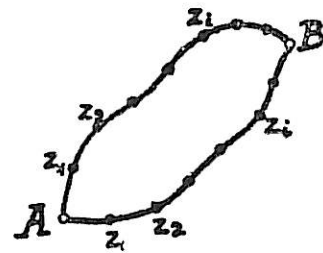
6. Id. para  $u=e^x(x \cos y - y \sin y)$ . Ver más ejercicios al final de la lección siguiente.

LECCIÓN 37.—LA INTEGRACIÓN EN EL CAMPO COMPLEJO

1. Condiciones para que la integración no dependa del camino.—

Vimos en el tomo I que si  $f(x)$  es una función de variable real  $x$  continua en el intervalo  $[a, b]$ , al fraccionar este intervalo en intervalos parciales  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ , el límite de la suma  $\Sigma f(x_i) \Delta x_i$ , al tender todos los  $\Delta x_i \rightarrow 0$ , existe y es independiente de la ley según la cual estos incrementos tienden a cero, representándose tal límite por el símbolo de integral definida  $\int_a^b f(x) dx$ . Si el extremo inferior  $a$  es fijo y el superior  $b = X$  es variable (dentro del campo de continuidad de  $f(x)$ ) esta integral es una *función de  $X$*  derivable, siendo su derivada  $f(X)$ .

Intentemos generalizar estos resultados a una función  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  continua de variable compleja. Dados dos valores complejos  $a$  y  $b$ , es decir dos puntos  $A$  y  $B$  del plano de Gauss, se comprende que aquí el conjunto de valores que cabe asignar a  $z$  para ir de  $A$  a  $B$  es mucho más arbitrario que en el campo real, y la existencia de un *límite único*  $\lim \Sigma f(z_i) \Delta z$  al tender los  $\Delta z_i \rightarrow 0$  independientemente del itinerario seguido, exigirá condiciones mucho más fuertes a la función  $f(z)$  que la simple continuidad. Consideremos, para fijar las ideas, caminos de integración formados por un solo arco de curva continua con tangente en cada punto o por un número finito de arcos que tengan esta propiedad, a cuyo conjunto llamaremos para abreviar *curva elemental*. En cada una de tales curvas consideremos un conjunto ordenado  $z_i = x_i + iy_i$  de puntos intermedios entre  $a$  y  $b$ .



Si  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , podremos expresar así la referida suma a lo largo de uno de tales itinerarios:

$$\begin{aligned} \Sigma f(z_i) \Delta z_i &= \Sigma [u(x_i, y_i) + iv(x_i, y_i)] (\Delta x_i + i \Delta y_i) = \\ &= \Sigma [u(x_i, y_i) \Delta x_i - v(x_i, y_i) \Delta y_i] + i \Sigma [v(x_i, y_i) \Delta x_i + u(x_i, y_i) \Delta y_i] \end{aligned}$$

El límite de esta suma, al tender los  $\Delta z_i \rightarrow 0$  sobre la curva elegida, se formulará, pues, mediante dos *integrales curvilíneas* a lo largo de ella (tomo I, lec. 20).

$$\lim \Sigma f(z_i) \Delta z_i = \int_A^B (u dx - v dy) + i \int_A^B (v dx + u dy) \quad [1]$$

Ahora bien, la condición necesaria y suficiente para que este valor complejo sea independiente de la curva de integración seguida entre  $A$  y  $B$

en un determinado dominio del plano  $z$  es que las integrales curvilíneas que definen sus componentes sean independientes del referido camino, o sea que, existiendo y siendo continuas las derivadas  $u_x, u_y, v_x, v_y$  en el referido dominio, se verifiquen en él. (tomo 1, lec. 20, § 4).

$$\boxed{u_y = -v_x, \quad v_y = u_x} \quad [2]$$

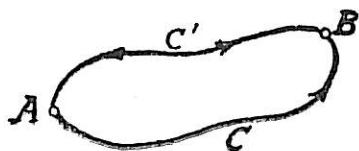
condiciones que son precisamente las de monogeneidad de la función  $w=f(z)$ . De aquí este importantísimo resultado central en la teoría de funciones de variable compleja.

*La integral de toda función holomorfa en un recinto simplemente conexo, entre dos puntos del mismo, es independiente del camino.*

**2. Teoremas de Cauchy y de Morera.**—El resultado anterior es equivalente, como vimos en el tomo I, lección 20, § 4 a este otro:

**TEOREMA DE CAUCHY.**—*La integral de una función holomorfa en un recinto simplemente conexo, a lo largo de toda curva elemental cerrada interior al mismo, es nula.*

Pues la integral a lo largo del contorno cerrado  $ACBC'A$  es equivalente a la suma



$$\int_{ACB} + \int_{BC'A} = \int_{ACB} - \int_{AC'B}$$

que se anula por ser iguales  $\int_{ACB}$  e  $\int_{AC'B}$

Recíprocamente: **TEOREMA DE MORERA.**—*Si la integral de una función  $f(z)$  a lo largo de todo contorno cerrado interior a un recinto simplemente conexo  $R$  es nula, la función es holomorfa en dicho recinto.* En efecto, al ser las integrales curvilíneas componentes de [1] independientes del camino, se deberá verificar en cada una de ellas la igualdad de derivadas cruzadas de los coeficientes de  $dx$  y  $dy$ , lo que conduce al cumplimiento de las condiciones [2] de monogeneidad en todo punto interior a  $R$ .

**3. La integral en el campo complejo como función del límite superior.**  
**Generalización de la Regla de Barrow.**—Sea  $f(z)$  una función holomorfa en un cierto recinto del plano  $z$  simplemente conexo. Consideremos la integral  $\int_{\alpha}^Z f(z)dz$  entre un punto fijo  $\alpha=a+bi$  y otro variable  $Z=X+iY$  en el recinto considerado. Esta integral es, en virtud de la hipótesis, una función del límite superior  $Z$  cuya expresión en función de sus componentes

$X, Y$  es bien fácil de obtener, supuestas conocidas las funciones potenciales de las componentes de la integral. Es decir, sea

$$\begin{aligned} F(Z) &= \int_a^Z f(z) dz = \int_a^Z (u dx - v dy) + i \int_a^Z (v dx + u dy) = \\ &= U(X, Y) - U(a, b) + i V(X, Y) - i V(a, b) \end{aligned}$$

en la que suponemos  $\frac{\partial U}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -v, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = v, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = u.$

Se observa que esta función  $F(Z)$  obtenida es derivable por cumplir las condiciones de monogeneidad

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial V}{\partial Y} = u(X, Y), \quad \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial V}{\partial X} = -v(X, Y)$$

y su derivada vale precisamente

$$F'(Z) = U_x + iV_x = u(X, Y) + iv(X, Y) = f(Z)$$

En resumen: *La integral  $\int_a^Z f(z)dz$  de una función holomorfa en un recinto simplemente conexo entre un punto fijo  $a$  y otro variable  $Z$  en el mismo, es una función holomorfa  $F(Z)$  del límite superior  $Z$  en el mismo recinto, cuya derivada coincide con el valor de la función subintegral para  $z=Z$ , valor del límite superior. Es decir, es una función primitiva del integrando.*

Este importante resultado permite calcular las integrales definidas de las funciones holomorfas de variable compleja aplicando, como en el campo real, el artificio de la determinación de funciones primitivas. El proceso deductivo es el mismo: Si  $w = u + iv$  admite derivada nula, es decir, si  $u_x = v_y = 0, u_y = -v_x = 0$  será evidentemente  $u = \text{const}^\circ, v = \text{const}^\circ$ , de donde:

*Toda función holomorfa de derivada nula es una constante.*

*Dos funciones holomorfas de derivadas iguales son iguales o difieren en una constante. Puesto que su diferencia tiene derivada nula.*

Por tanto, dada  $f(z)$  holomorfa, si sabemos obtener una primitiva  $\Phi(z)$  se tendrá, por lo anterior

$$F(Z) = \int_a^Z f(z) dz = \Phi(Z) + C$$

pero para  $Z = a$   $0 = \Phi(a) + C$  de donde  $C = -\Phi(a)$  y substituyendo

$$\int_a^Z f(z) dz = \Phi(Z) - \Phi(a)$$

generalizándose así en el plano complejo la regla de Barrow para el cálculo de integrales definidas de funciones holomorfas: *Réstense los va-*

lores que adquiere una primitiva cualquiera de la función integrada para el límite superior y el inferior de la integral.

Ejemplos:

$$\int_{-1}^{1+i} z^3 dz = \left[ \frac{z^4}{4} \right]_{-1}^{1+i} = \frac{1}{4} (1 + 4i - 6 - 4i + 1 + 1) = -\frac{3}{4}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi i} e^{2z} dz = \left[ \frac{1}{2} e^{2z} \right]_{-\pi}^{\pi i} = \frac{1}{2} [e^{2\pi i} - e^{-2\pi}] = \frac{1 - e^{-2\pi}}{2}$$

Pero para asegurar la validez de esta regla no hay que olvidarse de comprobar antes la holomorfía de la función integrada, sea en todo el plano, sea en la región en que se opere.

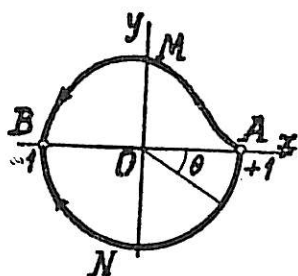
Así sería ilícito poner

$$\int_0^1 \frac{dz}{1+z^2} = [\operatorname{arc} \operatorname{tg} z]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

sin condicionar el recinto de validez, pues la presencia de polos en los puntos  $\pm i$  indica que esta integral puede depender del camino seguido en la integración, si este camino rodea los polos, como veremos en seguida.

Análogamente, la función *no uniforme*, y, por tanto, *no holomorfa*  $\sqrt{z}$  verifica la igualdad

$$\int_{+1}^{-1} \sqrt{z} dz = \left[ \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} \right]_{+1}^{-1} = \frac{2}{3} (-i - 1)$$



siguiendo un camino que rodee el origen (punto de ramificación) dejándolo a la izquierda (AMB de la figura), pero no si lo deja a la derecha. En efecto, a lo largo del camino semicircular ANB de la figura

$$\int_{+1}^{-1} \sqrt{z} dz = \int_0^{-\pi} e^{\frac{1}{2}\theta i} i e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{-\pi} \left( \cos \frac{3}{2}\theta + i \operatorname{sen} \frac{3}{2}\theta \right) d\theta = \frac{2}{3} (i - 1)$$

Por tanto, a lo largo del camino cerrado BMANB será  $\int \sqrt{z} dz = \frac{4i}{3}$ , obtenida sumando las anteriores, previo cambio de signo de la primera.

Esto es debido a que el nuevo punto B tiene argumento distinto del anterior, es decir, está en otra hoja del plano de Riemann en el cual el camino anterior ya no es *cerrado*. La ambigüedad desaparece en estos casos observando las hojas a qué pertenecen los extremos de la integral. Sólo al cerrar el camino sobre la misma hoja, la integral es nula (\*).

(\*) No sólo no es nula en este caso la integral a lo largo del contorno indicado, sino que además depende del origen que se tome. Así, tomando el origen en A (de argumento cero), la integral (en el mismo sentido) es real y vale  $-4/3$  como puede comprobar fácilmente el lector. Ello se debe a que tampoco en A se cierra camino, de modo que el camino ANBMA es, en rigor, distinto del BMANB por estar el arco BMA en hoja distinta de la anterior.

4. **Acotación del módulo de una integral definida.**—Es útil, en multitud de ocasiones, saber acotar una integral a lo largo de un arco de curva  $\gamma$  rectificable, acotación de la que hemos de hacer uso más adelante.

De la definición de integral como  $\lim \Sigma f(z_i) \Delta z_i$  y del hecho de ser el módulo de una suma  $\leq$  a la suma de módulos

$$|\Sigma f(z_i) \Delta z_i| \leq \Sigma |f(z_i) \Delta z_i|$$

se desprende, al tomar límites,

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z) dz|$$

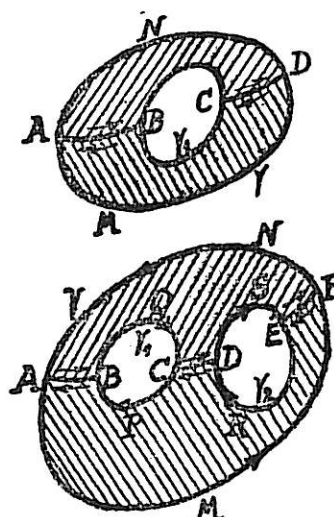
El módulo de una integral es menor o igual que la integral del módulo de integrando.

Si  $|f(z_i)| \leq M$  en todo el arco  $\gamma$ , se tendrá

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} M ds = M l \quad l \text{ longitud del arco.}$$

El módulo de la integral de  $f(z)$  a lo largo de un arco de curva es menor o igual que el producto de la longitud de arco por el valor máximo del módulo de  $f(z)$  en él.

5. **Integrales en recintos múltiplemente conexos. Puntos singulares aislados.**—Si de un recinto simplemente conexo limitado por una curva elemental cerrada, que llamaremos su *contorno exterior*  $\gamma$  imaginamos suprimido otro de contorno  $\gamma_1$  interior a él, obtenemos un recinto *doblemente conexo*, llamado así por ser precisos *dos* cortes  $AB$ ,  $CD$  entre ambos contornos para dividirlo en recintos separados simplemente conexos, es decir, para que pierda la conexión. Análogamente, si suprimimos dos recintos conexos limitados por dos contornos interiores  $\gamma_1, \gamma_2$  obtenemos un recinto *triplemente conexo*, por ser precisos *tres* cortes entre estos contornos (por ejemplo los  $AB$ ,  $CD$  y  $EF$  de la figura) para dividirlo en recintos separados simplemente conexos. Supongamos ahora estos recintos interiores al campo de holomorfía de una función  $f(z)$ . Aplicando a cada uno de ellos el teorema de Cauchy, resulta



$$\int_{AMF} f(z) dz + \int_{FE} + \int_{ERD} + \int_{DC} + \int_{CPB} + \int_{BA} = 0$$

$$\int_{FNA} + \int_{AB} + \int_{BQC} + \int_{CD} + \int_{DSE} + \int_{EF} = 0$$



y como

$$\int_{BA} = -\int_{AB} \quad \int_{CD} = -\int_{DC} \quad \int_{EF} = -\int_{FE}$$

al sumar estas igualdades, teniendo en cuenta los sentidos de recorrido en los contornos  $\gamma$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ , resulta

$$\int_{\gamma} - \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2} = 0 \quad \text{es decir} \quad \int_{\gamma} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}$$

La integral  $\int f(z)dz$  tomada sobre el contorno exterior de un recinto múltiplemente conexo, interior al de holomorfía de  $f(z)$ , es igual a la suma de las integrales sobre los contornos interiores tomadas en el mismo sentido. Se comprende que el teorema es aplicable cualquiera que sea el número de contornos interiores considerados.



En particular: Son iguales las integrales de  $f(z)$  tomadas en el mismo sentido a lo largo de dos contornos  $C_1$ ,  $C_2$ , uno interior a otro, y ambos interiores al campo de holomorfía de  $f(z)$ .

Estos teoremas permiten calcular el valor de la integral sobre una curva cerrada de un recinto en el que la función es holomorfa *salvo en algunos puntos interiores*  $P_i$ , (llamados *singulares*) siempre y cuando se puedan *aislar*, es decir, rodear cada punto singular  $P_i$  de una circunferencia suficientemente pequeña para que en su interior no exista más punto singular que  $P_i$  (\*). Sumadas las integrales sobre estas circunferencias en sentido positivo, su suma será igual a la integral buscada.

**6. Aplicación a las integrales de funciones racionales alrededor de sus polos.**—Sea, por ejemplo,  $f(z)$  una función racional no entera y supongamos descompuesta su parte fraccionaria en suma de fracciones simples de la forma

$$\frac{a}{z-\alpha} \quad \text{o bien} \quad \frac{a_n}{(z-\alpha)^n}$$

Imaginemos trazado, con centro en cada *polo*, una circunferencia de radio  $\epsilon$  suficientemente pequeña para que en su interior no exista más que este polo.

El denominador de la fracción primera  $z-\alpha$  a lo largo de la circunferencia de centro  $\alpha$  y radio  $\epsilon$  es un valor de módulo fijo  $\epsilon$  y argumento  $\theta$

(\*) No siempre se pueden aislar las singularidades. Por ejemplo, el punto  $z=0$  es singular de la función  $w=\text{sen}\frac{1}{z}$ , y no es posible aislarlo porque hay otros puntos singulares  $z=1/n\pi$  ( $n=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ) tan próximos a él como se quiera.

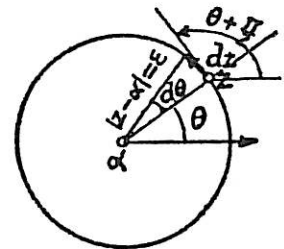
y se podrá representar por  $\epsilon e^{i\theta}$  mientras  $dz$  tiene módulo  $\epsilon d\theta$  y argumento  $\theta + \frac{\pi}{2}$ , es decir  $dz = i\epsilon e^{i\theta} d\theta$ .

La integral de la fracción tomada en sentido directo será, pues

$$a \int \frac{dz}{z-a} = a \int_0^{2\pi} i d\theta = 2\pi a i$$

La integral de la fracción segunda será, en cambio, nula, pues

$$\begin{aligned} a_n \int \frac{dz}{(z-a)^n} &= a_n \int_0^{2\pi} \frac{i\epsilon e^{i\theta} d\theta}{\epsilon^n e^{n\theta i}} = \frac{a_n i}{\epsilon^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta} d\theta = \\ &= \frac{a_n i}{\epsilon^{n-1}} \int_0^{2\pi} [\cos(1-n)\theta + i \operatorname{sen}(1-n)\theta] d\theta = 0 \end{aligned}$$



En virtud de lo dicho en el párrafo anterior, aún cuando los cálculos se han efectuado, para mayor sencillez, sobre contornos circulares, los resultados obtenidos serán los mismo tomando otros contornos cualesquiera siempre que encierren sólo el mismo polo en su interior. En resumen:

Dado un polo  $\alpha$  (simple o múltiple) de una fracción racional, la integral de la misma tomada alrededor de un contorno cualquiera que sólo abarque dicho punto en su interior, será el producto de  $2\pi i$  por el primer numerador  $a$  de su cadena de fracciones simples correspondientes.

Si un contorno elemental  $C$  abarca en su interior varios polos  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  de fracciones correspondientes

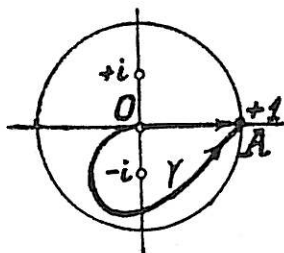
$$\frac{a}{z-\alpha} + \dots + \frac{b}{z-\beta} + \dots + \frac{c}{z-\gamma} + \dots$$

la integral de la función a lo largo de  $C$  en sentido positivo valdrá (§ 3)

$$2\pi i(a+b+c+\dots)$$

EJEMPLO. La función  $\frac{1}{z^2+1} = -\frac{\frac{1}{2}i}{z-i} + \frac{\frac{1}{2}i}{z+i}$  tiene los polos simples  $+i$  y  $-i$ , a

los que corresponden los numeradores  $-\frac{1}{2}i, +\frac{1}{2}i$ . La integral  $\int \frac{dz}{z^2+1}$  a lo largo de la circunferencia de centro en el origen y radio 2, que contiene en su interior ambos polos valdrá



$$2\pi i \left[ -\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}i \right] = 0$$

mientras a lo largo de un contorno cualquiera que abarque sólo el polo  $-i$  tiene por valor  $2i\pi \left( +\frac{1}{2}i \right) = -\pi$

De aquí que la integral  $\int_0^1 \frac{dz}{1+z^2}$  no tenga sentido independiente del

camino, pues a lo largo del arco  $O\gamma A$  (figura) diferirá su valor en  $-\pi$  del obtenido a lo largo del segmento  $OA$  del eje real. Como este valor es  $\text{arc tg } 1 = \frac{\pi}{4}$ , la integral a lo largo de  $O\gamma A$  valdrá  $-\frac{3\pi}{4}$ .

### NOTA

**Sobre la validez del teorema de Cauchy.**—El teorema de Cauchy y sus consecuencias han sido demostradas para curvas cerradas interiores al recinto de holomorfia de la función; pero su validez se extiende al propio contorno o frontera del recinto de holomorfia cuando la función es continua en el recinto contorneado, además de ser holomorfa en su interior. Ahora bien, la inclusión del contorno exige razonamientos bastante más largos, que el lector puede consultar en los tratados especiales (\*).

### EJERCICIOS

- Hallar la  $\int \frac{i+z}{i-z} dz$  sobre una circunferencia de radio 2 y centro en el origen, tomada en sentido positivo.
- Hallar la  $\int \frac{3(z-1)^2-1}{z^3-3z^2+4z-2} dz$  a lo largo del rectángulo de lados  $x=0$ ,  $x=2$ ,  $y=\pm 2$  recorrido en sentido positivo.
- Hallar la  $\int \frac{dz}{z-1}$  a lo largo de la curva definida por la ecuación polar  $r=3 \cos \theta - 1$  en sentido positivo.
- Hallar la  $\int \frac{dz}{1+z^4}$  a lo largo de la curva  $r=2 \text{sen } \frac{\theta}{2}$ .
- Hallar en la transformación  $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$  el lugar geométrico de puntos del plano  $z$ , y sus correspondientes en el plano  $w$ , en el entorno de los cuales la transformación no modifica las longitudes.
- Calcular la  $\int w dz$  a lo largo de la curva del ejercicio anterior.
- Comprobar que la  $\int \sqrt{z} dz$  sobre la circunferencia de centro en el origen, y de radio unidad, a partir del punto de argumento  $\alpha$ , es función de dicho argumento y vale  $-\frac{4}{3} e^{\frac{3}{2}\alpha i}$ . (Para  $\alpha=0$  resulta  $-4/3$  y para  $\alpha=\pi$  resulta  $4/3$ , concordando con lo hallado en el § 3). Para una circunferencia de radio  $r$  hay que multiplicar el resultado anterior por  $r^{\frac{3}{2}}$ .
- El mismo estudio para  $\int dz \sqrt{z}$ .
- Id. para  $\int z^{1/3} dz$  y para  $\int z^{-1/3} dz$ .
- Demostrar que si  $p > 0$  y  $|f(z)|$  es acotado o infinito de orden  $n$  al tender  $z \rightarrow \infty$ , en un ángulo, de vértice en el origen, interior al semiplano  $x > 0$ , la  $\int e^{-pz} f(z) dz$  tomada sobre un arco de circunferencia de centro en el origen contenido en dicho ángulo y limitado por sus lados, tiende a cero al tender el radio a infinito.
- Demostrar que si  $zf(z)$  tiende uniformemente al límite  $L$  cuando  $|z| \rightarrow \infty$  en el interior del ángulo  $\theta_1 < \theta < \theta_2$ , el límite de la  $\int f(z) dz$  tomada sobre un arco  $AB$  interior al ángulo y limitado por sus lados, cuando el radio tiende a  $\infty$  vale  $L(\theta_2 - \theta_1)i$ . El teorema se generaliza fácilmente trasladando el origen a otro punto  $a$ . (V. Mac Robert: «Function of a complex variable».)
- Dada la función  $w(z)$  las coordenadas polares  $r, \theta$  del plano  $z$ , se transforman en las  $R, \Theta$  de los puntos homólogos del plano  $w$ . ¿Qué condiciones deben cumplir las funciones  $R(r, \theta)$  y  $\Theta(r, \theta)$  para que sea conforme la transformación?

(\*) V., por ejemplo, G. Valiron, «Theorie des fonctions».

## LECCIÓN 38.—RESIDUOS, INTEGRAL DE CAUCHY

**1. Residuo de una función en un punto singular aislado.**—Hemos visto, en la lección anterior, que la integral de una función holomorfa en un recinto, tomada a lo largo de cualquier curva cerrada del mismo, es nula. Pero si la función tiene un polo  $\alpha$  en el interior de la curva, dicha integral vale  $2\pi ia$ , siendo  $a$  el numerador de la fracción simple  $\frac{a}{z-\alpha}$  correspondiente a dicho polo.

En el estudio comparativo de estas integrales parece natural prescindir del factor constante  $2\pi i$  y se obtiene así la siguiente definición general de *residuo* aplicable a todo punto *singular aislado* de una función uniforme.

Llámanse *residuo* de una función  $f(z)$  uniforme, en un punto singular aislado  $\alpha$  de la misma al siguiente valor

$$\text{Residuo} = \frac{1}{2\pi i} \int_c f(z) dz \quad [1]$$

siendo  $c$  una curva cerrada elemental cualquiera (\*) recorrida en sentido positivo (a sinistrorsum) en cuyo interior no existe más que dicho punto singular.

De esta definición y de lo dicho en la lección anterior se desprende:

*El residuo de una función racional en un polo  $\alpha$  de la misma es igual al numerador  $a$  de la fracción  $\frac{a}{z-\alpha}$  en el desarrollo de dicha función en fracciones simples.*

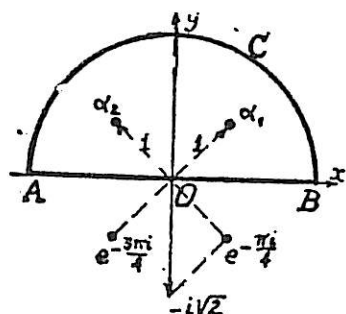
*La integral de una función  $f(z)$  holomorfa en un recinto, salvo en puntos singulares aislados, tomada a lo largo de una curva elemental cerrada interior a dicho recinto en sentido positivo, es igual al producto de  $2\pi i$  por la suma de los residuos de la función en los puntos singulares aislados interiores a dicha curva.* Basta, en efecto, rodear cada punto singular aislado, de un contorno suficientemente pequeño para que en su interior no exista otro punto y aplicar el teorema del §5, lec. 37. Este sencillo teorema proporciona notables recursos para el cálculo de integrales definidas.

**EJEMPLO.** Calculemos  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{1+z^4}$ . Las raíces del denominador situadas encima del eje  $x$  son  $\alpha_1 = e^{\frac{\pi}{4}i}$ ,  $\alpha_2 = e^{\frac{3\pi}{4}i}$ . Integrando sobre el contorno semicircular cerrado  $AOBCA$  de la figura ( $OA=OB=r \rightarrow \infty$ ) resulta

$$\int_{-r}^{+r} \frac{dz}{1+z^4} + \int_{BCA} \frac{dz}{1+z^4} = 2\pi i \Sigma \text{residuos en } \alpha_1 \text{ y } \alpha_2$$

(\*) De las consideradas en el § 1 de la lección anterior.

Como las raíces son simples, los numeradores de  $\frac{a_1}{z-a_1}$  y  $\frac{a_2}{z-a_2}$  en el desarrollo de la fracción, serán  $\frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{4a^3}$ , es decir, respectivamente  $a_1 = \frac{1}{4} e^{-\frac{3}{4}\pi i}$ ,  $a_2 =$



$$= \frac{1}{4} e^{-\frac{9}{4}\pi i}, \text{ y la suma de los residuos valdrá}$$

$$\frac{1}{4} \left( e^{-\frac{3}{4}\pi i} + e^{-\frac{9}{4}\pi i} \right) = \frac{1}{4} \left( e^{-\frac{3}{4}\pi i} + e^{-\frac{1}{4}\pi i} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{4} i$$

Por otra parte (§ 4, lecc. anterior),

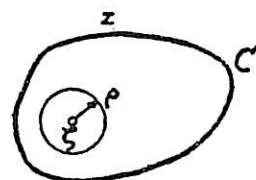
$$\left| \int_{BCA} \frac{dz}{1+z^4} \right| < \frac{\pi r}{|1+z^4|} \rightarrow 0 \text{ al tender } r \rightarrow \infty$$

y queda

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{1+z^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

**2. Fórmula de Cauchy.**—Una de las más interesantes consecuencias de la noción de residuo es la fórmula de Cauchy, que pasamos a exponer. Sea  $f(z)$  una función holomorfa en un recinto simplemente conexo al que pertenece la curva elemental cerrada  $C$  y sea  $\zeta$  un punto interior a dicha curva. La función  $\frac{f(z)}{z-\zeta}$  es también holomorfa en el interior de  $C$  salvo en el polo  $\zeta$ , única singularidad que presenta. El valor de su residuo en  $\zeta$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-\zeta} dz$$



es, pues, el mismo sustituyendo  $C$  por una circunferencia  $\gamma$  de radio  $\rho$  tan pequeño como se quiera alrededor de  $\zeta$ . Pero a medida que  $\rho \rightarrow 0$  el valor de  $f(z)$  en ella tiende a  $f(\zeta)$  por la continuidad de  $f(\zeta)$ , es decir  $f(z) = f(\zeta) + \epsilon$ , tendiendo  $\epsilon \rightarrow 0$  con  $\rho$ .

La integral anterior podrá por tanto, escribirse

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-\zeta} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta) dz}{z-\zeta} + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\epsilon}{z-\zeta} dz$$

El primer sumando del segundo miembro es un residuo igual al numerador  $f(\zeta)$ .

El módulo de la segunda integral es fácil de acotar por el § 4 de la lección anterior, y resulta menor que  $< \frac{2\pi\rho}{\rho} \epsilon_M = 2\pi\epsilon_M$ , siendo  $\epsilon_M$  el máximo valor de  $\epsilon$  en el contorno, valor que tiende a cero con  $\rho$ ; por tanto

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-\zeta} dz = f(\zeta)} \quad [2]$$

tórmula de Cauchy cuya significación trascendental consiste en que da el valor de una función holomorfa  $f(\zeta)$  en un punto  $\zeta$  cualquiera, interior a un recinto simplemente conexo, en función de los valores de dicha función en el contorno.

Dados, pues, los valores de una función holomorfa a lo largo de una curva cerrada elemental  $C$  (perteneciente a su campo de holomorfia) quedan unívocamente definidos sus valores en todos los puntos interiores a  $C$ , mediante la integral de Cauchy [2].

Esta fórmula, válida para los recintos simplemente conexos, se modifica fácilmente para los doblemente conexos.

En efecto, si es  $\zeta$  un punto de un recinto doblemente conexo  $R$  limitado por las curvas  $C_1$  exterior y  $C_2$  interior, practicando dos cortes  $AB$  y  $MN$  entre ambas, mediante curvas que no pasen por  $\zeta$ , podemos situar este punto en una de los recintos simplemente conexos en que queda dividido  $R$ , en el que

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ABDMNFA} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz$$

mientras en el otro recinto

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{AGNMEBA} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = 0$$

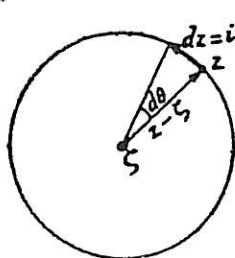
por ser el integrando holomorfo en él.

Al sumar se anulan las integrales recorridas sobre  $AB$  y  $MN$  en los dos sentidos y queda

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz \quad [3]$$

Ambas integrales tomadas en sentido positivo. Análogamente procederíamos para adaptar la fórmula de Cauchy a otros recintos múltiplemente conexos.

**3. Aplicación al círculo. Teorema del módulo máximo.**—Aplicando la integral de Cauchy a un contorno circular de radio  $R$  y a su centro  $\zeta$  resultará en él

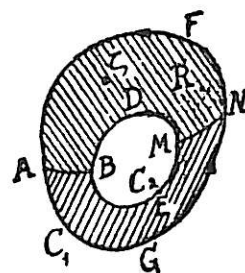


$$dz = (z - \zeta) i d\theta$$

y por tanto

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z) i d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z) d\theta$$

que se puede enunciar diciendo: El valor en el centro de un recinto circu-





lar de una función holomorfa en él es el promedio integral de los valores de dicha función en el contorno.

Aplicando a esta integral la acotación modular del § 4, lec. 37, resulta

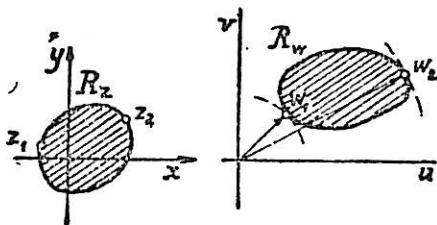
$$|f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} M \int_0^{2\pi} d\theta = M$$

siendo  $M$  el mayor valor de  $|f(z)|$  en el contorno. El módulo de  $f(z)$  en el centro es menor que el máximo de  $f(z)$  en el contorno (el signo = sólo vale en el caso de ser  $f(z)$  constante). Esta propiedad es general para todo otro punto que no sea el centro y se verifica asimismo en contornos no circulares elementales. Es decir:

Una función holomorfa en un recinto contorneado  $R_z$  adquiere su máximo módulo en el contorno.

También se verifica propiedad análoga para el módulo mínimo cuando  $f(z)$  no se anula en ningún punto del recinto considerado.

La razón fundamental de estos hechos estriba a grandes rasgos en que toda función holomorfa establece no solo una correspondencia entre puntos  $z$  y  $w$ , sino también una correspondencia entre entornos (v. §§ 1, 7, lec. 36), y, por tanto, a todo punto interior de un recinto  $R_z$  del plano  $z$  corresponde un punto interior de un recinto homólogo  $R_w$  en el plano  $w$ , el cual es acotado, como  $R_z$ , por la misma continuidad.



Ahora bien, el valor máximo  $|w|$ , es decir el punto  $w$  más alejado del origen debe estar en el contorno del recinto  $R_w$ , y el mínimo también si  $w$  no se anula, por tanto sus homólogos no pueden ser puntos interiores de  $R_z$ , sino también de

su contorno. El desarrollo minucioso de esta idea y la demostración rigurosa consiguiente del teorema puede verse en los tratados.

**4. Derivadas sucesivas de una función holomorfa.**— Otra de las consecuencias que se pueden deducir del teorema de Cauchy es la demostración de la existencia de las derivadas sucesivas de una función holomorfa y su expresión mediante integrales análogas.

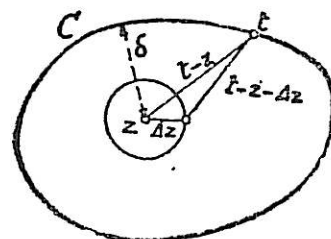
En efecto, derivemos la función holomorfa  $f(z)$  definida por la integral de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t-z} dt \tag{4}$$

sobre una curva cerrada  $C$  interior al recinto de holomorfía supuesto simplemente conexo. Hemos de calcular  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z}$  demostrando su existencia.

Observemos, para ello, que

$$\frac{1}{t-z-\Delta z} - \frac{1}{t-z} = \frac{\Delta z}{(t-z)(t-z-\Delta z)} = \frac{\Delta z}{(t-z)^2} + \frac{\overline{\Delta z}^2}{(t-z)^2(t-z-\Delta z)}$$



de modo que

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) dt}{(t-z)^2} + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Delta z f(t)}{(t-z)^2 (t-z-\Delta z)} dt$$

Llamemos  $\delta$  a la distancia mínima de los puntos de  $C$  al punto  $z$ , es decir,  $|t-z| \geq \delta$ . Podemos tomar  $\varepsilon$  suficientemente pequeño para que, siendo  $|\Delta z| < \varepsilon$ , la distancia de los puntos de  $C$  al punto interior  $z$  incrementado sea mayor que  $\frac{\delta}{2}$ , es decir  $|t-z-\Delta z| > \frac{\delta}{2}$ , con lo que el módulo del segundo sumando será menor que

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon M l}{\delta^2 \cdot \frac{\delta}{2}} = \frac{\varepsilon M}{\pi \delta^3} l$$

( $M$  máximo módulo de  $f(t)$  en el contorno,  $l$  longitud del mismo) valor que tiende a cero con  $\varepsilon$ , es decir al tender  $\Delta z \rightarrow 0$ . Por tanto existe la derivada de  $f(z)$  en el punto  $z$  y su valor es

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) dt}{(t-z)^2} \quad [5]$$

Análogamente se demuestra que

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) dt}{(t-z)^{n+1}} \quad [6]$$

Estos límites sólo dependen de  $z$  y no de la ley según la cual  $\Delta z$  tiende a cero. Por tanto: *Toda función holomorfa en un recinto simplemente conexo admite en su dominio de holomorfía infinitas derivadas holomorfas expresables mediante la fórmula [6].* El teorema es generalizable a dominios múltiplemente conexos con la modificación resultante en la expresión de las derivadas, de acuerdo con la modificación del teorema de Cauchy expuesta en el § 2.

La existencia de la primera derivada, es decir, la holomorfía de la función implica, pues, la existencia de las infinitas derivadas siguientes, a diferencia de lo que ocurre en el campo real en el que una función puede admitir primera derivada y no admitir derivadas de orden superior. Ello no debe causar extrañeza puesto que ya advertimos que la existencia de la derivada en el campo complejo es una condición mucho más exigente que en el campo real.

NOTA.—Para establecer la integral de Cauchy hemos partido de la existencia de una función  $f(z)$  holomorfa en un recinto al que pertenece el contorno de integración. Pero admitiendo simplemente la existencia y continuidad de una función  $f(t)$  sobre

dicho contorno, la integral  $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t-z} dt$  define una función de  $z$  para todo punto interior, función que es holomorfa y cuyas derivadas sucesivas vienen dadas por el cálculo que acabamos de efectuar, es decir por  $\frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt$ .

Dada, pues, una función continua sobre el contorno de un recinto simplemente conexo, la integral de Cauchy construye una función holomorfa en el interior del recinto. El teorema de Cauchy dice en el fondo, que toda función  $f(z)$  holomorfa en dicho recinto que coincide en el contorno con  $f(t)$  coincide con la integral en el interior, y, por tanto, establece la *unicidad de la función holomorfa definida por sus valores de contorno*. Más general aún, se demuestra (no lo hacemos por brevedad) que: *Dos funciones holomorfas que coinciden a lo largo de un arco de curva perteneciente a un recinto común de holomorfa, coinciden en todo él.*

**5. Teorema de Liouville.**—La expresión de la derivada que acabamos de obtener permite demostrar sencillísimamente un teorema fundamental de Liouville que prueba la *imposibilidad* de la existencia de una función (no constante) *holomorfa y acotada en todo el plano*.

En efecto, sea  $M$  la cota superior del módulo de  $f(z)$  en todo el plano y apliquemos la fórmula [5] a una circunferencia de centro en el punto  $z$  y radio  $r$  limitando el módulo de la integral. Se tendrá

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{|f(t)|}{r^2} dt \leq \frac{M}{2\pi} \frac{2\pi r}{r^2} = \frac{M}{r}$$

Como esta igualdad ha de verificarse cualquiera que sea  $r$ , resulta  $|f'(z)| <$  cualquier número positivo, es decir  $f'(z) = 0$ ,  $f(z) =$  constante.

*Toda función holomorfa y acotada en todo el plano se reduce a una constante.*

**6. Teorema fundamental del Algebra.**—Con lo anterior podemos demostrar muy sencillamente el teorema fundamental del Algebra. Todo polinomio  $E(z)$  es una función holomorfa cuyo módulo tiende a  $\infty$  al crecer  $|z|$ , lo que equivale a decir que puede hacerse  $|E(z)| > A$  (positivo) para  $|z| > R$ , es decir en el exterior de un círculo de radio  $R$ , en el cual  $E(z)$  no se anulará y se verificará además

$$\frac{1}{|E(z)|} < \frac{1}{A}$$

Si  $E(z)$  tampoco se anulara en el círculo, sería en definitiva  $\frac{1}{E(z)}$  una función holomorfa y acotada en todo el plano, lo que es imposible por no ser constante. En resumen:

*Todo polinomio  $E(z)$  se anula para algún valor finito de  $z$ .*

V. ejercicios al final de la lección siguiente.

## LECCIÓN 39.—FUNCIONES ANALÍTICAS. SERIES DE TAYLOR Y DE LAURENT

**1. Series numéricas de términos complejos.**— Como en el campo real, una serie  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$  de términos complejos se llama *convergente* cuando existe el límite  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ , límite que se llama *suma*  $S$  de la serie. De otro modo: Cuando, dado  $\epsilon > 0$ , podemos hallar un entero  $\nu$  tal que para todo  $n > \nu$  es  $|R_n| = |S - S_n| < \epsilon$ .

Recordemos, ante todo, el siguiente teorema:

**TEOREMA DE DIRICHLET:** *Si la serie de módulos*

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots$$

*es convergente, también lo es la*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

*pudiendo alterarse el orden de sus términos arbitrariamente.*

De otro modo: *Si una serie es absolutamente convergente, es convergente y admite la propiedad conmutativa.*

No nos detenemos en la demostración, que suponemos conocida del lector por los cursos elementales de Análisis.

**2. Series funcionales. Convergencia uniforme.**— Consideremos ahora una serie cuyos términos sean funciones de la variable compleja  $z$

$$u_1(z) + u_2(z) + u_3(z) + \dots + u_n(z) + \dots$$

En cada punto  $z$  que la haga convergente tenemos un valor suma  $f(z)$ . El conjunto de puntos  $z$  que la hacen convergente se llama *campo de convergencia* de la serie. Una serie convergente define, pues, una función en el campo de convergencia.

Para *cada* punto del campo podemos, dado  $\epsilon$ , hallar un cierto número  $\nu$  tal que para todo  $n > \nu$  sea el resto de la serie  $|f(z) - S_n(z)| = |R_n(z)| < \epsilon$ .

El valor de  $\nu$  depende, en general, de  $\epsilon$  y de  $z$ . Si, dado  $\epsilon$ , podemos hallar *un sólo valor*  $\nu$  que valga para *todos* los puntos  $z$  del campo, diremos que la convergencia es *uniforme* en dicho campo.

**CRITERIO DE WEIERSTRASS.**— *Si dada la serie funcional  $\Sigma u_n(z)$  es posible formar otra serie numérica convergente de términos positivos  $\Sigma a_n$  mayorante de la dada, es decir, tal que a partir de un cierto término se verifique  $|u_n(z)| < a_n$  en un cierto campo, la serie dada  $\Sigma u_n(z)$  es uniformemente convergente en dicho campo.*

En efecto, basta ver que lo será la serie de sus módulos (tomo I, lec. 11, § 6).

### 3. Propiedades de la convergencia uniforme.

I. Una serie uniformemente convergente de funciones continuas define una función continua en el campo de convergencia. La demostración es idéntica a la dada en el tomo I, lec. 11, § 4 para las series funcionales de variable real y huelga repetirla.

II. La integral de la función  $f(z)$  definida por una serie de funciones continuas holomorfas uniformemente convergente en un cierto recinto, extendida a lo largo de una curva interior al campo de convergencia, es igual a la serie de las integrales de cada uno de los terminos tomadas sobre la misma curva.

En efecto, integrando los dos miembros de la igualdad

$$f(z) = S_n(z) + R_n(z)$$

sobre la curva, resulta 
$$\int_C f(z) dz = \int_C S_n(z) dz + \int_C R_n(z) dz$$

Pero, dado  $\varepsilon$  es posible hallar  $\nu$  tal que para  $n > \nu$ , sea  $|R_n(z)| < \varepsilon$  en todo el camino de integración y, por tanto  $\left| \int_C R_n(z) dz \right| < \varepsilon l$  ( $l$  longitud de  $C$ ), luego

$$\int_C f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C S_n(z) dz = \int_C u_1(z) dz + \int_C u_2(z) dz + \dots + \int_C u_n(z) dz + \dots \quad [1]$$

Obsérvese que en rigor basta la convergencia uniforme de la serie en el camino de integración. Por tanto, si  $\varphi(z)$  es una función acotada a lo largo de dicho camino también se verificará

$$\int_C f(z) \varphi(z) dz = \int_C u_1 \varphi dz + \int_C u_2 \varphi dz + \dots + \int_C u_n \varphi dz + \dots \quad [2]$$

pues si  $M$  es la cota superior de  $|\varphi|$  el resto  $\rho_n$  de la serie  $\Sigma u_n \varphi$  verificará

$$|\rho_n| < M |R_n|$$

que podrá acotarse, como  $R_n$ , con independencia del valor de  $z$  en el camino.

III. Si una serie de funciones holomorfas converge uniformemente en un recinto, define una función holomorfa en él.

Pues aplicando el teorema anterior a un contorno cerrado cualquiera del recinto resulta

$$\int_C f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C S_n(z) dz = \lim 0 = 0$$

y, por el teorema de Morera,  $f(z)$  resulta holomorfa.

IV. Si, dada la serie convergente de funciones holomorfas  $u_1(z) + u_2(z) + \dots = f(z)$ , la serie de derivadas converge uniformemente hacia  $\varphi(z)$  en un recinto

$$u'_1(z) + u'_2(z) + \dots = \varphi(z) \quad [3]$$

se verifica  $\varphi(z) = f'(z)$  en todo este recinto.

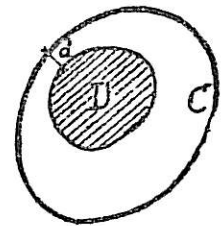
En efecto, integrando [3] resulta

$$\int_{z_0}^z \varphi(z) dz = [u_1(z) - u_1(z_0)] + [u_2(z) - u_2(z_0)] + \dots = \lim [u_1(z) + u_2(z) + \dots + u_n(z)] - \lim [u_1(z_0) + u_2(z_0) + \dots + u_n(z_0)] = f(z) - f(z_0)$$

y derivando

$$\varphi(z) = f'(z).$$

Este teorema supedita la validez de la derivación término a término a la comprobación *a posteriori* de la convergencia *uniforme* de la serie derivada. El siguiente permite asegurar *a priori* la convergencia uniforme de una serie y de todas sus derivadas y por tanto la licitud de la derivación, en todo dominio  $D$  interior a un recinto, comprobando la convergencia uniforme de la serie a lo largo del contorno  $C$ .



V. TEOREMA DE WEIERSTRASS.—Si una serie  $\sum u_n(z)$  de funciones holomorfas en un recinto es uniformemente convergente sobre el contorno  $C$ , es uniformemente convergente en todo conjunto de puntos interior a distancia ( $d$ ) de  $C$  no nula, y lo mismo ocurre con las series obtenidas derivando término a término.

En efecto, en virtud de I, la serie define en  $C$  una función continua

$$\sum_1^{\infty} u_n(t) = f(t) \quad [4]$$

y aplicando término a término la integral de Cauchy, según lo dicho en II,

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{u_n(t) dt}{t-z} = \sum_1^{\infty} u_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) dt}{t-z}$$

La serie es, pues, convergente en todo punto  $z$  interior a  $C$  y es igual a la función holomorfa definida por la integral de Cauchy, aplicada a la suma  $f(t)$  de la serie sobre el contorno. (V. lec. anterior, § 4, nota.)

Por otra parte, el resto será igualmente

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{R_n(t) dt}{t-z}$$

y como para toda  $z$  del conjunto  $|t-z| \geq d$  y puede hacerse  $|R_n(t)| < \epsilon$  para  $n > \nu$  será, asimismo,

$$|R_n(z)| < \frac{\epsilon l}{2\pi d} \text{ para } n > \nu \quad (l \text{ longitud de } C)$$



lo que prueba la convergencia uniforme de  $\sum u_n(z)$ . Y lo mismo se prueba la convergencia de las series derivadas, integrando (4) término a término, después de multiplicar por  $p! / \pi (t-z)^{p+1}$ . Resulta

$$\sum_1^{\infty} \frac{p!}{2\pi i} \int_C \frac{u_n(t)}{(t-z)^{p+1}} dt = \sum_1^{\infty} u_n^p(z) = \frac{p!}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{(t-z)^{p+1}} dt \quad \text{siendo } |R_n^p(z)| < \frac{\epsilon l p!}{2\pi d^{p+1}}$$

**4. Series potenciales. Su campo de convergencia.**—Las series funcionales de mayor interés en Análisis son las potenciales, es decir, de la forma

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots \quad [1]$$

En el tomo I, lec. 11, § 8, hemos demostrado que estas series pertenecen a una de estas tres categorías:

1.<sup>a</sup> La serie sólo converge para  $z=0$ . Ejemplo  $\sum n! z^n$ .

2.<sup>a</sup> La serie converge en todo el plano. Ejemplo  $\sum \frac{z^n}{n!} = e^z$

3.<sup>a</sup> La serie converge en el interior de un círculo llamado *círculo de convergencia* y no converge en el exterior. El radio de este círculo se llama asimismo *radio de convergencia* de la serie. Los puntos de la circunferencia de contorno puede ocurrir que pertenezcan por entero al campo de convergencia (Ejemplo:  $\sum \frac{z^n}{n^2}$  en  $|z|=1$ ), que queden todos excluidos de él ( $\sum z^n$  en  $|z|=1$ ) o que existan en la circunferencia puntos de una y otra clase ( $\sum \frac{z^n}{n}$  conv. en  $|z|=1$  excepto en  $z=1$ ).

Para la determinación del radio de convergencia puede seguirse la regla: Si existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|$  éste es el radio de convergencia.

En efecto, si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| = R$ , existirá el límite de la razón de un término al anterior en la serie de módulos  $|a_0| + |a_1 z| + |a_2 z^2| + \dots$ , límite que será

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} |z| = \frac{|z|}{R}$$

y la serie dada será convergente si  $\frac{|z|}{R} < 1$ , es decir, si  $|z| < R$  y divergente si  $\frac{|z|}{R} > 1$ , es decir, si  $|z| > R$ .

Por un simple cambio de origen (traslación) al punto  $z_0$  pasaremos de las series potenciales del tipo [1] a las del tipo

$$a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots + a_n(z-z_0)^n + \dots \quad [2]$$

cuyas propiedades son exactamente las mismas, cambiando el origen por el punto  $z_0$ .

**5. Holomorfía de las funciones definidas por series potenciales.—** Demostramos, asimismo, en el tomo I, lección citada que :

*Toda serie potencial es uniformemente convergente en todo dominio acotado interior al campo de convergencia de la serie.* En consecuencia, en virtud de la propiedad III, § 3, se tendrá, por ser  $z^n$  función holomorfa :

*Toda serie potencial del tipo [1] ó [2] define una función holomorfa en el interior del campo de convergencia.*

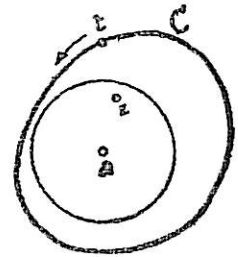
Este teorema es la base del método de Weierstrass, quien edificó toda la teoría de funciones partiendo del estudio de sus desarrollos en serie.

Toda función definida por una serie potencial convergente  $f(z) = \sum a_n(z-z_0)^n$  se denomina *función analítica*. El teorema anterior nos hace ver que *toda función analítica es holomorfa* en el interior del círculo o campo de convergencia. ¿Será cierto el recíproco? Es decir: Dada una función holomorfa, ¿podrá representarse, al menos en una parte de su recinto de holomorfía, por un desarrollo en serie potencial? Esta cuestión inversa nos la resuelve el desarrollo en serie de Taylor, que vamos a exponer.

**6. Desarrollo en serie de Taylor-Cauchy.—** La serie geométrica, en la que suponemos  $a$  y  $z$  fijos, y  $t$  variable :

$$\frac{1}{t-a} + \frac{z-a}{(t-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(t-a)^3} + \dots = \frac{1}{t-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{t-a}} = \frac{1}{t-z} \quad [3]$$

es uniformemente convergente en todo conjunto de puntos  $t$  ( $\neq a$ ) que haga  $\frac{|z-a|}{|t-a|} < \omega < 1$  puesto que admite la serie numérica *mayorante*  $\frac{1}{\min|t-a|} (1 + \omega + \omega^2 + \dots)$ . Tal ocurre a lo largo de una curva elemental cerrada  $C$  si  $z$  pertenece a un círculo de centro  $a$  interior a  $C$ . Si  $f(t)$  es continua en  $C$  será acotada a lo largo de ella y podemos aplicar los enunciados del § 3, II, multiplicando la igualdad [3] anterior por  $f(t) dt$  e integrando término a término a lo largo de  $C$



$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) dt}{t-a} + \frac{z-a}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) dt}{(t-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) dt}{(t-a)^3} + \dots \quad [4]$$

Ahora bien, si suponemos además  $f(t)$  holomorfa en el interior de  $C$  y recordamos la fórmula de Cauchy y la expresión de las derivadas (lección 38, §§ 2 y 4), al sustituirlas en [4] se obtiene la serie de Taylor-Cauchy

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!} (z-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n + \dots \quad [5]$$

que resuelve el problema del desarrollo en serie de  $f(z)$  en un entorno circular del punto  $a$  de radio igual a la distancia  $d$  de dicho punto a la curva  $C$  (\*).

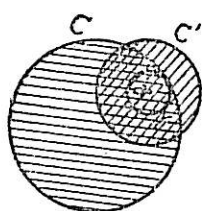
Obsérvese que esta curva puede ser arbitrariamente elegida dentro del recinto de holomorfía y por tanto sólo nos asegura la validez de la serie de Taylor dentro de un cierto círculo de centro  $a$  que no será en general el máximo. *El radio máximo de validez del desarrollo cuando existe es la distancia del punto  $a$  al punto singular más próximo*; lo que equivale a decir que *sobre la circunferencia de radio máximo existe necesariamente un punto singular*. En efecto, si todos los puntos de esta circunferencia fuesen de holomorfía, la función sería holomorfa en un entorno de cada uno de ellos y por tanto lo sería en un círculo mayor. Resumiendo:

*Dada una función holomorfa  $f(z)$  en un recinto y elegido en su interior un punto  $a$ , la función puede expresarse por el desarrollo [2] en el interior del círculo de centro  $a$  y radio igual a la distancia de  $a$  al punto singular más próximo. Es, por tanto, función analítica en dicho círculo.*

Ahora bien; la serie [2] puede ser quizá convergente más allá del círculo en cuestión; pero no podemos afirmar que represente la  $f(z)$  fuera de él. Para representarla fuera, habrá que elegir nuevos centros.

**7. Prolongación analítica. Analiticidad y holomorfía.**—Hemos engendrado funciones analíticas mediante series enteras, pero estas funciones así construídas sólo están definidas en el interior del círculo de convergencia. La serie de Taylor-Cauchy nos da un medio de *prolongar* la función más allá de este círculo, cuando sea posible.

En efecto, sea  $f(z)$  definida por una serie en el interior de un círculo  $C$ . Podemos ahora elegir otro punto  $a$  de este círculo distinto del centro y



formar la serie de Taylor relativa a dicho punto, serie que también representará  $f(z)$  en el interior de un círculo  $\gamma$  de centro  $a$  y radio  $d$ , distancia de  $a$  a  $C$ . Supongamos que el radio de convergencia de esta nueva serie es mayor que  $d$ . Tenemos así *dos series* representativas de *la misma función* en la zona común a ambos círculos por coincidir en  $\gamma$  (v. lec. 38, Nota § 4). Pues bien, diremos que en la zona no común del segundo círculo, la segunda serie es la *prolongación analítica* de  $f(z)$ . Podemos luego tomar nuevos puntos y formar así nuevas prolongaciones analíticas ampliando el campo. El recinto máximo así logrado se llamará *campo de existencia de la función*.

Este modo de proceder para definir funciones analíticas y sus campos

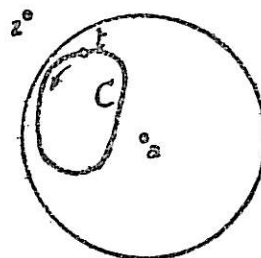
(\*) La demostración anterior asegura la validez del desarrollo en todo punto interior a todo círculo de radio  $< d$ , que es tanto como afirmar su validez en todo punto  $P$  interior al círculo de radio  $d$ , pues siempre se podrá rodear éste de una circunferencia de radio  $< d$ .

de existencia, es el típico de la teoría de Weierstrass antes citada. Una función analítica queda así definida por una serie de partida y todas sus prolongaciones analíticas. Y toda función holomorfa puede ser obtenida mediante prolongaciones analíticas de su desarrollo de Taylor en un punto cualquiera interior del campo en virtud de la conexión.

Como resumen de lo dicho se ve la coincidencia de las *funciones holomorfas* estudiadas por vía geométrica por Cauchy con las *funciones analíticas* estudiadas por vía aritmética por Weierstrass, y esto autoriza a usar indistintamente ambas denominaciones.

**8. Serie de Laurent. Aplicación a los puntos singulares.**—Análogamente a lo hecho en el § 6, la serie geométrica, en la que suponemos  $z, a$  fijos y  $t$  variable

$$\frac{1}{z-a} + \frac{t-a}{(z-a)^2} + \frac{(t-a)^2}{(z-a)^3} + \dots = \frac{1}{z-t}$$

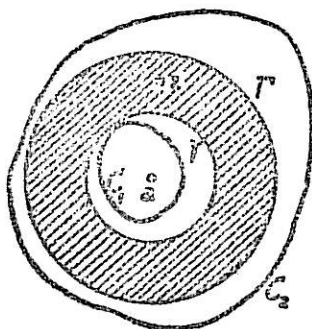


es uniformemente convergente en todo conjunto de puntos  $t$  en el cual  $\frac{|t-a|}{|z-a|} < \omega < 1$ . Tal ocurre a lo largo

de una curva elemental cerrada  $C$ , interior a un círculo de centro  $a$  para todo punto  $z$  exterior a él. Si  $f(t)$  es continua en  $C$  (y por tanto acotada) y holomorfa en el exterior de  $C$ , podemos multiplicar la igualdad anterior por  $f(t) dt$  e integrar término a término (§ 3, II) y resulta

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) dt}{z-t} = \frac{1}{2\pi i} \left\{ (z-a)^{-1} \int_C f(t) dt + (z-a)^{-2} \int_C f(t)(t-a) dt + (z-a)^{-3} \int_C f(t)(t-a)^2 dt + \dots \right\} \quad [6]$$

Sea, finalmente, una función  $f(t)$  holomorfa en un recinto doblemente conexo, al que supondremos perteneciente una corona circular limitada por las circunferencias  $\gamma$  y  $\Gamma$ . Todos los puntos de esta corona son interiores a  $\Gamma$  y exteriores a  $\gamma$ , y en todo punto  $z$  de ella podremos aplicar el teorema de Cauchy para los recintos doblemente conexos (lección, anterior, § 2 fórmula 3), y tomando indistintamente los contornos  $C_1, C_2$  o los  $\gamma$  y  $\Gamma$  resulta



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t) dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{z-t}$$

y sustituyendo ambos sumandos por sus desarrollos [4] y [6] queda finalmente el desarrollo llamado de Laurent

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n (z - a)^n + \sum_1^{\infty} b_n (z - a)^{-n} \quad [7]$$

cuyos coeficientes son

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(t) (t-a)^{n-1} dt \quad [9]$$

Naturalmente que aquí los coeficientes  $a_n$  ya no tienen la significación ligada a las derivadas que tenían en la serie de Taylor puesto que el recinto no es simplemente conexo. Este desarrollo se utiliza cuando la función  $f(z)$  presenta puntos singulares aislados en el dominio de holomorfía, y permite expresar  $f(z)$  en el entorno de cada punto singular aislado  $a$  (tomando arbitrariamente pequeño el radio de la circunferencia  $\gamma$  interior de la corona). La naturaleza del desarrollo de Laurent permite caracterizar la singularidad. Si los coeficientes  $b_n$  son nulos a partir de  $n > \nu$ , es decir si la parte de potencias descendentes del desarrollo consta de un número  $\nu$  finito de términos, el punto singular aislado  $a$  se llama *polo* de orden  $\nu$  lo que coincide con lo dicho en lecc. 35, § 5.

Si la parte descendente de dicho desarrollo tiene infinitos términos, se trata de un punto llamado *singular esencial*.

Si todas las  $b_n$  son nulas, el punto  $z=a$  no es singular y el desarrollo se reduce al de Taylor. En particular, si  $a_0=0$  el punto  $z=a$  es un *cero de primer orden* si  $a_1 \neq 0$  y, en general, *de orden  $n$*  si  $a_n$  es el primer coeficiente que no se anula.

**9. Otra expresión del residuo alrededor de un polo simple.**—Otra consecuencia que se desprende del desarrollo de Laurent es que el coeficiente  $b_1$  de la primera potencia negativa  $(z-a)^{-1}$  es el *residuo* de la función en  $a$ , puesto que de [9] resulta para  $n=1$

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(t) dt = \text{residuo de } f(t) \text{ en } a \quad [10]$$

Si  $a$  es un *polo simple* la parte descendente del desarrollo se reducirá a  $\frac{b_1}{z-a}$ . Entonces al multiplicar [7] por  $z-a$  y hacer tender  $z \rightarrow a$  resultará

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z)(z-a) = b_1 = \text{residuo de } f(z) \text{ en } a \quad [11]$$

Omitimos las demostraciones de la unicidad de los desarrollos en series



de Taylor y de Laurent en sus respectivos campos de convergencia, que el lector puede consultar en los tratados especiales (\*)

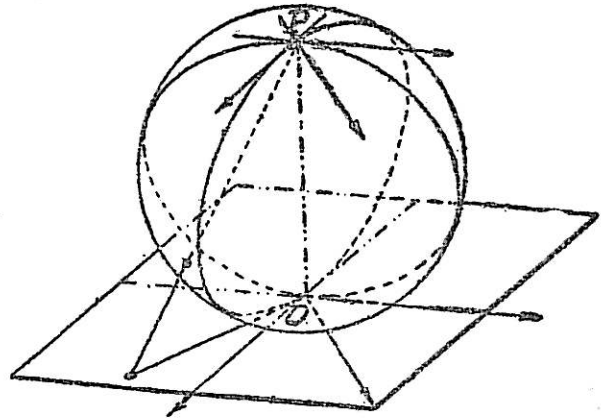
**10. Carácter del punto impropio. La esfera de Gauss.**—Haciendo en  $f(z)$  el cambio  $z=1/\zeta$  se obtiene  $F(\zeta)=f(1/\zeta)$  cuyo desarrollo de Laurent alrededor del origen  $\zeta=0$  será

$$F(\zeta) = a_0 + \sum_1^{\infty} b_n \zeta^n + \sum_1^{\infty} a_n \zeta^{-n}$$

y nos dirá si existe en él un polo, o una singularidad esencial, en cuyo caso diremos que  $f(z)$  tiene un polo o una singularidad esencial en el infinito  $z=\infty$ .

Así, por ejemplo, si  $a_n \neq 0$  hasta  $n=v$  y  $a_n=0$  para  $n > v$  diremos que  $f(z)$  tiene un polo de orden  $n$  en el infinito. Tal es el caso de los polinomios enteros  $P(z)$  cuyo grado indica el orden del polo en el infinito.

Y si  $a_n \neq 0$  para infinitos valores de  $n$  diremos que  $f(z)$  tiene en el infinito un punto singular esencial. Tal es el caso de las funciones llamadas trascendentes enteras desarrollables en serie potencial de la



forma  $f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\dots$  convergente en todo el plano (\*\*).

La consideración de la singularidad en el punto impropio cuanto existe, aclara con frecuencia la contextura de la superficie de Riemann de la función. De aquí que convenga mejor representar la variable independiente no sobre un plano de Gauss sino sobre una superficie esférica proyección estereográfica del plano, pues de esta suerte, conservándose el carácter conforme de las transformaciones, al infinito del plano le corresponde en la esfera un punto: el centro de proyección  $P$ .

Así, por ejemplo, la superficie de Riemann correspondiente a  $e^z$  habrá de imaginarse, pues, como una tela esférica arrollada en infinitas hojas alrededor del origen  $O$  y del punto  $P$ . (V lec. 35, § 7).

(\*) La de la serie de Taylor se reduce a derivar sucesivamente  $f(z)=a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\dots$  y hacer  $z=a$ , con lo que resulta  $f^{(n)}(a)=a_n n!$  que demuestra  $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$

(\*\*) Se caracteriza la singularidad esencial en  $a$  por el hecho de no existir  $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ , en contraposición con la singularidad polar cuando  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ , y de la singularidad evitable cuando existe límite finito.



## NOTA

**Aplicaciones.**—Las series en el campo complejo tienen interesantes aplicaciones en el campo real. Ya tuvimos ocasión de exponer alguna en el tomo I. Véase otra muy interesante:

Una función de *variable real* puede ser derivable una, dos, ..., infinitas veces; pueden tener éstas valores finitos; pueden aún formar una serie de Taylor convergente. Con todo esto, para asegurar la validez del desarrollo hemos de estudiar el término complementario y ver que tiende a cero (\*).

Para una función de *variable compleja*, basta asegurarnos de que es holomorfa para que podamos afirmar la validez del desarrollo en determinado círculo.

Podemos, pues, eludir el estudio del término complementario en las series de Taylor de variable real, pasando la función al campo complejo y viendo si en él se cumplen las condiciones de monogeneidad.

## EJERCICIOS

1. Calcular los residuos de  $i:(x^3+1)$  en cada uno de sus polos.
2. Desarrollar la función  $e^{\frac{z}{3}}$  en serie de Taylor alrededor del punto  $z=\pi i$ .
3. Id., id. la función  $1+e^z$ .
4. Obtener por división los primeros términos del desarrollo de Laurent de la función  $e^{\frac{z}{3}}:(1+e^z)$ .
5. Deducir de lo anterior el residuo de  $e^{\frac{z}{3}}:(1+e^z)$  en el punto  $\pi i$ , y por tanto, el valor de la integral de dicha función a lo largo de todo rectángulo de lados  $y=0$ ,  $y=2\pi$ ,  $x=\pm A$ .
6. Probar que la parte de dicha integral correspondiente a los lados verticales  $x=\pm A$  tiende a cero al tender  $A \rightarrow \infty$ .
7. Probar que la suma de las integrales sobre los otros dos lados es el producto de  $1-e^{\frac{2}{3}\pi i}$  por la integral sobre el eje  $x$ .
8. Comparando los resultados de los ejercicios 5, 6 y 7 deducir el valor de la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{x}{3}} dx}{1+e^x} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

9. Desarrollar en serie de Laurent alrededor del centro  $O$  la función  $(\cos z):z^2$  y deducir el valor del residuo en el origen.
10. Id., id. para la función  $e^z:z^3$ .
11. Calcular el residuo en el punto  $i$  de la función  $e^{imz}:(1+z)^2$ . [Desarrollando  $e^{imz}=e^{-m}e^{im(z-1)}$  en potencias de  $z-1$  y multiplicando por las dos fracciones simples en que se descompone  $1:(1+z^2)$ , la de denominador  $z+i$  da un producto holomorfo en el entorno  $z=i$ , mientras la de denominador  $z-i$  tiene como numerador  $1:2i$  y da como residuo  $\pi e^{-m}$ .]
12. Tomando por base el resultado del ejercicio anterior demostrar que

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \pi e^{-m}$$

(Intégrese  $e^{imz}:(1+z^2)$  a lo largo del contorno del semicírculo de centro en el origen y radio  $A \rightarrow \infty$  situado en el semiplano  $y \geq 0$ , y demuéstrese que la integral sobre la semicircunferencia tiende a cero.)

(\*) Por ej., la función  $e^{-\frac{1}{z}}$  desarrollada en serie de Taylor en el punto cero da  $\sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n$ , desarrollo que, de ser válido, daría valor nulo a la función en todo un entorno.

## LECCIÓN 40.—FUNCIONES MEROMORFAS. FUNCIONES ELÍPTICAS

Establecidos, en las lecciones que preceden, los teoremas generales fundamentales de la teoría de funciones de variable compleja, y en la imposibilidad de proceder aquí a un estudio detenido de propiedades específicas de funciones particulares, nos limitaremos a exponer brevemente algunas propiedades de una clase bastante general de funciones llamadas *meromorfas* y, en particular, de las funciones *elípticas*, por el interés que tales funciones tienen en la técnica.

1. **Funciones meromorfas.**—En la lección anterior hemos caracterizado algunas singularidades mediante el desarrollo de Laurent. En el campo complejo tiene tal interés el estudio de las singularidades, que en ellas han fundado los analistas la clasificación de las funciones. Una función sin singularidad propia ni impropia y, por tanto, holomorfa en el plano y acotada es, según el teorema de Liouville, una constante. Excluido este caso sin interés, atenderemos en primer lugar a la existencia o no de singularidades a distancia finita.

Las funciones sin singularidades propias, es decir, cuya única singularidad se halla en el infinito, se llaman *enteras*. Tales, por ejemplo, los *polinomios*, en los que este punto es un polo de orden igual al grado del polinomio. Tales también las *trascendentes enteras* desarrollables en series  $a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$  convergentes en todo el plano, y en las que el punto impropio es singular esencial (v. lección anterior, § 8). No es, en cambio, entera la función  $\sqrt{z(z-a)}$  por tener un punto de ramificación en  $z=0$  y en  $z=a$  (así como en el infinito).

Se llaman *meromorfas* las funciones cuyas únicas singularidades a distancia finita son *polos*. En particular son meromorfas las *funciones racionales* que, como es sabido, pueden expresarse como cociente de dos polinomios, y también ser desarrolladas en fracciones simples de la forma

$$\frac{f(z)}{F(z)} = E(z) + \sum_{i=1}^{\nu} P_i \left( \frac{1}{z-a_i} \right) \quad [1]$$

donde  $\nu$  es el número de raíces de  $F(z)$  distintas, indicando con  $f(z)$ ,  $F(z)$  y  $E(z)$  polinomios enteros de  $z$  mientras las  $P_i$  designan ciertos polinomios de la variable  $\frac{1}{z-a_i}$  cuyos coeficientes se calculan como indicamos en el tomo I, lección 7.<sup>a</sup>. Los polos de esta función son las raíces  $a_i$  de  $F(z)$

(supuesta irreducible la fracción  $f/F$ ). En particular, en el caso de raíces simples se tiene

$$\frac{f(z)}{F(z)} = E(z) + \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{z-a_i} \quad \text{donde} \quad A_i = \frac{f(a_i)}{F'(a_i)} \quad [2]$$

Pero existen también funciones meromorfas *con infinitos polos*, tales como  $1/\operatorname{sen} z$ ,  $\operatorname{tg} z$ ,  $\operatorname{Th} z$ , etc. En general, todo cociente de funciones *enteras* será una función meromorfa que tendrá por polos los ceros del denominador que no lo sean asimismo del numerador.

Se observa que una función meromorfa no puede tener infinitos polos en un dominio acotado, puesto que en tal caso tendrían éstos, al menos, un punto de acumulación (\*), el cual será un punto singular *no aislado* de la función, en contra de la definición de función meromorfa. En consecuencia podremos ordenar los polos según el crecimiento de sus módulos, es decir, constituirán una infinidad *numerable* de puntos  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  tal que  $|a_1| < |a_2| < |a_3| < \dots < |a_n| < \dots$  siendo los módulos  $|a_n|$  mayores que un número positivo prefijado a partir de  $n > v$ .

## 2. Relación entre el número de ceros y el de polos en un recinto.—

Si  $f(z)$  es meromorfa, la función  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  es asimismo meromorfa y sus polos son los polos y los ceros del denominador, pero con la particularidad de ser sólo *simples*.

En efecto,

Si  $a$  es un cero de orden  $n$

$$f(z) = (z-a)^n \varphi(z)$$

Si  $a$  es un polo de orden  $v$

$$f(z)(z-a)^v = \psi(z)$$

Siendo  $\varphi$  (ó,  $\psi$ ) una función holomorfa no nula en el entorno de  $a$  ( $\alpha$ ) que para  $z=a$ , ( $z=\alpha$ ) toma el valor del coeficiente de  $(z-a)^n$  (o de  $(z-a)^{-n}$ ) en el desarrollo de Laurent, y por tanto  $\varphi(a) \neq 0$ ,  $\psi(a) \neq 0$ .

Tomando logaritmos de ambos miembros y derivando

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-a} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \quad \frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{v}{z-a} = \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$$

siendo  $\varphi'/\varphi$  (o bien  $\psi'/\psi$ ) holomorfa en el entorno considerado. Integrando alrededor de dicho entorno resulta:

(\*) Basta dividir el cuadrado que los contiene en otros cuatro. En uno al menos habrá infinitos polos. Dividiendo a su vez éste en otros cuatro y repitiendo el razonamiento indefinidamente, llegaremos a establecer una sucesión de cuadrados, cada uno de ellos interior al precedente. El límite del centro define el punto de acumulación, pues que en todo entorno de él habrá infinitos polos; luego también dicho punto es singular.

El residuo de  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  llamado residuo logarítmico de la función meromorfa  $f(z)$ , en un  $\left\{ \begin{matrix} \text{cero} \\ \text{polo} \end{matrix} \right\}$  de orden  $\left\{ \begin{matrix} n \\ \nu \end{matrix} \right\}$  de  $f(z)$  es  $\left\{ \begin{matrix} n \\ -\nu \end{matrix} \right\}$ .

Por tanto, aplicando el teorema de Cauchy, en un recinto simplemente conexo que contenga  $N$  ceros y  $P$  polos de la función meromorfa  $f(z)$ , contado cada uno tantas veces como indica su orden, será

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P \quad [3]$$

La integral del primer miembro se supone extendida sobre el contorno del recinto y tiene una interpretación geométrica sencilla, pues basta recordar que la primitiva de  $f'(z)/f(z)$  es  $\log f(z) = \log |f(z)| + i \operatorname{Arg} f(z)$  (lección 35, § 7) para ver que, al cerrar  $C$ , se incrementa la integral en el producto de  $i$  por el incremento de  $\operatorname{Arg} f(z)$ , es decir, por el número de vueltas que ha dado el punto imagen  $w=f(z)$  en su plano, alrededor del origen.

Aplicando el teorema a un polinomio entero  $f(z)$  resulta:

El número de raíces de un polinomio entero  $f(z)$  interiores a un recinto simplemente conexo es igual al número de vueltas que da el punto transformado  $w=f(z)$  alrededor del origen al recorrer  $z$  el contorno. Tomando un contorno circular suficientemente grande, en su exterior no pueden existir raíces, mientras el número de vueltas de  $w=f(z)$  es  $n$ , con lo que obtenemos nuevamente el teorema fundamental del Algebra (\*).

**3. Desarrollo de una función meromorfa en fracciones simples.**— Sean  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  los infinitos polos de una cierta función meromorfa ordenados según sus módulos crecientes. Por generalización de lo que ocurre en las funciones racionales, la intuición haría esperar la posibilidad de un desarrollo análogo a [1] sustituyendo el signo de suma por el de serie. Pero ello equivale a postular a priori la existencia de tal límite. La generalización es sencilla, pero no tanto; es preciso modificar ligeramente los polinomios  $P_i$  agregándoles ciertos sumandos (constantes o polinomios enteros) que aseguren la convergencia de la serie obtenida. Nos limitaremos a demostrar el desarrollo en el caso más sencillo en que los polos  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  sean todos *simples* y la función cumpla otra condición que en seguida especificamos.

Puesto que los polos no se acumulan podemos dividir el plano en infinitas coronas concéntricas, conteniendo cada una de ellas un solo polo o los polos de igual módulo mediante circunferencias  $C_m$  cuyo radio  $R_m \rightarrow \infty$

(\*) En efecto, de  $f(z) = z^n(a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n})$  resulta  $\operatorname{Arg} f(z) = \operatorname{Arg} z^n + \operatorname{Arg}(a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n})$  y eligiendo  $|z|$  suficientemente grande se puede conseguir que el paréntesis represente un punto que diste del origen menos que  $|a_0|$  y, por tanto, que no le rodee.

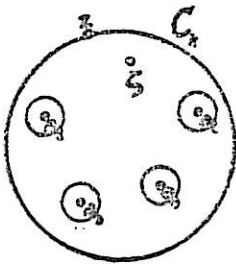
Pues bien, supondremos además que se puedan elegir estas circunferencias de tal modo que a lo largo de cada una de ellas  $f(z)$  sea acotada,  $f(z) < M_m$ , y además acotada en su conjunto, es decir  $M_m < L$ .

El desarrollo puede escribirse entonces en esta forma:

$$f(z) = f(a) + \sum_1^{\infty} b_n \left( \frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n-a} \right) \quad [4]$$

en donde  $b_n$  es el residuo de  $f(z)$  en el punto de  $a_n$ , y  $a$  es un punto no singular cualquiera.

Sea, en efecto,  $\zeta$  un punto cualquiera del plano, distinto de los polos. Existirán infinitas circunferencias  $C_k$  rodeando a dicho punto. Integrando sobre una cualquiera de ellas la función  $\frac{f(z)}{z-\zeta}$  que tiene los polos  $a_1, a_2, \dots, a_m$  interiores a  $C_k$  y además el polo  $\zeta$ , se tendrá, por el teorema de los residuos (designando con  $c_i$  contornos circulares infinitesimos rodeando  $a_i$ ).



$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{f(z) dz}{z-\zeta} &= f(\zeta) + \sum_{i=1}^{i=m} \frac{1}{2\pi i} \int_{c_i} \frac{f(z) dz}{z-\zeta} \\ &= f(\zeta) + \sum_{i=1}^m \frac{b_i}{a_i-\zeta} \quad (*) \end{aligned}$$

Análogamente, si  $a$  es un punto (fijo) distinto de  $a_i$ ,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{f(z) dz}{z-a} = f(a) + \sum_{i=1}^m \frac{b_i}{a_i-a}$$

Al restar, la diferencia de los primeros miembros es  $\frac{\zeta-a}{2\pi i} \int \frac{f(z) dz}{(z-\zeta)(z-a)}$

El módulo del denominador es un infinito de segundo orden al aplicar la integral a las sucesivas circunferencias  $C_k$  mientras el camino de integración es un infinito de primer orden; por tanto al tender  $k \rightarrow \infty$  y por tanto  $m \rightarrow \infty$  esta integral tiende a cero (lec. 37, § 4) y quedará

$$f(\zeta) = f(a) + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \left[ \frac{1}{a_i-a} + \frac{1}{\zeta-a_i} \right] \quad [5]$$

como queríamos demostrar.

(\*) En efecto, al sustituir  $z-\zeta$  por  $a_i-\zeta$  se comete un error

$$\int_{c_i} \frac{f(z) dz}{a_i-\zeta} - \int_{c_i} \frac{f(z) dz}{z-\zeta} = \int_{c_i} \frac{(z-a_i)f(z) dz}{(a_i-\zeta)(z-\zeta)}$$

Al tender el radio de  $c_i \rightarrow 0$  tenderá  $z \rightarrow a_i$ ; el denominador de esta integral no se anula; el numerador permanece finito por definición de polo simple, y la longitud del camino se hace infinitesimo, con lo que el módulo de la integral tiende a cero (Lec. 37, § 4).



En particular, si el origen es un punto en que la función es regular

$$f(\zeta) = f(0) + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \left[ \frac{1}{\zeta - a_i} + \frac{1}{a_i} \right] \quad [6]$$

Si  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$  es el cociente de dos funciones enteras los residuos  $b_i$  pueden calcularse de modo parecido al caso en que  $\varphi$  y  $\psi$  son polinomios; en efecto  $a_i$  son polos simples de  $\psi$ , de modo que  $\psi(z) = (z - a_i)\psi_1(z)$  con  $\psi_1(a_i) \neq 0$  de donde

$$\psi'(z) = \psi_1'(z)(z - a_i) + \psi_1(z) \quad \text{y para } z = a_i \quad \psi'(a_i) = \psi_1(a_i)$$

con lo que (lecc. 39, § 9)

$$b_i = \lim_{z \rightarrow a_i} (z - a_i) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \rightarrow a_i} \frac{\varphi(z)}{\psi_1(z)} = \frac{\varphi(a_i)}{\psi_1'(a_i)} \quad [8]$$

EJEMPLO. La función  $\cot z$  tiene los polos  $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$

Las circunferencias de módulos intermedios cumplen las condiciones del enunciado.

Partiendo del punto  $a = \frac{\pi}{2}$ , en que  $\cot \frac{\pi}{2} = 0$ , resulta

$$\cot z = 0 + \frac{1}{z} - \frac{2}{\pi} + \sum_{n=\pm 1}^{n=\pm\infty} b_n \left( \frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi - \frac{\pi}{2}} \right) \quad \text{siendo} \quad b_n = \frac{\cos(a_n)}{\cos'(a_n)} = 1$$

Pero, sumando aparte los segundos términos se obtiene  $\frac{2}{\pi} \sum_{\pm 1}^{\pm\infty} \frac{1}{2n-1} = \frac{2}{\pi}$ , con lo que

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_1^{\infty} \left( \frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right)$$

Cuando los polos son de orden  $>1$ , los desarrollos se complican algo y pueden estudiarse en los tratados. Omitimos, asimismo el teorema de Mittag-Leffler, de más interés teórico que práctico (\*) y pasamos a estudiar una clase particular de funciones meromorfas, ya tratadas en el campo real.

Nos referimos a las funciones definidas por integrales elípticas y, especialmente, a sus inversas, cuya importancia en la técnica ya se puso de manifiesto en el tomo I y que en el campo complejo acusan su carácter esencial: la doble periodicidad.

**4. Integrales de funciones multiformes.**—Insistamos antes acerca de los valores que toman las integrales de funciones no uniformes a lo largo de caminos trazados alrededor de los puntos de ramificación de su plano de Riemann. Ya vimos en la lección 37, § 3 que al rodear el camino uno de tales puntos, la integral no se anula, debido a que dicho camino pasa de

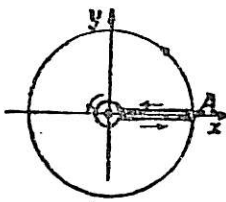
(\*) V. en las obras especiales, por ej., K. Knopp, «Teoría de funciones»



una hoja a otra y no queda, en rigor, cerrado. Así se obtuvo alrededor de una circunferencia de radio 1 rodeando el origen en sentido negativo a partir del punto  $-1$ ,  $\int \sqrt{z} dz = + \frac{4i}{3}$ . Veamos nuevos ejemplos: €

EJEMPLO 1.º La integral  $\int \frac{dz}{\sqrt{z}}$  tomada en sentido positivo a lo largo de una circunferencia de radio  $r$  con centro en el origen, a partir del punto  $A(r, 0)$  vale (por ser  $z = re^{i\theta}$ )

$$ir^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} e^{\frac{1}{2}i\theta} d\theta = 2r^{\frac{1}{2}} \left[ e^{\frac{1}{2}i\theta} \right]_0^{2\pi} = 2r^{\frac{1}{2}} \left[ \cos \frac{\theta}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = -4r^{\frac{1}{2}}$$



resultando que concuerda con el que se obtendría partiendo del punto  $A(r, 0)$  siguiendo el eje  $x$  hasta la proximidad del origen, rodeando éste con un radio  $\varepsilon \rightarrow 0$  y volviendo nuevamente al punto  $A$ .

En efecto, a lo largo de la nueva circunferencia, la integral valdrá ahora  $-4\varepsilon^{\frac{1}{2}}$  que  $\rightarrow 0$ , y quedará (por aumentar en  $\pi$  el arg  $\sqrt{z}$ , al dar la vuelta, lo que equivale a un cambio de signo)

$$\int_r^0 \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_0^r \frac{dx}{-\sqrt{x}} = 2 \int_r^0 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[ 4x^{\frac{1}{2}} \right]_r^0 = -4r^{\frac{1}{2}}$$

Pero una nueva vuelta incrementará la integral en

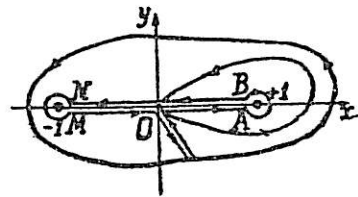
$$2r^{\frac{1}{2}} \left[ \cos \frac{\theta}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right]_{2\pi}^{4\pi} = 4r^{\frac{1}{2}}$$

con lo que la integral se anula después de dos vueltas y en general después de un número par de vueltas debido al hecho de volver a la misma hoja del plano de Riemann a cada par de vueltas.

EJEMPLO 2.º La integral  $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z}}$  tomada en sentido positivo a lo largo de una circunferencia de radio  $\varepsilon$  alrededor del punto singular  $z=1$  será análogamente  $4\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ , como resulta de lo anterior mediante el cambio  $1-z=\zeta$ ,  $dz=-d\zeta$ , y se anulará análogamente a cada dos vueltas alrededor de dicho punto.

EJEMPLO 3.º La integral  $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z)(1+z)}}$  tomada en sentido positivo a lo largo de una circunferencia de radio infinitésimo  $\varepsilon$  alrededor del punto singular 1 se incrementará análogamente en el producto de  $2\varepsilon^{\frac{1}{2}}$  por el valor  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  que toma (salvo error infinitésimo) el otro factor  $\frac{1}{\sqrt{1+z}}$ .

a lo largo de dicho camino. Por tanto, a lo largo del lazo  $OABO$  indicado en la figura (suponiendo  $OA$  en la hoja del plano en que adoptamos la determinación positiva de  $\sqrt{1-z}$ ) valdrá al tender  $\epsilon \rightarrow 0$  (por cambiar de signo  $\sqrt{1-z}$  al rodear el punto, variando en  $\pi$  su argumento)



$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int_1^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [2 \operatorname{arcsen} x]_0^1 = \pi$$

Así, pues, al volver al origen después de rodear una sola vez el punto singular  $+1$  (y sólo él) en sentido positivo, la integral  $F(z) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$  se ha incrementado en  $\pi$  mientras *el integrando ha cambiado de signo*. Si volvemos a seguir el lazo, el radical vuelve a tomar los mismos valores cambiados de signo y, por tanto, después de dos vueltas la integral se anula.

Análogamente, al seguir el lazo  $OMNO$  ( $OM$  situado en la hoja en que se adopta la determinación positiva del radical) se incrementará en

$$\int_0^{-1} - \int_{-1}^0 = 2 [\operatorname{arc} \operatorname{sen} x]_0^{-1} = -\pi$$

Por tanto, si seguimos el lazo inverso  $ONMO$  después de haber recorrido el primero  $OABO$ , es decir después del cambio de signo del radical alrededor del primer punto, el camino  $OABNMO$  u otro equivalente que rodee ambos puntos, aumentará en  $2\pi$  la primitiva  $w = F(z)$  pasando  $z$  a una nueva hoja de su plano. He aquí cómo el plano complejo nos permite acusar la periodicidad de la función inversa  $z = \operatorname{sen} w$  definido el *arco sen z* mediante la integral estudiada.

**EJEMPLO 4.º** Asimismo definida la función  $lz$  mediante  $\int_1^z \frac{dz}{z}$  se obtiene el carácter periódico, de período  $2\pi i$ , de la función exponencial inversa  $e^z$ , por el hecho de ser  $2\pi i$  el valor de la integral a lo largo de todo lazo que rodea el origen.

**5. La integral elíptica de primera especie. Periodicidades de la snw.** Acabamos de ver cómo las singularidades del integrando de ciertas integrales permiten acusar las periodicidades de las funciones inversas de las primitivas. Vamos a hacer aplicación de la misma idea para descubrir las periodicidades de las funciones elípticas estudiadas en el tomo I, lec. 9.ª, es decir de las inversas de las integrales elípticas. Consideremos la integral elíptica de primera especie

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} \quad k^2 < 1$$

Los puntos singulares del integrando son ahora  $+1$ ,  $-1$ ,  $+1/k$ ,  $-1/k$ . Haciendo describir al camino de integración un lazo  $OABO$  alrededor del punto  $+1$  a partir del origen se obtiene, como en el ejemplo 3.º

$$2 \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} = 2K$$

habiendo designado por  $K$  la integral completa  $\int_0^1$  (v. tomo I).

Ahora bien, al volver al origen el radical ha cambiado de signo. Si se hace ahora describir al camino el lazo que rodea el punto  $-1$ , la integral se incrementa nuevamente  $2K$  volviendo a restituir el signo primitivo del radical.

Por tanto, la integral elíptica de primera especie

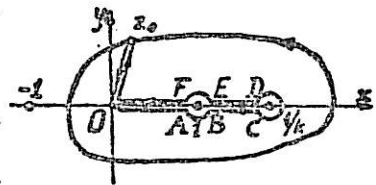
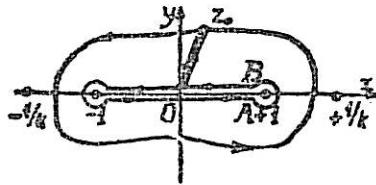
$$w = F(z) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}$$

es una función de  $z$  que se incrementa en  $4K$  cada vez que la integral recorre un camino que encierra en su interior los puntos singulares  $+1$  y  $-1$  y sólo ellos. (Basta deformar este camino hasta hacerle rodear el origen y los puntos singulares como indica la figura, con lo que al anularse las integrales de sentidos opuestos entre  $z_0$  y  $0$  y recaemos en el cálculo anterior). De donde resulta que la función inversa  $z = sn w$  es periódica de período  $4K$ , como ya quedó establecido en el tomo I. Lo que no pudimos establecer allí es la existencia de otro período, imaginario puro, por no haber definido el  $sn$  de argumento imaginario.

Para darnos cuenta de ello integremos alrededor del lazo  $OABCDEFO$ , indicado en la figura, que partiendo del origen con el valor  $+1$  del radical rodea los puntos singulares  $1$  y  $\frac{1}{k}$  con circunferencias de radio  $\epsilon$ . Las integrales a lo largo de ellas se anulan al tender  $\epsilon \rightarrow 0$ . Ahora bien, el argumento de  $\sqrt{(1-kz)}$  experimenta un cambio de signo alrededor de  $1/k$  incrementando en  $\pi$  su argumento) y otro cambio de signo experimenta el factor  $\sqrt{1-z}$  alrededor del punto  $+1$  entre  $A$  y  $F$  con lo que en el trozo  $FO$  el radical tiene el mismo signo que en el  $OA$ , anulándose ambas integrales por estar recorridas en sentidos contrarios. mientras la integral sobre  $BC$  queda duplicada por la  $DE$ .

Resulta, por tanto, como expresión de la integral en el lazo indicado

$$2 \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} = 2iK'$$



Siendo  $K' = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k'^2 y^2)}}$ , como se ve previo el cambio  $x = \frac{1}{k} \sqrt{1-k'^2 y^2}$  donde  $k'^2 = 1-k^2$ .

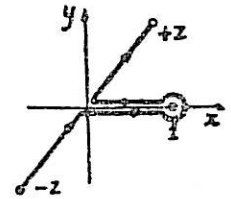
Así, pues, la integral elíptica de primera especie se incrementa en el valor constante  $2iK'$  cada vez que el camino de integración vuelve al punto de partida  $z$ , encerrando en su interior los puntos singulares  $+1$  y  $+1/k$  y sólo ellos (lo mismo ocurre con los  $-1$  y  $-1/k$ ).

En resumen, la función  $snw$  inversa de la integral elíptica de primera especie es una función *doblemente periódica* de períodos  $4K$  y  $2iK'$ , y podemos escribir

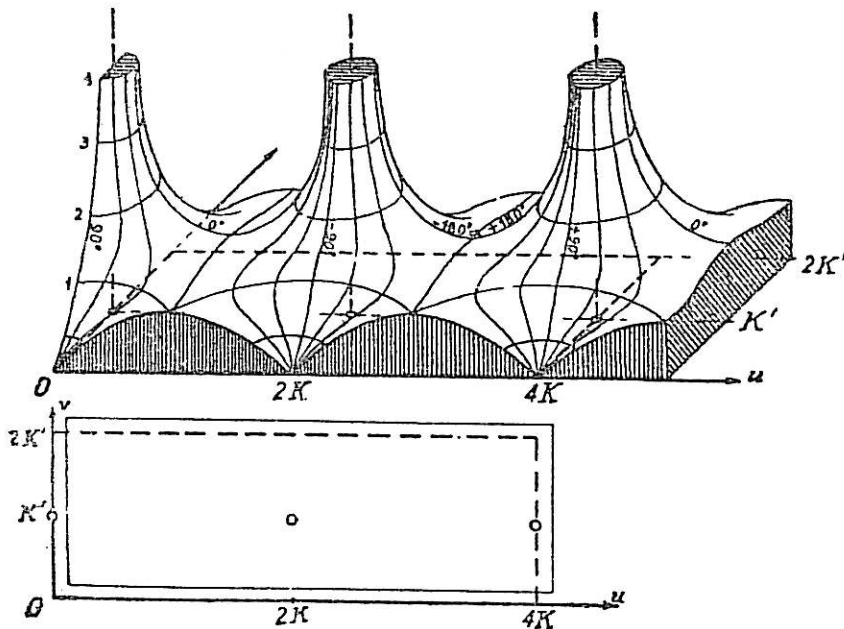
$$sn(w+4inK) = sn w \quad sn(w+2inK') = sn w \quad sn(w+4nK+2inK') = sn w$$

También se pueden deducir por este método otras propiedades de la función. Por ejemplo, su carácter *alternado*. En efecto, integrando a lo largo de un camino que pase de  $-z$  a  $+z$  envolviendo uno sólo de sus puntos singulares  $+1$  ó  $-1$  la integral se incrementa en  $2K$ , de donde

$$sn(w+2K) = -sn(w)$$



Por eso el  $|snw|$  tiene período  $2K$  como aparece en la representación axonométrica del  $snw$  indicada en la figura



axonométrica del  $snw$  indicada en la figura (v. lec. 35, § 8). En este gráfico se observa la doble periodicidad del  $|snw|$  de períodos  $2K$  y  $2iK'$ , que motiva la repetición del relieve en rectángulos de dimensiones  $2K$  y  $2K'$ ; mientras el carácter alternado se refleja en la graduación del argumento sobre las líneas de máxima pendiente dando  $4K$  como verdadero período real de  $snw$ .

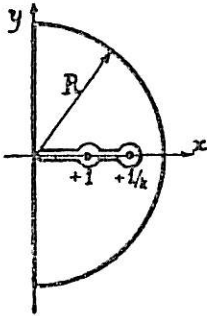
De lo anterior se comprueban sin dificultad las periodicidades de  $cnw$  ( $4K$  y  $2K'i$ ) y de  $dnw$  ( $2K$  y  $4K'i$ ).

**6. Polos del  $snw$ .**—En la figura se observa la presencia de polos en el punto  $w = K'i$  y en todos los que resultan de agregarle los períodos. Estos mismos polos son los de  $cnw$  y  $dnw$ .

La presencia de estos polos resulta del hecho de ser

$$K'i = \int_0^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}$$

correspondiendo, por tanto, el valor  $K'i$  de  $w$  al valor  $z = \infty$  del límite superior de la integral. Para obtener este resultado basta integrar a lo largo del contorno de un semicírculo de radio  $R \rightarrow \infty$  situado en el semiplano  $x > 0$ , es decir, conteniendo en su interior los puntos singulares  $+1$ ,  $+1/k$ . Esta integral vale  $2K'i$ , según hemos visto antes; pero a lo largo de la semicircunferencia el denominador del integrando es infinito de segundo orden en  $|z| = R$ , mientras el camino  $\pi R$  es un infinito de primer orden, con lo que el módulo de la integral tenderá a cero (Lec. 37, § 4) y quedará tan sólo la integral a lo largo del eje imaginario, es decir (por la paridad de la función subintegral)



$$2K'i = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{\quad}} = 2 \int_0^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{\quad}}$$

como se quería demostrar.

**7. Definición general de función elíptica. Propiedades.**— Las funciones elípticas definidas en el tomo I como inversas de las integrales elípticas, tienen, pues, en el plano complejo una propiedad común: *Son funciones doblemente periódicas* con dos polos en todo paralelogramo de períodos (v. figura). Llegamos con esto al carácter analítico esencial de las funciones llamadas *elípticas*, que se definen de un modo general como *funciones doblemente periódicas sin más singularidades que los polos*, o de otro modo. *Funciones elípticas son las funciones méromorfas doblemente periódicas.*

Si  $\omega$  y  $\omega'$  son los períodos (en general complejos) se tendrá

$$f(z \pm m\omega \pm n\omega') = f(z) \quad m, n \text{ enteros}$$

El paralelogramo cuyos lados son los vectores  $\omega$  y  $\omega'$  se llama *paralelogramo de períodos* y por traslación de él puede dividirse el plano en paralelogramo en los que  $f(z)$  tiene los mismos valores que en el paralelogramo fundamental.

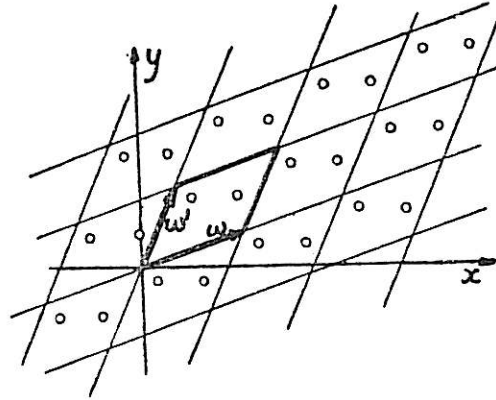
*La presencia de polos (o de otros puntos singulares) es consecuencia de la doble periodicidad.* Pues de no existir tales puntos singulares en el paralelogramo de períodos sería la función holomorfa y acotada en él y, por tanto, en todo el plano, con lo que se reduciría a una constante (Liouville).

El número de polos en cada paralelogramo, contando cada uno tan-

ras veces como indique su orden, se llama asimismo *orden* de la función elíptica.

De las propiedades de las funciones meromorfas antes estudiadas se desprende:

*La suma de los residuos en los polos de una función elíptica contenidos en un paralelogramo de períodos es nula.* En efecto, esta suma multiplicada por  $2\pi i$  será igual a la integral a lo largo del contorno del paralelogramo (o de este paralelogramo convenientemente trasladado si existieran polos en tal contorno), integral que es nula, puesto que la función tiene iguales sucesiones de valores en los lados opuestos y la integral los recorre en sentidos contrarios.



Ello exige que el número de polos en cada paralelogramo debe ser  $>1$ .

Por otra parte: El número de ceros en cada paralelogramo es igual al número de polos, pues la función  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  será igualmente doblemente periódica y meromorfa, es decir elíptica en el mismo paralelogramo y basta aplicar a su contorno el teorema del § 2.

El anterior teorema se puede enunciar diciendo que toda función elíptica toma el valor *cero* tantas veces como indica su orden, y lo mismo puede afirmarse de otro cualquier valor  $\alpha$ , puesto que la función  $f(z) - \alpha$  es elíptica del mismo orden. En resumen:

*Toda función elíptica de orden  $m$  toma todos los valores en el paralelogramo de períodos y cada uno de ellos  $m$  veces.*

**8. La función  $\zeta$  de Weierstrass.**—Una de las funciones elípticas más sencillas que cabe construir de períodos prefijados  $w$  y  $w'$  es la de  $\zeta(z)$  de Weierstrass, que tiene un polo de segundo orden en cada vértice del paralelogramo de períodos y tiene por desarrollo

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{z - \Omega} + \frac{1}{\Omega} + \frac{z}{\Omega^2} \right) \quad \text{con } \Omega = mw_1 + nw_2,$$

en cuya suma (doble)  $m$  y  $n$  varían desde  $+\infty$  a  $-\infty$ , con la excepción del sumando correspondiente a  $m=n=0$ .

Su derivada cambiada de signo es la llamada  $\wp(z)$  (*pe* de  $z$ ), también de Weierstrass

$$\wp(z) = -\zeta'(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{(z - \Omega)^2} - \frac{1}{\Omega^2} \right)$$



Designando  $\mathcal{P}\left(\frac{w_1}{2}\right) = e_1$      $\mathcal{P}\left(\frac{w_1 + w_2}{2}\right) = e_2$      $\mathcal{P}\left(\frac{w_2}{2}\right) = e_3$

se comprueba que  $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ , y se demuestra que

$$\mathcal{P}'(z)^2 = 4 [\mathcal{P}(z) - e_1][\mathcal{P}(z) - e_2][\mathcal{P}(z) - e_3] = 4 \mathcal{P}(z)^3 - g_2 \mathcal{P}(z) - g_3$$

donde  $g_2 = 60 \Sigma \frac{1}{Q^4}$      $g_3 = 140 \Sigma \frac{1}{Q^6}$     (La extensión de las sumas, como antes).

La  $\mathcal{P}(z) = w$  es, en efecto, la función inversa de la integral

$$z = \int_w^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{4\xi^3 - g_2\xi - g_3}} = \int_w^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{4(\xi - e_1)(\xi - e_2)(\xi - e_3)}}$$

Esta integral puede reducirse a una elíptica de primera especie mediante el cambio  $\xi = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{t^2}$  con  $k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$  que da

$$z = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \int_0^\tau \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}} \quad \text{siendo } w = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{t^2}$$

es decir

$$\tau = \operatorname{sn}(\sqrt{e_1 - e_3} z) \quad \text{siendo, por tanto, } \mathcal{P}(z) = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2(\sqrt{e_1 - e_3} z)}$$

que establece una relación racional entre las funciones  $\mathcal{P}(z)$  y  $\operatorname{sn}(\sqrt{e_1 - e_3} z)$ , transformándose los períodos de la  $\mathcal{P}$  en los de la  $\operatorname{sn}$  multiplicadas por  $\sqrt{e_1 - e_3}$ .

Las demostraciones detalladas de estas propiedades deben consultarse en los tratados especiales.

**9. La transformación de Schwarz-Christoffel.**—Por analogía con lo que ocurre en la transformación  $w = \sqrt{z}$  se ve en seguida que la  $w = z^{\frac{1}{m}}$  convierte el ángulo llano  $0 \leq \operatorname{Arg} z \leq \pi$  en el ángulo  $0 \leq \operatorname{Arg} w \leq \frac{\pi}{m}$ , conservándose los sentidos de recorrido del contorno; es decir, al recorrer  $z$  el eje  $x$  (borde del ángulo llano) de modo que quede el ángulo llano (semiplano  $y > 0$ ) a la izquierda, el contorno del ángulo homólogo queda recorrido dejando asimismo dicho ángulo a la izquierda.

Combinando la anterior transformación con un giro y traslaciones convenientes, podemos transformar el ángulo llano positivo de vértice en el punto  $x_1$  del eje real del plano  $z$ , en un ángulo cualquiera del plano  $w$ , de amplitud  $\alpha_1 = \frac{\pi}{m}$ , vértice  $w_1$  y lado origen prefijados. En efecto, tomando una constante  $a$  de argumento igual al del lado origen, bastará poner

$$w - w_0 = a(z - x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}} \quad \text{de donde} \quad \frac{dw}{dz} = \frac{a \alpha_1}{\pi} (z - x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} \quad [1]$$

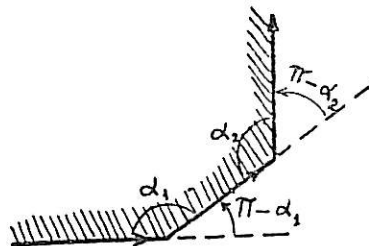
Transformación que conservará el sentido, puesto que el giro (de  $\operatorname{Arg} a$ ) y las traslaciones añadidas no lo alteran. A posteriori podemos darnos cuenta de ello observando la variación del  $\operatorname{Arg} w' = \operatorname{Arg} \frac{a \alpha_1}{\pi} + \left(\frac{\alpha_1}{\pi} - 1\right) \operatorname{Arg}(z - x_1)$  al recorrer  $z$  el eje  $x$  cruzando  $x_1$  de izquierda a derecha. El argumento de  $z - x_1$  disminuye en  $\pi$ , por tanto,  $\operatorname{Arg} w'$  aumenta en  $\pi - \alpha_1$ .

Generalizando. Sea  $w(z)$  una transformación cuya derivada venga dada por

$$\frac{dw}{dz} = A (z - x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (z - x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} \dots (z - x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1} \quad [2]$$

donde  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son puntos del eje  $x$  ordenados en sentido creciente. El argumento de esta derivada

$$\begin{aligned} \text{Arg } w' = & \text{Arg } A + \left(\frac{\alpha_1}{\pi} - 1\right) \text{Arg } (z - x_1) + \left(\frac{\alpha_2}{\pi} - 1\right) \text{Arg } (z - x_2) + \\ & + \dots + \left(\frac{\alpha_n}{\pi} - 1\right) \text{Arg } (z - x_n) \end{aligned}$$



consta de un sumando fijo  $\text{Arg } A$ ; los demás aumentan respectivamente en  $\pi - \alpha_1, \pi - \alpha_2, \dots$ , cuando el punto  $z$  recorre el eje  $x$  de izquierda a derecha cruzando  $x_1, x_2, \dots$ , y permanecen constantes entre cada dos puntos consecutivos. En el plano  $w$  el camino homólogo del eje  $x$  recorrido de izquierda a derecha está, pues, constituido por trazos rectilíneos orientados, cada uno de los cuales forma con la prolongación del anterior en magnitud y signo los ángulos  $\pi - \alpha_1, \pi - \alpha_2, \dots$ . Por tanto, dibujan un contorno poligonal de ángulos  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ . Por otra parte, la conservación del sentido indica que el recinto poligonal formado por la interferencia de estos ángulos dará la figura homóloga del semiplano  $y > 0$  del plano  $z$ .

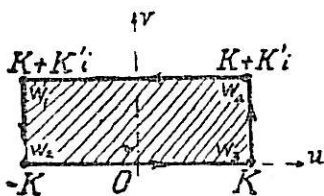
La integral de [2] dará, pues, una función  $w(z)$  capaz de transformar un semiplano en polígono. Se comprende la posibilidad de afectar las  $z$  de los paréntesis de coeficientes reales adecuados para modificar la longitud de los lados del polígono convenientemente. En una palabra, podemos definir funciones capaces de transformar el semiplano  $y > 0$  del plano  $z$  en polígonos previamente fijados del plano  $w$ . Debiendo tener un polígono tres vértices por lo menos, se comprende que las integrales que definen tales transformaciones son del tipo elíptico o hiperelíptico

La transformación definida por

$$\frac{dw}{dz} = (kz + 1)^{-\frac{1}{2}} (z + 1)^{-\frac{1}{2}} (z - 1)^{-\frac{1}{2}} (kz - 1)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{con } w=0 \text{ para } z=0$$

es la misma que define  $z = \text{sn } w$ , inversa de la integral elíptica de primera especie.

Comparando con la anterior resulta  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{\pi}{2}$ , y por tanto, el semiplano  $y > 0$  del plano  $z$  se convierte en un rectángulo. Los vértices  $w_1, w_2, w_3, w_4$  de este rectángulo serán los puntos homólogos de  $z_1 = -1/k, z_2 = -1, z_3 = +1, z_4 = 1/k$ , es decir, vendrán dados por



$$\begin{aligned} w_1 &= \int_0^{-\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} = \int_0^{-1} + \int_{-1}^{-\frac{1}{k}} = -K + K' i \\ w_2 &= \int_0^{-1} = -K & w_3 &= \int_0^1 = +K \\ w_4 &= \int_0^{\frac{1}{k}} = \int_0^1 + \int_1^{\frac{1}{k}} = K + K' i \end{aligned}$$

Comparando lo dicho en § 5 se ve que este rectángulo es la cuarta parte del rectángulo de períodos del  $\text{sn } w$ . Otra cuarta parte resulta como transformado del semiplano  $y < 0$ , y en las otras dos restantes se vuelven a repetir los valores de  $z$  de acuerdo con lo dicho en el § 7



## LECCIÓN 41. APLICACIONES A CAMPOS PLANOS. REPRESENTACIÓN CONFORME

En esta lección y en la siguiente nos limitaremos a dar una ligera idea de los dos tipos más importantes de aplicaciones de la teoría de funciones de variable compleja a la Física y a la Técnica: Las aplicaciones de la representación conforme a la teoría de campos laplacianos bidimensionales, como los que se presentan en teoría de flúidos, electrostática, elasticidad, etc., y las aplicaciones de la transformada de Laplace a problemas sobre redes, líneas eléctricas y similares.

**1. Funciones holomorfas y funciones armónicas.**—La aplicación de la teoría de funciones analíticas a la mecánica de flúidos, elasticidad y electrostática parte del hecho fundamental siguiente:

*Las componentes real  $u(x, y)$  e imaginaria  $v(x, y)$  de una función holomorfa de variable compleja  $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  son funciones armónicas de las componentes  $x, y$ ; de la variable  $z$ . Es decir, una y otra verifican la ecuación de Laplace  $\Delta u = 0, \Delta v = 0$ .*

En efecto, derivando las condiciones de monogeneidad

$$u_x = v_y \quad v_x = -u_y \quad [1]$$

resulta

$$u_{xx} = v_{yy} \quad v_{xx} = -u_{yy} \quad u_{xy} = v_{yx} \quad v_{xy} = -u_{yx}$$

y combinando las igualdades 1.<sup>a</sup> y 4.<sup>a</sup> asimismo 2.<sup>a</sup> y 3.<sup>a</sup>, se obtiene

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad [2]$$

como queríamos demostrar.

Ahora bien, recuérdese el papel fundamental que desempeña la ecuación de Laplace en la física matemática. Todo campo irrotacional conservativo (divergencia nula) viene dado por su potencial  $\Phi$ , el cual tiene que satisfacer la ecuación de Laplace (que expresa la anulación de la divergencia) y queda definido por dicha ecuación y ciertas condiciones sobre las curvas o superficies de contorno, como son el conocimiento de los valores de la función en dicho contorno (problema de Dirichlet) o los de la derivada en dirección de la normal (problema de Neumann). Si el campo es plano o puede reducirse a tal por ser independiente de una de las variables espaciales, la ecuación de Laplace se reducirá a  $\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0$  y será satisfecha por las componentes  $u$  y  $v$  de cualquier función holomorfa. Pero el conocimiento de los valores de una función holomorfa en el contorno de un recinto determina sencillamente los valores en el interior mediante la fórmula de Cauchy (lec. 38). Con esto se comprende cómo el problema de Dirichlet para funciones de dos variables se simplifica notablemente en el campo complejo; es decir, manejando *pares* de funciones armónicas que cumplan las condiciones de monogeneidad, en lugar de manejar una sola.

**2. Funciones armónicas conjugadas.**—Todo par de funciones  $u, v$ , (armónicas) que cumplan las condiciones de monogeneidad se llaman *armónicas conjugadas*. Para serlo basta, según el párrafo anterior, que cumplan las condiciones [1] y que sean derivables.

Dada una de ellas,  $u$ , se determina la otra  $v$  (salvo constante aditiva, integrando el sistema [1] o, lo que es lo mismo, hallando la primitiva de  $-u_y dx + u_x dy$ , según el procedimiento indicado en el tomo I, lec. 20. La integrabilidad queda asegurada por la igualdad de derivadas cruzadas  $-u_{yy} = u_{xx}$ , que coincide con la ecuación de Laplace

Geoméricamente, las dos funciones  $u$  y  $v$  son potenciales de campos ortogonales, puesto que en todo punto  $u_x/v_y = -v_y/v_x$ . Las curvas equipotenciales de uno son las líneas de campo del otro. La circulación de  $v$  en un contorno cerrado coincide con el flujo de  $u$  a través del mismo y recíprocamente.

La holomorfía de  $u + iv$  asegura al mismo tiempo el carácter irrotacional y conservativo de los dos campos, y por tanto, la ausencia de puntos *surgentes* o *sumentes*, así como de *torbellinos*, salvo en puntos singulares.

La divergencia  $u_{xx} + u_{yy}$  del primer campo coincide con el módulo del torbellino del segundo  $v_{yx} - v_{xy}$ , y recíprocamente. Si no están definidos en algún punto singular aislado  $a$ , la circulación de  $v$  sobre un contorno rodeando  $a$ , o su igual el flujo de  $u$  a través del mismo, nos informarán (Riemann) sobre la anulación de aquella divergencia o torbellino en  $a$ .

**3. Potencial logarítmico.**—Así, por ejemplo, la función  $w(z) = klz = = kl|z| + Ki \text{ Arg } z$  tiene una singularidad sencial aislada en el origen

I. Si  $k$  es real será  $u = \frac{k}{2} \ln(x^2 + y^2)$ ;  $v = k \arctg \frac{y}{x}$ . El vector de potencial  $u$  es radial y de módulo  $k/r$ , ya que sus componentes son  $u_x = k \frac{x}{r^2} = = \frac{k}{r} \cos \alpha$ ,  $u_y = k \frac{y}{r^2} = \frac{k}{r} \sin \alpha$ . Su flujo sobre una circunferencia de radio  $r$  y centro en el origen será pues  $\frac{k}{r} 2\pi r = 2k\pi \neq 0$ , y este será también el torbellino del vector de potencial  $v$ . En resumen:

*La componente real de  $klz$  da la imagen analítica del potencial de un campo que tiene en el origen un punto surgente o sumente según que sea  $k > 0$  o  $k < 0$ . La componente imaginaria da la imagen de un campo con torbellino en el origen.*

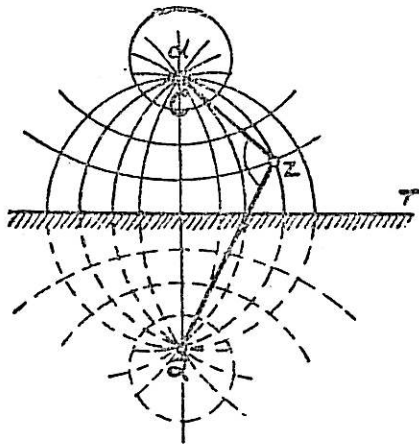
II. Si  $k = ik_1$ , es imaginario puro  $klz = -k_1 \text{ Arg } z + ik_1 |z|$  y se invierten los papeles de las componentes real e imaginaria. La circulación de  $u$  sobre una circunferencia alrededor del origen valdrá entonces  $-2k_1\pi$ .

*La componente real de  $ik_1z$  da en este caso la imagen analítica de un campo con torbellino en el origen (Wirbel).*

III. En el caso de ser  $k$  complejo, resulta el origen un punto mixto, torbellino surgente o torbellino sumente (Strudel).

Una simple traslación permitirá construir campos con un punto surgente o sumente, o con un torbellino en un punto  $\alpha$ , tomando la función  $w = kl(z - \alpha)$ , con  $k$  real o imaginario puro.

4. **Representación de campos mediante funciones de variable complejas.**— Los sencillos ejemplos que anteceden muestran la posibilidad que ofrecen las funciones de variable compleja para construir imágenes matemáticas que se adapten a las modalidades de los distintos campos que presenta lo mismo la electrostática que la teoría de flúidos, elasticidad, etcétera. He aquí brevemente reseñados, algunos ejemplos sencillos :



I. *Campo electrostático entre el suelo y un cable horizontal.*—Supuestos tanto uno como otro indefinidos, el campo es el mismo en todo plano perpendicular a ambos. Puesto que la circunferencia  $C$ , sección del cable, y la recta  $r$ , sección del suelo, son líneas equipotenciales, parece natural presumir como *has* equipotencial el *haz* de circunferencias definidas por  $C$  y  $r$  (eje radical), y como líneas de corriente el haz de circunferencias ortogonales. Por ser  $C$  muy pequeña, se puede asi-

milar a un punto  $\alpha$ , con lo que las líneas de corriente pasarán por el simétrico  $\bar{\alpha}$ .

El campo se obtiene superponiendo un potencial logarítmico surgente en  $\alpha$  con otro sumente en el simétrico y de igual intensidad. En efecto, la función

$$k [l(z - \alpha) - l(z - \bar{\alpha})] = kl \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}} \quad \bar{\alpha} \text{ conjugado de } \alpha \quad [3]$$

da, como líneas equipotenciales y de corriente respectivamente

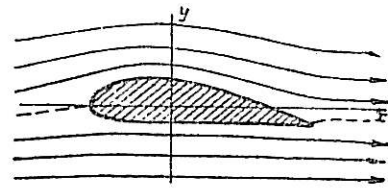
$$\frac{|z - \alpha|}{|z - \bar{\alpha}|} = \text{const.}^\circ \quad \text{Arg}(z - \alpha) - \text{Arg}(z - \bar{\alpha}) = \text{const.}^\circ$$

La primera define lugares geométricos de puntos cuyas razones de distancia a los dos  $\alpha$  y  $\bar{\alpha}$  son constantes (circunferencias), y la segunda, lugares de puntos  $z$ , tales que el ángulo  $\alpha z \bar{\alpha}$  es constante (circunferencias ortogonales a las anteriores, como deseábamos).

II. *Presencia de un obstáculo en una corriente flúida paralela.*—Supongamos una masa flúida homogénea (prácticamente muy grande, teóricamente infinita) desplazándose a velocidad constante  $v_0$  en dirección del eje  $x$ . (Por ejemplo, sensiblemente la corriente de aire en un túnel aero-



dinámico). Interpongamos en esta corriente un cuerpo cilíndrico infinitamente largo (prácticamente muy largo) de generatrices perpendiculares al plano  $xy$ . El nuevo campo de velocidades será el mismo en todo plano paralelo al  $xy$  y bastará estudiar en este plano la interposición de la sección recta del cilindro. Si el nuevo campo ha de seguir siendo irrotacional y suponemos el fluido incompresible (para una masa de aire esto es sólo una primera aproximación, aunque muy interesante) tendrá un potencial  $U$ , que satisfará la ecuación de Laplace  $\Delta U=0$  (ecuación que traduce la incompresibilidad, véase tomo I, lec. 29, § 4) y, por tanto, podrá ser obtenido por una función  $w=U+Vi$ , holomorfa en el exterior del obstáculo, tal que: 1.º una de las líneas de corriente  $V=\text{const.}^\circ$  sea el perfil de obstáculo, y 2.º en el infinito la velocidad debe tender a la del campo primero; es decir,  $\lim_{|z|\rightarrow\infty} U_x=v_0$ ;  $\lim_{|z|\rightarrow\infty} U_y=0$ .



Para el caso de un obstáculo circular de radio  $R$  (cuerpo cilíndrico de revolución) la función que resuelve el problema es

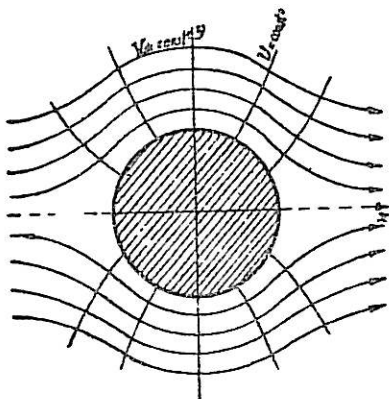
$$\boxed{w = v_0 \left( z + \frac{R^2}{z} \right)} \quad \text{o sea} \quad w = v_0 \left( x + iy + R^2 \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \right) \quad [1]$$

En efecto, sus componentes  $U, V$  son:

$$U = v_0 \left( x + \frac{R^2 x}{x^2 + y^2} \right) \qquad V = v_0 \left( y - \frac{R^2 y}{x^2 + y^2} \right) \quad [5]$$

cúbicas para  $U$  constante
cúbicas para  $V$  constante  
*líneas equipotenciales*
*líneas de corriente*

Para  $V=0$  resulta como línea de corriente  $y=0$ , eje  $x$ , y  $x^2 + y^2 = R^2$  circunferencia de acuerdo con la condición primera.



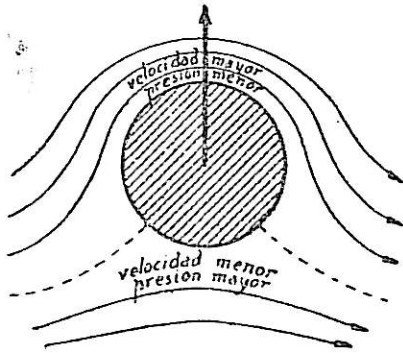
Además se comprueba fácilmente la condición segunda  $\lim_{|z|\rightarrow\infty} U_x=v_0$ ,  $\lim_{|z|\rightarrow\infty} U_y=0$ .

Se concibe la posibilidad de construir funciones más complicadas que resuelvan el problema para obstáculos menos sencillos, como, por ejemplo, el perfil de un ala de aeroplano. Obsérvese que el problema es equivalente al de un avión trasladándose paralelamente en el aire en calma (supuestas alas de sección constante y longitud infinita).

La simetría del campo resultante respecto del eje horizontal de la figura en el caso del perfil circular fijo indica que la circulación del campo  $\int U_x dx + U_y dy$  a lo largo de dicho perfil es nula. Pero si el obstáculo circular gira alrededor de su centro arrastrando el aire contiguo a su super-



ficie, el campo de velocidades será disimétrico apareciendo una circulación alrededor del perfil, que crea una diferencia de presiones entre regiones distintas del borde y un *empuje* resultante proporcional a dicha circulación (\*) (teorema de Kutta-Joukowski). Este es el llamado *efecto Magnus*.



La circulación se introduce, en este último caso, sin alterar las otras condiciones, añadiendo a la función  $w$  anterior un término logarítmico  $iklz$

$$\hat{w} = v_0 \left( z + \frac{R^2}{z} \right) - iklz \quad [6]$$

En efecto, la parte imaginaria  $V$  [5] queda disminuída en  $kl|z|$  y la real, aumentada en  $k \operatorname{Arg} z$

$$U = v_0 \left( x + \frac{R^2 x}{x^2 + y^2} \right) + k \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} \quad V = v_0 \left( y - \frac{R^2 y}{x^2 + y^2} \right) - \frac{k}{2} l(x^2 + y^2) \quad [7]$$

con lo que se obtiene también la circunferencia  $x^2 + y^2 = r^2$  como línea de corriente para el valor constante de  $V = -klr$ , mientras la circulación  $\int U_x dx + U_y dy$ , incremento de  $U$  a lo largo de la circunferencia, valdrá  $\Gamma = 2k\pi$ . La constante  $k$  es, pues, proporcional al empuje.

**5. Aplicación de la representación conforme.**—Obtenido, como antes, el campo  $w(z) = U(x, y) + iV(x, y)$  correspondiente a un obstáculo circular, transformando este círculo en otro recinto simplemente conexo de contorno  $c$  mediante una representación conforme, es decir, mediante otra función holomorfa de  $z$  (de derivada no nula)  $\zeta = f(z)$  de donde  $z = \varphi(\zeta)$ , obtendremos en el plano  $\zeta = \xi + i\eta$ , definida la función

$$W(\zeta) = w[\varphi(\zeta)] = U_1(\xi, \eta) + iV_1(\xi, \eta)$$

cuyas líneas de corriente  $V_1(\xi, \eta) = \text{const.}$  serán las transformadas de las  $V(x, y) = \text{const.}$ , entre ellas el contorno y cuyas componentes  $U_1$  y  $V_1$  verificarán asimismo la ecuación de Laplace, puesto que la función  $w[\varphi(\zeta)]$  de la variable  $z$  es asimismo holomorfa (Lec. 36, § 4), de otro modo:

*La ecuación de Laplace es invariante en toda transformación conforme del plano.*

En resumen, sabiendo resolver el problema del campo para un perfil circular se resolverá el correspondiente a un perfil cualquiera mediante la transformación conforme de este perfil en círculo.

(\*) El teorema de Bernoulli en el movimiento estacionario de un fluido sin fuerzas exteriores  $p + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const.}$  ( $p$  presión,  $\rho$  densidad,  $v$  velocidad) permite explicar cualitativamente la aparición de este empuje, pues la zona donde los filetes fluidos son más largos son de mayor velocidad y, por tanto, de menor presión.

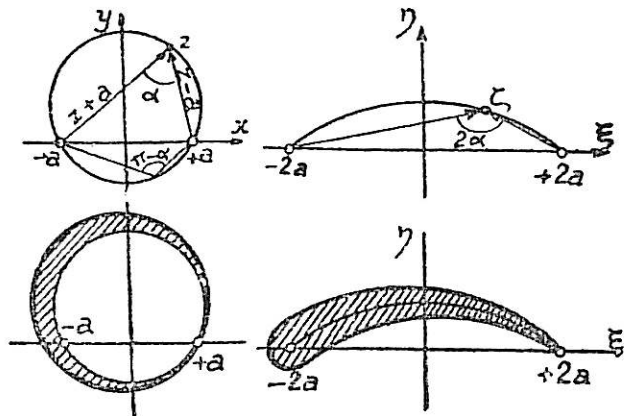
He aquí, a continuación, cómo podemos, por ejemplo, transformar una circunferencia en un perfil de ala de aeroplano, según Joukowski.

La transformación (\*)

$$\frac{\zeta - 2a}{\zeta + 2a} = \left( \frac{z - a}{z + a} \right)^2$$

hace corresponder a la circunferencia del plano  $z$  cuyos dos arcos limitados por los puntos  $\pm a$  son

$$\text{Arg}(z - a) - \text{Arg}(z + a) = \begin{cases} a \\ \pi - a \end{cases}$$



los arcos de circunferencia del plano  $\zeta$

$$\text{Arg}(\zeta - 2a) - \text{Arg}(\zeta + 2a) = \begin{cases} 2a \\ 2\pi - 2a \end{cases}$$

es decir, un mismo arco capaz del ángulo  $2\alpha$  (recorrido dos veces) (\*\*).

Una circunferencia próxima a la anterior que la envuelva, siendo tangente a ella en el punto  $a$  se transformará en una curva (cuártica) cerrada próxima a dicho arco rodeándole, menos en el extremo  $2a$  donde será tangente a él (carácter conforme de la transformación). Es el tipo de perfil de ala de Joukowski). Aplicando las transformaciones conformes efectuadas al campo de corrientes antes construido, se calculan la circulación a lo largo de este perfil y la fuerza sustentadora (\*\*\*)).

**6. Aplicación al problema de Dirichlet en el plano. Fórmula de Poisson.**—El problema de Dirichlet en el plano consiste, como recordará el lector, en:

*Hallar los valores de una función armónica  $U(x, y)$  en el interior de un recinto conocidos sus valores en el contorno  $c$ , problema cuya seria dificultad ha acuciado el ingenio de los matemáticos desde Dirichlet y Riemann hasta nuestros días.*

(\*) Equivalente a  $\zeta = z + \frac{a^2}{z}$  como fácilmente puede comprobar el lector.

(\*\*) No debe causar extrañeza el hecho. La transformación no es lineal, sino resultante de dos transformaciones lineales y una cuadrática

$$Z = \frac{z - a}{z + a} \quad W = Z^2 \quad \text{y} \quad \frac{\zeta - 2a}{\zeta + 2a} = W$$

La transformación  $W = Z^2$  origina una ramificación del plano alrededor de los puntos  $-2a$  y  $+2a$  (transformados del origen y del infinito, es decir, de los puntos de ramificación, del plano  $W$ ), el plano  $\zeta$  se recubre dos veces correspondiendo una hoja al exterior y otra al interior del círculo considerado. Para nuestro objeto nos basta la representación del exterior.

(\*\*\*) En el exterior del perfil la nueva representación del campo es holomorfa excepto en el punto singular  $+2a$  vértice del perfil que tiene una significación aerodinámica muy acusada. Para más detalles puede consultar el lector el librito de ROTHE «Funktionentheorie und ihre Anwendung in der Technik».

Si el recinto es simplemente conexo y sabemos hallar una transformación conforme  $w=f(z)$  que lo convierta en círculo, bastará atribuir a la función transformada  $U_1(u, v)$  en los puntos  $u, v$  de este círculo, homólogos de los  $x, y$  del contorno  $c$  los mismos valores de  $U(x, y)$  y resolver el problema de Dirichlet en este círculo. En efecto, por la invariancia de la ecuación de Laplace respecto de las transformaciones conformes, la nueva función  $U_1(u, v)$  deberá ser también armónica.

La dificultad ha quedado así escalonada en dos problemas distintos:

1.º Determinación de la función analítica  $w=f(z)$  que transforma conformemente un recinto plano en círculo.

2.º Resolución del problema de Dirichlet en el círculo.

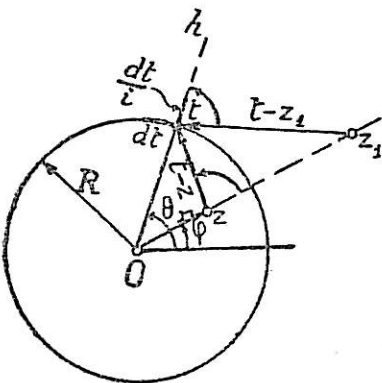
El primer problema ha sido objeto de laboriosos estudios por parte de los más insignes matemáticos que han llegado a crear un conjunto de métodos, es decir, toda una técnica de representación conforme, en la que no queremos entrar aquí para no prolongar excesivamente este Capítulo (\*).

Nos limitaremos a consignar el teorema fundamental de Riemann: *Existen infinitas funciones holomorfas en un recinto simplemente conexo capaces de transformarlo conformemente en círculo. Cada una de ellas queda individualizada en cuanto se dan tres pares de puntos homólogos en los respectivos contornos; o bien dando un par de puntos homólogos en dichos contornos y el punto del recinto homólogo del centro del círculo.*

El segundo problema fué resuelto en la lección 31, § 5, mediante un desarrollo de Fourier, pero por su evidente interés vamos a exponer aquí una solución más simple basada en la teoría de funciones analíticas.

Supongamos conocida la función armónica buscada  $U(x, y)$  y su conjugada  $V(x, y)$ , de tal modo que los valores de la primera sobre la circunferencia dada  $c$  coincidan con los valores  $U(t)$  dados,  $t$  valores de la variable  $z$  en la circunferencia.

Formemos con  $U$  y  $V$  la función analítica  $W=U(x, y)+iV(x, y)$ . Integrándola sobre la circunferencia, el teorema de Cauchy dará para todo punto interior  $z=r\varphi$



$$W(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{W(t)}{t-z} dt$$

es decir, la función buscada  $U(x, y)$  será la parte real de dicha integral, que, en esta forma no aparece fácilmente expresable en función de la componente real dada  $U(t)$  de  $W(t)$ , pues que el factor  $\frac{dt}{t-z}$  es también complejo; pero podrá expresarse como tal si transformamos la integral

en otra equivalente en la que  $W(t)$  vaya acompañada de un factor real.

(\*) Una idea sobre los teoremas fundamentales y método de Bieberbach adquirirá el lector en el hábil resumen de Rey Pastor «Teoría de las funciones analíticas y sus aplicaciones físicas». En él hallará también otras aplicaciones a la teoría de torsión de prismas.

Para ello, sea  $z_1$  el punto inverso geométrico de  $z$  respecto del círculo. La integral  $\int_c \frac{W(t) dt}{t - z_1}$  es evidentemente nula por ser el polo  $z_1$  exterior al contorno de integración. Por tanto, restándola de la anterior, se tendrá

$$W(z) = \frac{1}{2\pi i} \int W(t) \frac{(z - z_1) dt}{(t - z)(t - z_1)}$$

Ahora bien, recordando sencillas propiedades de la inversión, el anti-parallelismo de las rectas  $tz$  y  $tz_1$  respecto del ángulo  $tOz$  indica (figura) que en magnitud y signo  $\sphericalangle tz z_1 = \sphericalangle h t z_1$ , es decir

$$\text{Arg} \frac{t - z}{z_1 - z} = \text{Arg} \frac{dt/i}{z_1 - t}$$

de donde

$$\text{Arg} \left( \frac{z - z_1}{t - z} \cdot \frac{dt/t}{t - z_1} \right) = 0$$

lo que prueba que el factor del paréntesis es real y positivo, es decir *igual a su módulo*. Pero éste es fácil de expresar geoméricamente teniendo en cuenta la semejanza de los triángulos  $Ozt$  y  $Otz_1$ , de la que resulta  $|t - z_1| : |t - z| = Oz_1 : Ot = \frac{R^2}{r} : R$ , y por tanto,

$$\frac{(z - z_1) dt/i}{(t - z)(t - z_1)} = \frac{|z - z_1| R d\theta}{|t - z|^2 \frac{R}{r}} = \frac{r \left( \frac{R^2}{r} - r \right) d\theta}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi)}$$

Por tanto:

$$W(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W(t) \frac{(R^2 - r^2) d\theta}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi)}$$

fórmula de Poisson que permite separar fácilmente la parte real, dando así la  $U(x, y)$  en función de los valores  $U(t)$ , es decir,  $U(R, \theta)$  a lo largo de la circunferencia y de las coordenadas polares  $r, \varphi$  del punto  $z = x + iy$

$$U(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(R, \theta) \frac{(R^2 - r^2) d\theta}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi)}$$

La variable de integración es  $\theta$ , el radio  $R$  es fijo, y la integral, una vez efectuada, será función de los parámetros  $r$  y  $\varphi$  que aparecen en el integrando (\*).

(\*) Nos parece más breve y sencilla la deducción geométrica indicada del integrando de la integral de Poisson, que los cálculos que con tal fin se desarrollan en los tratados corrientes. En el «Resumen de la teoría de funciones analíticas», de Rey Pastor, se da otra demostración geométrica fundada en la fórmula de Schwarz.

LECCIÓN 42 — APLICACIONES A CIRCUITOS, REDES Y LÍNEAS DE TRANSMISIÓN.  
INVERSIÓN DE LA TRANSFORMACIÓN DE LAPLACE

1. **El campo complejo y las corrientes alternas.**—La aplicación del campo complejo a las corrientes alternas se funda en que toda magnitud oscilante armónica de pulsación  $\omega$ , tal como  $A \sin(\omega t + \varphi)$  se puede considerar como proyección de un vector giratorio de módulo  $A$ , velocidad angular  $\omega$  y de argumento  $\omega t + \varphi$ , que para  $t=0$ , se reduce a  $\varphi$ , ángulo llamado *fase inicial* o simplemente *fase*. A su vez dicho vector puede representarse en el plano complejo por la exponencial  $e^{j(\omega t + \varphi)}$ . Con frecuencia no interesan las fases instantáneas, sino la diferencia de fases entre las magnitudes en estudio y entonces se representan éstas simplemente por vectores fijos de argumento igual a la fase inicial, es decir, en el caso anterior por  $e^{j\varphi}$ .

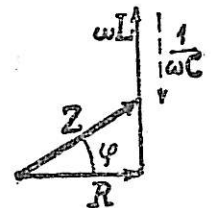
También aquí son más sencillos los cálculos formales con vectores o sus representaciones exponenciales complejas, que los que resultan de operar con funciones circulares de variable real, y de aquí la adopción del cálculo complejo en electrotecnia. Como quiera que la letra  $i$  se reserva en electrotecnia para designar intensidades de corriente, se adopta en ella la letra  $j$  para representar la unidad imaginaria pura, y así procederemos en esta lección en los párrafos y ejemplos de aplicación electrotécnica.

2. **Ecuaciones en circuitos y redes de corta extensión.**—Una muestra de la brevedad que el uso de exponenciales complejas imprime al cálculo de circuitos de corriente alterna se vió en el § 7 de la lección 11. Recordemos que si  $i = Ie^{j(\omega t + \varphi)}$  será  $Di = j\omega i$  mientras  $\int i dt = \frac{i}{j\omega}$  entendiéndose con el signo  $\int$  la primitiva exponencial (sin constante de integración).

El cálculo de la intensidad  $i$  alterna que circula, en régimen permanente, por un circuito de resistencia  $R$ , autoinducción  $L$  y capacidad  $C$  al que se aplica en serie una f. e. m.  $u = Ue^{j\omega t}$  se reduce (lecciones 11, § 7 y 18, § 6) a ensayar la solución  $i = Ie^{j(\omega t + \varphi)}$  en la ecuación del circuito que será

$$LDi + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = \left( j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C} \right) i = u \quad [1]$$

$$\text{de donde } i = \frac{u}{Z} \quad [2] \quad \text{con } Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad [3]$$



$Z$  es un vector fijo llamado *impedancia* cuya fase  $\varphi$  tiene extraordinario interés en la técnica de transmisión de energía.







En régimen permanente, si  $u = \text{const}^\circ$  los coeficientes  $z_{kl}$  son reales (resistencias óhmicas); si  $u(t)$  es alterna de la forma  $e^{j(\omega t + \varphi)}$  estos coeficientes son impedancias complejas de la forma antes hallada. En régimen transitorio o cuando  $u(t)$  es una f. e. m. en general,  $z_{kl}$  son operadores integrodiferenciales; el sistema [5] es, en este caso, un sistema de ecuaciones diferenciales lineales o se convierte en tal, previa derivación para eliminar los operadores  $\int$  procedentes de los circuitos con capacidad.

Por ejemplo, la intensidad  $i_n(t)$  en la malla  $n.^\circ$  vendrá dada por

$$i_n(t) = \frac{\delta_{1n}}{\Delta} u(t) = \frac{u(t)}{Z_n} \quad [6]$$

en donde  $\Delta$  es el determinante de las impedancias y  $\delta_{1n}$  es el determinante adjunto del elemento  $z_{1n}$  en  $\Delta$ .

La expresión  $Z_n = \frac{\Delta}{\delta_{1n}}$  que tiene las dimensiones de una impedancia (por ser el numerador de grado superior en una unidad al denominador) se denomina *impedancia aparente* en la malla  $n.^\circ$  respecto de una excitación aplicada a la malla  $1.^\circ$ . Tiene un valor fijo (real o complejo, según se trate de corriente continua o alterna) en régimen permanente y es un *operador racional* en régimen variable, operador que, aplicado a  $u(t)$  según las reglas del cálculo operacional (lección 10), dará la función  $i_n(t)$ , es decir, nos dará la *respuesta* en la malla  $n.^\circ$  ante la inserción de  $u(t)$ .

**3. Aplicación de la transformación de Laplace. Segunda regla de Heaviside.**—Las reglas a que acabamos de aludir no son más que las que resultan de la inversión de la integral de Laplace. Recordemos, en efecto, que en el caso general en que [5] es un sistema integrodiferencial, la transformación de Laplace aplicada a todas las ecuaciones, lo transforma en un sistema algebraico de muy sencilla formulación, especialmente si las intensidades iniciales son nulas  $i_1(0) = i_2(0) = \dots = i_n(0) = 0$ , pues en tal caso bastará sustituir en [5] las  $i_k$  y la  $u$  por sus transformadas  $\mathcal{L}(i_k)$ ,  $\mathcal{L}(u)$ , y los operadores  $z_{kl}$  por las expresiones algebraicas que resultan de sustituir en ellos el operador  $D$  por el parámetro  $p$  de la transformación. Así se obtendrán individualmente las  $i_{kl}$  mediante sus transformadas

$$\mathcal{L}(i_k) = \frac{\delta_{1k}(p)}{\Delta(p)} \mathcal{L}(u) = \frac{\mathcal{L}(u)}{Z_k(p)} \quad [7]$$

donde ahora  $Z_k(p) = \frac{\Delta(p)}{\delta_{1k}(p)}$  es una expresión racional en  $p$ . Si a su vez,  $u$  tiene transformada racional en  $p$ , será asimismo  $\frac{\mathcal{L}(u)}{Z_k(p)} = \Phi(p)$  racional en  $p$ . Descompuesta en fracciones simples la suma de sus generatrices obtenidas, según se indicó en la lección 18, dará  $i_k$ .

En particular si  $u = 1$ ,  $\mathcal{L}(u) = \frac{1}{p}$ ,  $\frac{\mathcal{L}(u)}{Z_k(p)} = \frac{1}{p Z_k(p)} = \frac{\delta_{1k}(p)}{p \Delta(p)}$  y si suponemos que  $\Delta(p)$  tiene los ceros simples  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , el desarrollo en fracciones simples será de la forma

$$\mathcal{L}(i_k) = \frac{\mathcal{L}(u)}{Z_k(p)} = \frac{a_0}{p} + \frac{a_1}{p-p_1} + \frac{a_2}{p-p_2} + \dots + \frac{a_n}{p-p_n}$$

en el que  $a_0 = \frac{\delta_{1k}(0)}{\Delta(0)}$   $a_i = \frac{\delta_{1k}(p_i)}{p_i \Delta'(p_i)}$  ya que la derivada del denominador

$$p \Delta(p) \text{ es } p \Delta'(p) + \Delta(p) = \begin{cases} \Delta(0) & \text{para } p=0. \\ p_i \Delta'(p_i) & \text{para } p=p_i. \end{cases}$$

Y como la generatriz de  $\frac{1}{p}$  es 1 y la de  $\frac{1}{p-p_k}$  es  $e^{p_k t}$  resulta la siguiente expresión de la intensidad transitoria creada en la malla  $k^a$  por una f. e. m. unidad súbitamente aplicada en la malla primera

$$i_k(t) = \frac{\delta_{1k}(0)}{\Delta(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_{1k}(p_i)}{p_i \Delta'(p_i)} e^{p_i t} \quad [8]$$

fórmula que constituye la llamada *segunda regla de Heaviside*, la de más frecuente aplicación en circuitos y redes, regla que, como se ve, puede obtenerse al margen de la teoría de las funciones de variable compleja.

**4. Líneas de transmisión. Aplicación de la transformación de Laplace a las ecuaciones en derivadas parciales.**—Si de un circuito o red de corta extensión pasamos a las líneas de transmisión de gran longitud, en ellas resultan ya inadmisibles los errores que se introducirían si se siguiera suponiendo localizadas las resistencias, las capacidades y las autoinducciones, y se impone considerar los intercambios de energía entre los campos eléctrico y magnético que rodean cada elemento de línea, con lo que la intensidad  $i$  y la diferencia de potencial  $u$  en una línea no es sólo función de  $t$  sino del lugar considerado en ella, es decir, de la distancia  $x$  de dicho lugar a un extremo. Estas funciones  $i(x, t)$   $u(x, t)$  obedecen, como dijimos en la lección 28, al sistema de Lord Kelvin (lineal en las derivadas parciales de  $i$  y de  $u$ )

$$-D_x u = l D_t i + \tau i \qquad -D_x i = c D_t u + g u \quad [9]$$

del que resulta

$$\begin{aligned} [cl D_t^2 + (\tau c + gl) D_t + rg] i &= D_x^2 i \\ [cl D_t^2 + (rc + gl) D_t + rg] u &= D_x^2 u \end{aligned} \quad [10]$$

Esta ecuación en derivadas parciales (la misma para  $i$  y  $u$ ), llamada *de los telegrafistas*, es de segundo orden lineal con coeficientes constantes mientras se puedan considerar sensiblemente constantes los parámetros que representan la resistencia óhmica,  $\tau$ ; la autoinducción,  $l$ ; la capacidad,  $c$ , y la conductancia lateral,  $g$ , de la línea por unidad de longitud (\*).

(\*) Dejamos a los tratados especiales de electrotecnia el estudio crítico de estos conceptos y los métodos de medida y cálculo de tales constantes.

En el cálculo de transitorios en una línea, el problema que se plantea es averiguar el régimen  $i(x, t)$   $u(x, t)$  que provoca en un lugar  $x$  de la línea la alteración súbita de la f. e. m.  $u_0(t)$  en otro lugar  $x_0$  (conexión súbita, descarga atmosférica, pulsador telegráfico, etc.). Tomando el instante de la alteración como inicial y suponiendo conocido el régimen inicial, por ejemplo, estático, es decir,  $i(x, 0)=0$   $u(x, 0)=0$ , se trata de integrar la ecuación de los telegrafistas [10] conocidas ésta (u otra) condición inicial, y las condiciones de contorno que se desprenden de la disposición de los terminales de la línea (en corto, en vacío, conectados a impedancias conocidas, etc.).

También aquí el uso de la transformación de Laplace tiene ventaja sobre los métodos de integración directa reseñados en la lección 28. Consideremos, para ello  $x$  como un parámetro y apliquemos a las funciones  $i$  o  $u$  que satisfacen la ecuación [10] la transformación de Laplace tratándola como ecuación diferencial ordinaria respecto de la variable  $t$ , o sea introduzcamos las funciones

$$\eta(p, x) = \int_0^x i(x, t) e^{-pt} dt \quad \varepsilon(p, x) = \int_0^x u(x, t) e^{-pt} dt$$

suponiendo, naturalmente, que las integrales tienen sentido para todos los valores de  $x$  entre 0 y  $\lambda$  longitud de la línea. Salvadas, pues, las cuestiones de existencia, subsisten las relaciones funcionales de transformación demostradas en la lección 18 sin más que suponer implícitamente contenidas en las características funcionales el parámetro implícito  $x$ . Podemos, por tanto, escribir como transformada del sistema [9] y de las ecuaciones [10] con las condiciones  $i(x, 0)=0$   $u(x, 0)=0$

$$(cp + g) \varepsilon = -D_x \eta \quad (lp + r) \eta = -D_x \varepsilon \quad [11]$$

de donde

$$(lp + r)(cp + g) \varepsilon = D_{xx} \varepsilon \quad (lp + r)(cp + g) \eta = D_{xx} \eta \quad [12]$$

Las transformadas  $\eta$ ,  $\varepsilon$  tienen que satisfacer, pues, a una ecuación diferencial ordinaria. Se comprende que esta conclusión es general, es decir: *Toda ecuación en derivadas parciales lineal de coeficientes constantes con dos variables se reduce, mediante la transformación de Laplace, efectuada considerando una de ellas como parámetro, a una ecuación diferencial ordinaria en esta variable.*

Integraremos las nuevas ecuaciones [12] poniendo  $(lp + r)(cp + g) = k^2$ , es decir,  $\varepsilon'' - k^2 \varepsilon = 0$  ( $k^2 > 0$  por suponer  $p > 0$ ) de donde  $\varepsilon$  será de la forma

$$\varepsilon = A \operatorname{Sh} kx + B \operatorname{Ch} kx$$

de donde por [11]

$$\eta = - \frac{B k \operatorname{Sh} kx}{lp + r} - \frac{A k \operatorname{Ch} kx}{lp + r}$$

Como vemos  $\varepsilon$  y  $\eta$  son funciones de  $p$ ,  $x$ .

Las constantes  $A$  y  $B$  se determinarán por las condiciones de contorno. Supongamos, para fijar las ideas, que la línea está en cortocircuito en el extremo  $x=0$ , de donde  $u(t, 0)=0$  para toda  $t$  y, por tanto  $\varepsilon(0)=0$  para toda  $p$ ; ello exige  $B=0$ . Y si suponemos que en el extremo  $x=\lambda$  se aplica una f. e. m. constante  $E_0$  se tendrá  $A \operatorname{Sh} k\lambda = \mathcal{L}[E_0] = \frac{E_0}{p}$  con lo que resulta  $A = E_0 : p \operatorname{Sh} k\lambda$  y por tanto

$$\varepsilon = E_0 \frac{\operatorname{Sh} kx}{p \operatorname{Sh} k\lambda} \quad \eta = - \frac{E_0}{p \operatorname{Sh} k\lambda} \sqrt{\frac{cp+q}{lp+r}} \operatorname{Ch} kx \quad [13]$$

La dificultad que se presenta ahora es la determinación de las funciones  $u(x, t)$  e  $i(x, t)$  generatrices Laplace de  $\varepsilon$  y  $\eta$ , pues éstas, pese a la sencillez de las condiciones, no son como antes, racionales, sino trascendentes meromorfas en  $p$ . Para vencer esta dificultad y las dificultades análogas que se presentan invariablemente al tratar una ecuación lineal en derivadas parciales con dos variables por la transformación de Laplace, y tener que invertir luego las soluciones trascendentes que nos proporciona la ecuación diferencial ordinaria transformada, conviene emplear recursos de la teoría de funciones de variable compleja.

**5. Inversión de la integral de Laplace.**—La primera cuestión que se plantea al tratar de hallar una función  $f(z)$  cuya transformada Laplace sea una función dada  $\varphi(p)$  es saber si tal generatriz existe y qué condiciones cabe exigir a  $f(z)$  para asegurar dicha existencia. Desde un punto de vista técnico, sólo interesa la formulación de la solución, puesto que la existencia así como la unicidad quedan aseguradas por la respuesta misma de la línea, de la red o, en general, del sistema físico, a la causa determinante del fenómeno en estudio.

Existencia y formulación quedan, no obstante, resueltas con relativa sencillez, para un tipo bastante amplio de funciones, mediante el siguiente teorema:

Si  $\eta(p)$  es una función de la variable compleja  $p$ , holomorfa en el semiplano de abscisa  $\geq a$  y expresable en la forma  $\frac{a_0}{p} + \frac{\omega(p)}{p^\gamma}$  en que  $\gamma > 1$  y  $|\omega(p)|$  es acotado en el referido semiplano, dicha función admite como generatriz Laplace

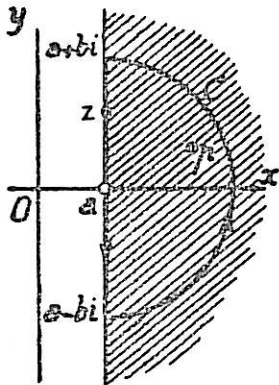
$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \eta(z) dz \quad \text{para } t > 0 \quad [14]$$

O sea que al sustituir dicha función en la transformación directa

$$\eta(p) = \int_0^\infty e^{-pt} y(t) dt. \quad [15]$$

la satisface idénticamente.

En efecto, para todo punto  $p$  interior a un semicírculo de centro en el punto  $a$  del eje real y de radio  $b$  contenido en el semiplano a la derecha de  $a$ , se tendrá, aplicando el teorema de Cauchy



$$\eta(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a+ib}^{a-ib} \frac{\eta(z)}{z-p} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\eta(z)}{z-p} dz \quad [16]$$

La integral  $\int_C$  sobre la semicircunferencia tiende a cero al tender el radio  $b \rightarrow \infty$ , pues mientras el camino de integración es infinito de primer orden, los denominadores del integrando  $\frac{a_0}{z(z-p)} + \frac{w(z)}{z^\gamma(z-p)}$

son infinitos de orden  $\geq 2$  y los numeradores son acotados (v. lec. 37, § 4).

Pero para todos los puntos  $z$  del diámetro de integración de la primera integral será válida la siguiente igualdad

$$\int_0^\infty e^{t(z-p)} dt = \left[ \frac{e^{t(z-p)}}{z-p} \right]_0^\infty = -\frac{1}{z-p}$$

puesto que la parte real del exponente  $z-p$  es negativa. Sustituyendo el valor resultante de  $1/(z-p)$  en [16] quedará, al tender  $b \rightarrow \infty$ ,

$$\eta(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \eta(z) dz \int_0^\infty e^{t(z-p)} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{tz} \eta(z) dz$$

que demuestra el teorema.

Se sobreentiende por  $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}$  el lim de  $\int_{a-ib}^{a+ib}$  llamado *valor principal* de la integral.

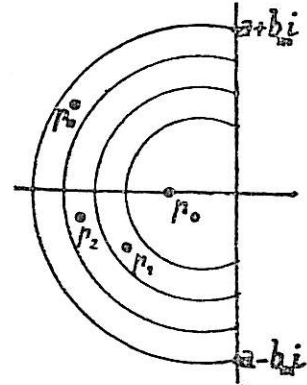
La inversión del orden de integración es lícita en lo que afecta al sumando  $\frac{w(z)}{z^\gamma}$  por la convergencia absoluta de las integrales. Para el sumando primero  $\frac{a_0}{z}$  la cuestión es un poco más delicada, pero su generatriz es  $a_0$  y es fácil probar directamente la validez de la fórmula [14] que se reduce a (V. la demostración en Notas, § 7).

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{zt}}{z} dz \quad \text{para } a > 0 \quad t > 0$$

**6. Inversión de funciones meromorfas de infinitos polos. Generalización de la segunda regla de Heaviside.**—Supongamos ahora que a la izquierda de la recta vertical del plano  $p$  de abscisa  $a$  la función  $\eta(z)$  del teorema anterior sea meromorfa con infinitos polos  $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$  y eventualmente el polo  $p_n = 0$  si  $a_n \neq 0$ , y sean  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  (y eventualmente  $a_0$ ) los residuos  $\eta(z)$  en dichos polos. Estos polos serán los mismos de  $e^{zt}\eta(z)$ , pero los residuos de este producto serán  $\lim_{z \rightarrow p_n} (z-p_n) e^{zt}\eta(z) = e^{p_n t} a_n$ .



Como dichos polos no se acumulan, podremos aislarlos mediante contornos rectangulares  $C_m$  (rectangulares, circulares, etc.) con bordes rectilíneos simétricos respecto del eje  $x$  en el borde del semiplano, de longitud y distancia al origen crecientes de modo que exista entre cada dos consecutivos un polo (o más de uno en número finito). Aplicando el teorema de Cauchy a la función  $e^{zt}\eta(z)$  y en el contorno  $C_m$  que abarque en su interior los polos  $a_0, a_1, \dots, a_n$  se tendrá



$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-bmi}^{a+bmi} e^{zt}\eta(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_m} e^{zt}\eta(z) dz = \sum_0^n e^{p_n t} a_n$$

Si los contornos se pueden elegir de modo que las integrales sobre ellos tiendan a cero al crecer  $m$  (caso el más frecuente en las aplicaciones), un paso al límite en la igualdad anterior permitirá escribir la generatriz de  $\eta(z)$  mediante un desarrollo en serie de términos exponenciales (serie de Dirichlet) cuyos coeficientes son los residuos  $a_n$  de  $\eta(z)$  en sus polos

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^z \eta(z) dz = \sum_0^\infty e^{p_n t} a_n \quad [17]$$

Finalmente, en el caso en que  $\eta(z)$  venga dado como cociente de dos funciones enteras  $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$  y que los polos  $p_0, p_1, p_2, \dots$  (ceros del denominador) sean simples, recordemos (Lec. 40, § 3) que los residuos  $a_1, a_2, \dots$  se expresan mediante  $a_n = \varphi(p_n) : \psi'(p_n)$  con lo que la generatriz vendrá dada por

$$y(t) = a_0 + \sum_1^\infty \frac{\varphi(p_n)}{\psi'(p_n)} e^{p_n t} \quad [18]$$

que constituye la generalización de la segunda regla de Heaviside dada en el § 3. Aquella es, en efecto, caso particular de ésta, puesto que la serie se convierte en polinomio cuando el número de polos es finito.

La condición impuesta a los contornos puede hacerse analíticamente más manejable particularizando éstos. Así, adoptando contornos circulares, resulta automática la validez del desarrollo cuando la función  $\eta(z)$  es de la forma  $\frac{w(z)}{z^\gamma}$ ,  $\gamma > 1$  y  $|w(z)|$  acotado sobre dichas circunferencias. Eligiendo contornos rectangulares (de doble altura que ancho  $\beta_n$ ), la condición equivale a poder hallar una sucesión de números  $\beta_n$  tales que, creciendo infinitamente con  $n$  ( $\beta_n \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ ) verifiquen en el plano  $z = x + iy$ :

$$\begin{aligned} \eta(x \pm i\beta_n) < \delta_n & \qquad \eta(-\beta_n + iy) < M \\ -\beta_n \leq x \leq \beta_n & \qquad -\beta_n < y < \beta_n \end{aligned}$$

donde  $\delta_n$  es independiente de  $x$  y tiende a cero al crecer  $n$  y  $M$  es independiente de  $y$  y de  $n$  (\*).

(\*) V. CHURCHILL: «Modern Operational Mathematics in Engineering».



ÉJEMPLO: Volviendo al ejemplo del § 4 podemos hacer ahora aplicación de lo dicho para expresar la tensión  $u(x, t)$  y la intensidad en un punto  $x$  de la línea. Bastará hallar respectivamente las generatrices de las trascendentes meromorfas allí encontradas  $\varepsilon(p, t)$   $\eta(p, t)$ . Ciñéndonos sólo a la tensión (puesto que la intensidad puede deducirse de ella según [9] mediante una cuadratura) buscaremos los polos de

$$\varepsilon(p, t) = E_0 \frac{\text{Sh } kx}{p \text{ Sh } k\lambda}$$

que son los valores que anulan el denominador o sea  $p=0$  y además los que hacen  $\text{sen } jk\lambda=0$ , excepto  $k=0$  (que anula numerador) es decir  $jk\lambda = n\pi$  ( $n \pm 1, \pm 2, \dots$ ) que da la ecuación  $(lp + r)(cp + g) = -n^2\pi^2 : \lambda^2$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ).

En muchos casos prácticos puede admitirse  $g \cong 0$   $l \cong 0$  con lo que  $k = \sqrt{crp} = -j \frac{n\pi}{\lambda}$  y se obtiene la sucesión de polos simples  $p_0=0$ ,  $p_n = -\frac{n^2\pi^2}{\lambda^2 cr}$  ( $n=1, 2, \dots$ ).

En otros en que las pérdidas en la línea son pequeñas, puede tomarse prácticamente  $r \cong 0$   $g \cong 0$  y la sucesión de polos  $p_n$  es aún más sencilla

$$p_n = -j \frac{n\pi}{\lambda \sqrt{cl}}$$

Concretándonos al caso primero y aplicando [18] (\*) obtendremos el siguiente cálculo de la generatriz de  $\varepsilon(p)$

$$\varphi(p) = E_0 \text{Sh}(\sqrt{crp}x); \quad \psi(p) = p \text{Sh}(\sqrt{crp}\lambda);$$

$$\psi'(p) = \text{Sh}(\sqrt{crp}\lambda) + \frac{1}{2} p^{\frac{1}{2}} \sqrt{cr} \lambda \text{Ch}(\sqrt{crp}\lambda)$$

Residuos:

$$a_0 = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E_0 \text{Sh} \sqrt{crp}x}{p \text{Sh} \sqrt{crp}\lambda} = E_0 \frac{x}{\lambda}$$

$$a_n = \frac{E_0 \text{Sh} \sqrt{crp_n}x}{\text{Sh} \sqrt{crp_n}\lambda + \frac{\lambda}{2} \sqrt{crp_n} \text{Ch} \sqrt{crp_n}\lambda} = \frac{E_0 \text{Sh} \left( -j \frac{n\pi x}{\lambda} \right)}{\text{Sh}(-jn\pi) - j \frac{n\pi}{2} \text{Ch}(-jn\pi)} = \frac{2E_0 \text{sen} \left( n\pi \frac{x}{\lambda} \right)}{n\pi (-1)^n}$$

(\*) Es fácil ver que para  $p \rightarrow \infty$  el cociente  $\frac{\text{Sh } kx}{\text{Sh } k\lambda} \rightarrow \frac{e^{kx}}{e^{k\lambda}} = \frac{1}{e^{k(\lambda-x)}}$  cuyo denominador es un infinito de orden superior al de cualquier potencia de  $p$ ; y como los polos de  $\varepsilon(p)$  son negativos excepto  $p_0$ , es aplicable a  $\varepsilon(p)$  la fórmula de inversión [14] y su consecuencia [18] para cualquier  $\alpha > 0$ .

con lo que

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \{ \varepsilon(p) \} = E_0 \left[ \frac{x}{\lambda} + 2 \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\pi} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{\lambda^2 cr} t} \operatorname{sen} n\pi \frac{x}{\lambda} \right]$$

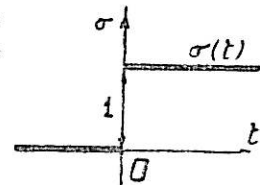
y análogamente se resuelven otros problemas sobre líneas, transmisión del calor, etc.

En este último lustro se ha desarrollado grandemente la aplicación de la transformación de Laplace a multitud de problemas, no sólo de Electrotecnia sino también de Física matemática, que el lector podrá estudiar en la abundante bibliografía que ya existe sobre la materia. Por ejemplo, además de la obra fundamental de *Doetsch* «Theorie und Anwendung der Laplace Transformation», las de *Churchill* antes citada; *Carslaw and Jaeger*, «Operational methods in applied Mathematics»; *Mac Lachlan* «Modern Operational Calculus», etc.

NOTAS

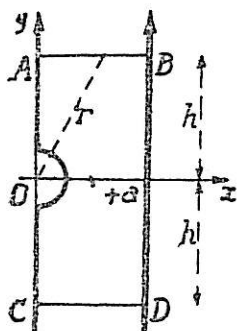
7. Representación del «salto unidad» mediante una integral.—Los electrotécnicos y matemáticos que por primera vez intentaron dar una fundamentación rigurosa a las reglas y métodos de Heaviside, partieron de la representación, mediante una integral, de la función discontinua llamada «salto unidad» definida por  $\sigma(t)=0$  para  $t<0$ ,  $\sigma(t)=1$  para  $t>0$ , función que traduce la variación de la tensión en un circuito inicialmente neutro al que se aplica súbitamente una f. e. m. unidad. Dicha representación es

$$\sigma(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{e^{pt}}{p} dp = \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} \frac{e^{pt}}{p} dp \quad [1]$$



Ante todo demostremos la equivalencia de los caminos de integración indicados:

1.º El que recorre de abajo a arriba el eje de las y rodeando el origen O, único polo del integrando, mediante un arco arbitrario que deja dicho polo a la izquierda (Hakenintegral, integral de gancho).



2.º El que recorre en el mismo sentido una paralela  $x=a$  cualquiera al eje y situada en el semiplano  $x>0$ .

Observemos, para ello, que al cerrar un contorno con dos porciones finitas de los caminos anteriores (de la misma altura  $2h$  y simétricas respecto del eje  $x$ ) y dos segmentos  $AB, CD$  paralelos al eje  $x$ , la integral sobre este contorno será nula (por excluir el polo), de modo que las integrales sobre los caminos  $CA$  y  $DB$  diferirán en la suma de las integrales sobre  $AB$  y  $DC$ , cuyo módulo es fácil de acotar, pues

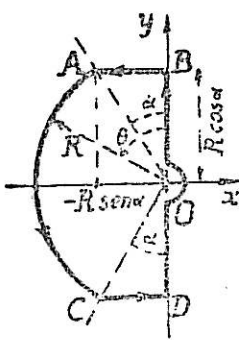
$$\left| \int_{AB} \frac{e^{pt}}{p} dp \right| + \left| \int_{DC} \right| < 2 \int_0^a \frac{e^{xt}}{h} dx = \frac{2}{th} (e^{at} - 1) \quad [2]$$

y como esta cota tiende  $\rightarrow 0$  al crecer  $h$  infinitamente, las integrales sobre los caminos infinitos indicados son iguales (supuestas convergentes como vamos a ver).

Supongamos ahora  $t>0$  e integremos a lo largo del contorno cerrado de la figura limitado por un arco  $AC$  de circunferencia de radio  $R$  comprendido en el ángulo

fijo  $AOC$ , las dos paralelas  $BA$  y  $CD$  al eje  $x$ , y el trozo  $DOB$  del camino primero (v. figura).

A lo largo del segmento  $BA$  la acotación de la integral es análoga a la anterior



$$\left| \int_{AB} \frac{e^{pt}}{p} dp \right| < \int_{-R \operatorname{sen} \alpha}^0 \frac{e^{xt}}{R \cos \alpha} dx = \frac{2}{t R \cos \alpha} [1 - e^{-Rt \operatorname{sen} \alpha}]$$

que tiende a cero al tender  $R \rightarrow \infty$ . Y lo mismo a lo largo de  $CD$ .

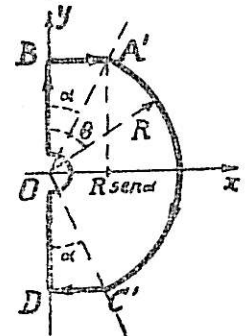
A lo largo del arco  $AC$  es  $|e^{pt}| = e^{xt} \leq e^{-Rt \operatorname{sen} \alpha}$  y, por tanto,

$$\left| \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{e^{pt} dp}{p} \right| < \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{e^{xt} R d\theta}{R} < (\pi - 2\alpha) e^{-Rt \operatorname{sen} \alpha} \quad [3]$$

que, asimismo, tiende a cero al tender  $R \rightarrow \infty$ . En el límite sólo quedará, por tanto, la integra l sobre el camino primero, que será igual al residuo, el cual vale la unidad por ser  $e^{pt} : p = \frac{1}{p} + \text{función entera holomorfa}$ . Por tanto

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{e^{pt}}{p} dp = 1 \quad \text{para } t > 0 \quad [4]$$

Para  $t < 0$  seguiremos un camino de integración formado por el mismo fragmento  $DB$  anterior complementado por otro  $BA'C'D$  situado a su derecha, simétrico del anterior  $BACD$ . Las acotaciones serán idénticas con la diferencia del cambio de signo de  $x$  que compensa el de  $t$  restituyendo el signo negativo al exponente de  $e^{Rt \operatorname{sen} \alpha}$  que tenderá como antes a cero al tender  $R \rightarrow \infty$ . Y como ahora el polo origen queda excluido del contorno, la integral es nula y resulta



$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{e^{pt}}{p} dp = 0 \quad \text{para } t < 0 \quad [5]$$

quedando demostrada la representación [1] del salto unidad  $\sigma(t)$  (\*).

Si en esta integral hacemos  $p = j\omega$  resulta también

$$\sigma(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega t}}{\omega} d\omega \quad [6]$$

8. Régimen de corriente provocado en un sistema eléctrico por la inserción súbita de la f. c. m. unidad. Integral de Bromwich.—La integral obtenida (1) o (6) descompone el «salto unidad»  $\sigma(t)$  de f. c. m. en una suma de incrementos infinitesimos de f. c. m. de carácter exponencial armónico de frecuencia  $\omega$  o factor  $p$ . Estudiemos el régimen de corriente que origina en un sistema o línea eléctricos. Fijémos en un punto cualquiera  $P$  del mismo. Cada sumando elemental de salto  $d\sigma = \frac{1}{2\pi j} \frac{e^{pt}}{p} dp$  origina en

(\*) Hemos eludido deliberadamente la integración a lo largo de semicircunferencias, como es corriente, para evitar la inclusión de los extremos, que originan dificultades en el paso al límite al tender  $R \rightarrow \infty$ . De paso queda indirectamente demostrado que la integración puede efectuarse siguiendo en uno y otro caso los radios extremos del sector  $OA, OB, OA', OB'$ . Más general: Para  $t > 0$  la integración puede efectuarse sobre cualquier camino abierto (que deje el origen a la izquierda) terminando en dos semirrectas del segundo y tercer cuadrantes, y para  $t < 0$  del primero y cuarto.

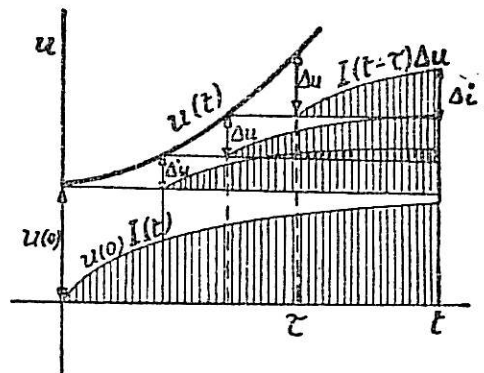


P una corriente elemental  $di$  que se obtendrá dividiendo  $d\sigma$  por la impedancia  $Z(p)$  aparente en dicho punto con respecto a aquel en que se ha insertado la f. e. m. (\*). Integrando tendremos, pues, la expresión de la intensidad mediante la integral

$$I(t) = \frac{1}{2\pi.j} \int_{a-j\omega}^{a+j\omega} \frac{e^{pt} dp}{p Z(p)} \quad [7]$$

llamada *integral de Bromwich*, en la que hay que elegir ahora  $a$  en forma que deje a la izquierda no sólo el origen  $p=0$ , sino también todos los valores de  $p$  para los cuales  $Z(p)=0$ , pues sólo así puede asegurarse la anulación de la corriente  $I(t)$  para valores negativos de  $t$  (cerrando, en efecto, el contorno mediante una semicircunferencia a la derecha, como hemos hecho más arriba, el contorno ha de excluir los puntos singulares). En resumen, pues, en la integral de Bromwich,  $a$  representa un valor positivo mayor que la mayor de las partes reales de las raíces de  $Z(p)=0$ . Para frecuencias correspondientes a regímenes estables, dichas partes reales son negativas y basta tomar como línea de integración el eje vertical bordeando, como antes, el origen.

9. Régimen provocado por la inserción súbita de una f. e. m. variable.— Conocido el régimen  $I(t)$  provocado en un punto de un circuito o red en equilibrio por la inserción súbita en el instante  $t=0$  de una fuerza electromotriz unidad  $u=1$  en otro punto del mismo circuito o red, de modo que  $I(t)=0$  para  $t \leq 0$ , la intensidad  $i(t)$  provocada por la f. c. m. variable  $u(t)$  a partir del mismo instante, en el mismo punto, vendrá dada por el principio físico de superposición de efectos de causas concomitantes y será la correspondiente a  $u(0)$ , o sea  $u(0)I(t)$  más las intensidades  $I(t-\tau) du$ , provocadas por los incrementos sucesivos de f. e. m. en los incrementos sucesivos de tiempo  $d\tau$  comprendidos entre 0 y  $t$  ( $du$  se supone, pues, calculado con respecto a  $\tau$ , o sea  $du = u'(\tau) d\tau$ , siendo variable entre 0 y  $t$ ).



Por tanto,

$$i(t) = u(0) I(t) + \int_0^t I(t-\tau) u'(\tau) d\tau \quad [8]$$

En esta integral puede imaginarse efectuado el cambio de  $\tau$  en  $t-\tau$  y, recíprocamente, con lo que también

$$i(t) = u(0) I(t) + \int_0^t I(\tau) u'(t-\tau) d\tau \quad [9]$$

En el caso particular de una fuerza electromotriz excitante de la forma  $u=e^{pt}$ , se tiene

$$i(t) = I(t) + p e^{pt} \int_0^t I(\tau) e^{-p\tau} d\tau \quad [10]$$

10. Interpretación físico de la transformación de Laplace y de su inversa.— Si se compara ahora la fórmula [7] con la [14, § 5], que da la generatriz Laplace de una  $\eta(p)$  dada, vemos cómo un razonamiento de índole física nos ha conducido a formular la intensidad  $I(t)$  engendrada en un punto P de un sistema eléctrico por la inser-

(\*) Impedancia aparente que aprendimos a formular en el § 2 para los sistemas, y que, en general, podemos definir como el cociente  $u_0 : i_1$  de la f. e. m. insertada  $u_0$  por la intensidad  $i_1$  originada en P.

ción súbita de la f. e. m. unidad en otro  $Q$ , como la generatriz Laplace de  $\frac{1}{pZ(p)}$  en que  $Z(p)$  es la impedancia aparente de  $P$  respecto de  $Q$ .

La fórmula [7], hallada por Bromwich no es, pues, más que un caso particular de la [14, §5], que da la inversión de la integral Laplace.

Por su parte, la fórmula [8] contiene una interesante interpretación física del teorema de composición (Faltung) dado en el § 5 de la lección 18, según la cual este teorema viene a traducir en símbolos matemáticos el principio físico de superposición de efectos de causas concomitantes aplicado a un conjunto de incrementos diferenciales sucesivos de f. e. m., según ya indicamos en caso particular sencillo en lec. 18, § 10.

En efecto, aplicando la transformación de Laplace a la ecuación diferencial  $Z(D)i(t)=u(t)$ , que relaciona  $i(t)$  con  $u(t)$ , en el caso inicial estático  $i(0)=0$ ,  $u(0)=0$  se obtiene entre las transformadas respectivas  $\eta(u)$  y  $\epsilon(p)$  la relación  $Z(p)\eta(p)=\epsilon(p)$ ; es decir,  $i(t)$  es la transformada inversa de  $\eta(p)=\frac{\epsilon(p)}{Z(p)}$  que se puede poner en la forma de producto  $\frac{1}{pZ(p)} \cdot p\epsilon(p)$ ; y como las transformadas inversas de los factores son, respectivamente,  $I(t)$  y  $u'(t)$ , aplicado la regla de composición resulta

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{pZ(p)} \cdot p\epsilon(p) \right\} = I(t) * u'(t) = \int_0^t I(t-\tau) u'(\tau) d\tau$$

que es la fórmula [8] para  $u(0)=0$ . El hecho de que la regla de composición conduzca a la integral que se obtiene directamente superponiendo efectos, indica la vinculación física de esta regla a la ley de superposición:

Aparte de la significación física que adquiere así la regla de composición de transformadas, resulta interesante notar que la transformación de Laplace es el único operador lineal que verifica esta regla de composición (y que transforma la unidad en  $\frac{1}{p}$ ) (\*). La linealidad de los operadores diferenciales que constituyen los primeros miembros de las ecuaciones de la física matemática es, asimismo, consecuencia del referido principio de superposición. He aquí la razón matemática interna del papel esencial que la transformación de Laplace ha adquirido en las aplicaciones a la electrotecnia y a la física matemática en general.

## EJERCICIOS

1. Completar la solución del ejemplo desarrollado en esta lección hallando el régimen de intensidad  $i(x, t)$  en una línea con las condiciones iniciales y de contorno indicadas en el § 4 y en la hipótesis simplificada admitida en el § 6,  $g=l=0$ .

Obsérvese que en esta hipótesis la primera ecuación [9] da  $i = \frac{-1}{r} u_x$ . Compruébese la licitud de la derivación de  $u(x, t)$ .

2. Aplicar el método de la transformación de Laplace para resolver el ejemplo del § 2 de la lección 30. Considerando en la función incógnita  $T(x, t)$  la variable  $x$  como un parámetro y aplicando la transformación de Laplace a la ecuación de transmisión del calor resulta la ecuación diferencial ordinaria en  $x$ ,  $\theta'' - a^2 p \theta = 0$ . Las condiciones de contorno se traducen fácilmente expresando la integral de ésta mediante senos y cosenos hiperbólicos. La inversión de la solución exige el cálculo de los polos que son  $p=0$ ,  $p_n = -n^2 \pi^2 / a^2 l^2$ .

3. Aplicar el método de la transformación de Laplace a la determinación del régimen de temperatura  $T(r, t)$  en un cilindro de radio  $a$  a temperatura inicial nula colocado en un medio a temperatura constante  $\theta_0$ . La ecuación transformada se integra mediante funciones de Bessel de primera especie (la finitud de la temperatura para  $r=0$  elimina las de segunda especie). Los polos se expresan mediante los ceros de  $J_0$ .

(\*) Según ha demostrado el Prof. de la Universidad Central y estimado colega R. San Juan.



## Capítulo XIII.—NOCIONES SOBRE ECUACIONES INTEGRALES LINEALES

### LECCIÓN 43. ECUACIONES INTEGRALES Y PROBLEMAS DE CONTORNO

1. **Definiciones y tipos principales.**—Así como las ecuaciones diferenciales ligan una función incógnita con sus derivadas, las ecuaciones integrales relacionan la función incógnita con una integral, en cuyo integrando aparece dicha función. Se presentan tales ecuaciones en buen número de cuestiones técnicas, proporcionando métodos que, en ocasiones, resultan más ventajosos que los usuales en la teoría de ecuaciones diferenciales, especialmente en ciertos tipos de problemas en cuyo planteamiento intervienen condiciones de contorno.

Los tipos más frecuentes son los *lineales*; es decir, aquellos en que la función incógnita aparece linealmente bajo el signo de integración y se llaman ecuaciones *de Fredholm* o *de Volterra*, según que los límites de la integral sean fijos o variables, y se clasifican en ecuaciones *de primera* y *de segunda especie*, según que dicha función incógnita aparezca solamente en el integrando o también fuera de él. Así tenemos:

Ecuaciones de tipo Fredholm

$$[1] \quad \int_a^b K(x, \xi) y(\xi) d\xi = f(x) \quad \text{1.ª especie}$$

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) y(\xi) d\xi + f(x) \quad [2]$$

2.ª especie

Ecuaciones de tipo Volterra: Sustitúyanse, por ejemplo, el límite superior  $b$  por  $x$ .

En estas ecuaciones,  $y$  es la función incógnita mientras  $K(x, \xi)$  y  $f(x)$  son funciones conocidas que suponemos continuas. En particular, la función  $K(x, \xi)$ , llamada *núcleo* de la ecuación, se supone continua y, por tanto, acotada en el intervalo completo de integración  $[a, b]$ , lo mismo de la variable  $x$  que de la variable  $\xi$ . Existen también ecuaciones no lineales, por ejemplo de la forma

$$y(x) = \lambda \int_a^b F[x, \xi, y(\xi)] d\xi + f(x)$$

cuya dificultad de tratamiento sube de punto según la naturaleza de  $F$ .

Por el interés relevante que presenta en las aplicaciones y también por ser la más sencilla, nos ocuparemos en este breve capítulo exclusiva-



mente de la ecuación de Fredholm de segunda especie [2]. Esta ecuación se llamará *homogénea* cuando  $f(x) \equiv 0$ , y *completa* en caso contrario.

**2. La ecuación de Fredholm y los problemas de contorno.**—Corroborando lo dicho en el párrafo anterior, veamos cómo los problemas de contorno estudiados en la lección 14 son equivalentes a la resolución de ecuaciones de tipo Fredholm de segunda especie.

En efecto, consideremos las ecuaciones del tipo canónico Sturm-Liouville, tratadas en las lecciones 13 y 14 (a las que se puede reducir cualquier ecuación diferencial lineal de segundo orden y coeficientes variables, mediante multiplicación por un factor conveniente)

$$\frac{d}{dx} [p(x)y'] + q(x)y = \begin{cases} 0 & \text{(homogénea) [3]} \\ f(x) & \text{(completa) [4]} \end{cases} \quad \text{abreviadamente } L[y] = \begin{cases} 0 \\ f(x) \end{cases}$$

con las condiciones de contorno

$$y(a)=0 \quad y(b)=0 \quad [5]$$

ecuación en la que suponemos  $p > 0$  en todo el intervalo  $[a, b]$ .

Supongamos halladas, como en el § 3 de la lección 13, dos soluciones de la ecuación homogénea [3], tales que  $y_1(a)=0$ ;  $y_2(b)=0$ , y cuyo wronskiano  $y_1y_2' - y_2y_1' \neq 0$  designaremos por  $W(x)$ . Según vimos en la referida lección, la solución  $y(x)$  de la ecuación completa [4] que verifica las condiciones [5] viene dada por la integral

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad [6]$$

en la que  $G(x, \xi)$  es la llamada *función de Green* definida por

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{y_2(x)y_1(\xi)}{p(\xi)W(\xi)} & \text{para } a \leq \xi \leq x \\ \frac{y_1(x)y_2(\xi)}{p(\xi)W(\xi)} & \text{para } x \leq \xi \leq b \end{cases} \quad [8]$$

Recordemos las siguientes propiedades:

1.ª La función de Green considerada como función de  $x$  verifica las condiciones de contorno [5] y la ecuación homogénea [3], es decir  $L[G]=0$  en todo el intervalo  $[a, b]$ , excepto en el punto  $x=\xi$ , en que su derivada es discontinua. En efecto, en la primera de sus determinaciones es de la forma  $K_1y_2(x)$  y en la segunda  $K_2y_1(x)$ .

2.ª La función de Green es *simétrica* en  $x, \xi$  (v. lec. 13, §§ 5 y 6) por ser el denominador  $p(\xi)W(\xi) = pe^{-\int \frac{p'}{p} d\xi} = pe^{-\int p + K} = e^K$  (constante).

Consideremos ahora la ecuación (con intervención de un parámetro  $\lambda$ )

$$\frac{d}{dx} [p(x)y'] + (q(x) - \lambda r(x))y = f(x) \quad \text{donde } r(x) > 0 \quad [8]$$

Si  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ ,  $W$  y  $G(x, \xi)$  tienen la misma significación que antes, toda solución  $y(x)$  de la ecuación [8], con las condiciones [5], supuesta existente, deberá verificar ahora la relación que resulte de sustituir en [6]  $f(x)$  por  $f(x) + \lambda r(x)y$  y por tanto

$$y(x) = \lambda \int_a^b r(\xi) G(x, \xi) y(\xi) d\xi + \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad [9]$$

Como el integrando de la segunda integral es conocido, lo es la integral, y la relación [9] es una ecuación integral de Fredholm de 2.º especie a la que tiene que satisfacer toda solución  $y(x)$  del sistema de contorno [8], [5].

Recíprocamente: Toda solución de [9] satisface dicho sistema.

En efecto, de  $G(a, \xi) = 0$   $G(b, \xi) = 0$  resulta  $y(a) = 0$   $y(b) = 0$ . Además, aplicando la identidad

$$y_1 L[y_2] - y_2 L[y_1] = \frac{d}{dx} [pW] \quad (W = y_1 y_2' - y_2 y_1')$$

deducida en el § 7 de la lección 13, a la solución  $y(x)$  de [9] y la función  $G$  considerada como función de  $x$ , se obtiene, por ser  $L[G] = 0$

$$GL[y] dx = d[p(Gy' - yG')]$$

de donde

$$\int_a^\xi GL[y] dx = [p(Gy' - yG')]_a^{\xi-0} \quad \int_\xi^b GL[y] dx = [p(Gy' - yG')]_{\xi+0}^b$$

y sumando, teniendo en cuenta que  $G(a, \xi) = G(b, \xi) = 0$ ,  $y(a) = y(b) = 0$  y que  $G'$  se incrementa en  $\frac{1}{p(\xi)}$  al pasar del primer al segundo intervalo (lec. 13, §3),

$$\int_a^b GL[y] dx = y(\xi)$$

y como, además, por [9], permutando  $x$  y  $\xi$ ,

$$\int_a^b G(\xi, x) [f(x) + \lambda r(x)y(x)] dx = y(\xi)$$

la identidad de ambas integrales para todo valor de  $\xi$  exige (según veremos en la próxima lección, § 4)

$$L[y(x)] = f(x) + \lambda r(x)y(x)$$

que indica que  $y(x)$  verifica la ecuación [8].

Obsérvese que el núcleo de la ecuación [9] es  $r(\xi) G(x, \xi)$  asimétrico; pero por haber supuesto  $r > 0$  podemos transformarla en otra de núcleo

simétrico multiplicándola por  $\sqrt{\tau(x)}$  y tomando como nueva función incógnita  $Y(x)=\sqrt{\tau(x)}$  y  $(x)$  con lo que quedará

$$Y(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) Y(\xi) d\xi + g(x) \quad [10]$$

habiendo designado

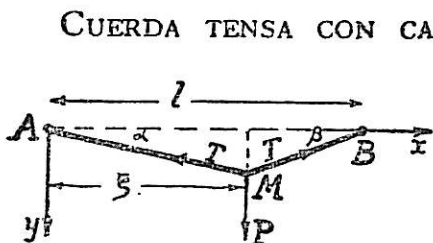
$$K(x, \xi) = \sqrt{\tau(x)} \cdot \sqrt{\tau(\xi)} \cdot G(x, \xi) \quad \text{núcleo simétrico} \quad [11]$$

$$g(x) = \sqrt{\tau(x)} \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

El problema de contorno planteado ha quedado finalmente reducido a la resolución de una ecuación integral de segunda especie con núcleo simétrico.

En el caso de ecuación diferencial del tipo [8] *homogénea*,  $f(x)=0$ , y la ecuación integral también será homogénea por ser  $g(x)=0$ .

3. Ejemplos físicos conducentes a ecuaciones integrales.—Este parentesco estrecho entre problemas relativos a ecuaciones diferenciales con otros equivalentes en ecuaciones integrales no se desprende de simples transformaciones formales como las efectuadas en el párrafo anterior; tiene su raíz en la propia esencia física de los problemas que pueden plantearse directamente en una u otra forma según el punto de vista que se adopte. El principio físico de superposición de efectos de causas concomitantes puede traducirse expresando la suma de efectos infinitesimales, con lo que obtendremos ecuaciones integrales, o bien restando efectos, es decir hallando incrementos infinitesimales, con lo que obtendremos ecuaciones diferenciales. A la dualidad de planteamientos de un mismo fenómeno corresponderá, pues, dualidad de lenguaje matemático para expresarlo. Un ejemplo sencillo lo constituye el problema de la cuerda vibrante; pero antes estudiemos el problema general de la



CUERDA TENSA CON CARGA CONTINUA.—Sea una cuerda horizontal de longitud  $l$ , de peso despreciable, tensa entre dos puntos  $A$  y  $B$  con tensión  $T$  tan fuerte que no quede sensiblemente modificada por la aparición de un peso  $P$  en un punto  $M$  a distancia  $\xi$  del extremo  $A$ , lo que implica, naturalmente, una modificación muy leve de la forma de la cuerda. Propongámonos, en tales hipótesis determinar dicha forma. Tendremos (v. figura)  $\xi \operatorname{tg} \alpha = (l - \xi) \operatorname{tg} \beta$ , (y por ser  $T \operatorname{sen} \alpha$ ,  $T \operatorname{sen} \beta$ , las componentes verticales de la tensión en los ramales  $MA$ ,  $MB$  de cuerda).

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{l - \xi} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\xi} = \frac{T(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}{Tl} \cong \frac{T(\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta)}{Tl} = \frac{P}{Tl}$$

Tendremos, pues

$$\text{a la izquierda de } P \quad y(x) = x \operatorname{tg} \alpha = \frac{P}{Tl} x(l - \xi)$$

$$\text{a la derecha de } P \quad y(x) = (l - x) \operatorname{tg} \beta = \frac{P}{Tl} \xi(l - x)$$

Si llamamos  $K(x, \xi)$  a la función 
$$K(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x(l - \xi)}{l} & \text{para } x \leq \xi \\ \frac{\xi(l - x)}{l} & \text{para } x \geq \xi \end{cases} \quad [13]$$

la ordenada (hacia abajo) en cada punto de la cuerda será  $y(x) = \frac{P}{T} K(x, \xi)$ .

Si ahora suponemos una carga continua (siempre pequeña en relación con  $T$ ) distribuída a lo largo de la cuerda según la ley de densidad de carga  $p(\xi)$  (significa que en cada elemento  $d\xi$  hay una carga elemental  $p(\xi) d\xi$ ) en cada lugar  $x$  habrá una ordenada *suma* de las producidas por las cargas elementales (principio de superposición de efectos), de modo que la forma de la cuerda vendrá dada por

$$y(x) = \frac{1}{T} \int_0^l p(\xi) K(x, \xi) d\xi \quad \cdot [14]$$

Dada  $p(\xi)$  la integral (para cuyo cálculo efectivo tendremos que doblarla en dos  $\int_0^x + \int_x^l$  con objeto de considerar separadamente las dos modalidades del núcleo) dará la forma  $y(x)$ .

Pero, recíprocamente, si queremos hallar la ley de carga  $p(x)$  capaz de producir una determinada deformación, nos vemos conducidos a la ecuación integral [14] en  $p$  que es *de primera especie de Fredholm*, en la que el núcleo  $K(x, \xi)$  es el llamado *núcleo triangular* (forma de la cuerda para una carga aislada). Este núcleo, como se desprende de su definición, es *simétrico*, pero no tiene derivada continua (no es analítico).

**CUERDA GIRATORIA.**—En este caso la carga  $p(\xi) d\xi$  se sustituye por la fuerza centrífuga en el elemento  $d\xi$ , que vale  $\rho \omega^2 y \cdot d\xi$  ( $\rho$  densidad lineal,  $\omega$  velocidad angular) y quedará como ecuación

$$y(x) = \frac{\rho \omega^2}{T} \int_0^l K(x, \xi) y(\xi) d\xi \quad [15]$$

ecuación de Fredholm *de segunda especie homogénea* de la forma  $y(x) = \lambda \int_0^l K y(\xi) d\xi$  con núcleo simétrico, en el supuesto de ser  $\rho$  densidad uniforme de la cuerda. Si la densidad fuese variable, habría que introducirla bajo el signo  $\int$  y tendríamos una integral con núcleo *asimétrico*  $K_1(x, \xi) = \rho(\xi) K(x, \xi)$ .

CUERDA VIBRANTE.—En la cuerda vibrante la carga o fuerza  $p$  de la ecuación [14] es la fuerza de inercia, o sea  $-\rho d\xi \frac{\partial^2 y(\xi, t)}{\partial t^2}$  y la ecuación de la cuerda vibrante se podrá expresar en forma integrodiferencial

$$y(x, t) = -\frac{\rho}{T} \int_0^l \frac{\partial^2 y(\xi, t)}{\partial t^2} K(x, \xi) d\xi \quad [16]$$

en donde  $t$ , tiempo, se acarrea como un parámetro en la integración.

Si, dando por conocida la naturaleza senoidal (armónica) de la dependencia de  $y$  respecto de  $t$ , buscamos soluciones de la forma  $y(x, t) = Y(x) \cos(\omega t + \theta)$  se obtiene la ecuación en  $Y(x)$

$$Y(x) = \frac{\omega^2 \rho}{T} \int_0^l K(x, \xi) Y(\xi) d\xi = \frac{\omega^2}{a^2} \int_0^l K(x, \xi) Y(\xi) d\xi \quad [17]$$

por ser  $T/\rho = a^2$  (v. Lecc. 28, § 2).

Las soluciones de esta ecuación de 2.ª especie son, pues, las mismas que las de la ecuación diferencial de 2.º orden que se obtiene al efectuar igual sustitución en la ecuación de la cuerda vibrante  $a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$  obtenida en lecc. 28, § 2, es decir

$$Y'' + \frac{\omega^2}{a^2} Y = 0 \quad \text{con} \quad \begin{cases} Y(0) = 0 \\ Y(l) = 0 \end{cases} \quad \text{para toda } t \quad [18]$$

Este ejemplo, que comprueba por planteamiento físico directo la equivalencia analítica entre los problemas de contorno y las ecuaciones integrales, nos ilustra pues, además, sobre la naturaleza de las soluciones de una ecuación integral del tipo Fredholm homogénea de 2.ª especie con núcleo triangular [13].

$$Y(x) = \lambda \int_0^l K(x, \xi) Y(\xi) d\xi \quad K(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x(l-\xi)}{l} & \text{para } x \leq \xi \\ \frac{\xi(l-x)}{l} & \text{para } x \geq \xi \end{cases} \quad [19]$$

Pues al ser equivalente a la  $Y'' + \lambda Y = 0$  tiene, además de la solución trivial  $y=0$  la sucesión de soluciones propias (lecc. 14, § 2)

$$Y_n(x) = \sqrt{\lambda_n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} = \frac{n\pi}{l} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}$$

para la sucesión de valores propios de  $\lambda$

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \quad \lambda_2 = \frac{4\pi^2}{l^2} \quad \dots \quad \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2} \quad \dots$$

4. **Propiedades generales de la ecuación de Fredholm de 2.ª especie.**— Cuando el núcleo  $K$  de la ecuación homogénea es triangular, es decir

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) y(\xi) d\xi \quad \text{con} \quad K \equiv \begin{cases} \frac{(x-a)(b-\xi)}{b-a} & \text{para } a \leq x \leq \xi \\ \frac{(\xi-a)(b-x)}{b-a} & \text{para } \xi \leq x \leq b \end{cases} \quad [20]$$

el sencillo cambio de origen  $x' = x - a$ ,  $\xi' = \xi - a$  con  $b - a = l$  la reduce a la [19] que acabamos de tratar.

No ocurren las cosas de modo tan sencillo para un núcleo no triangular; sin embargo, para núcleos simétricos integrables y de cuadrado integrable se demuestra (Hilbert-Schmidt) la existencia al menos de un valor propio  $\lambda$  y una función propia correspondiente distinta de la trivial  $y=0$ .

Si el núcleo es asimétrico, puede ocurrir que no existan valores ni funciones propias.

Por otra parte, dado el carácter lineal del operador integral, se comprueba inmediatamente que:

I. Si  $y$ , es solución de la ecuación homogénea [20] con núcleo cualquiera, también lo es  $Cy$ , ( $C$  independiente  $x$ ,  $\xi$ ).

II. Si  $y_1, y_2, \dots, y_n$  son soluciones correspondientes a un mismo valor de  $\lambda$  lo es también  $C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n$ .

Pasando a considerar ahora la ecuación completa

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi) y(\xi) d\xi = f(x) \quad [21]$$

demostraremos en la lección siguiente que esta ecuación para todo valor de  $\lambda$  que no sea autovalor de la homogénea, define una función  $y(x)$  solución; de otro modo, establece una correspondencia funcional entre el segundo miembro  $f(x)$  y la incógnita  $y(x)$ , correspondencia en que a la función  $f(x) \equiv 0$  corresponde la solución única trivial  $y \equiv 0$ . Esta correspondencia tiene el carácter *lineal*, pues se comprueba en seguida que:

a) Si  $y_1(x)$  es solución correspondiente a  $f_1(x)$ ,  $ky_1(x)$  es solución correspondiente al segundo miembro  $kf_1(x)$ .

b) Si  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  son soluciones correspondientes a los segundos miembros  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  es  $\sum_1^n C_i y_i$  solución correspondiente al segundo miembro  $\sum_1^n C_i f_i$ .

Para los valores excepcionales de  $\lambda$ , autovalores, no existen, en general, soluciones de [21], a menos que  $f(x)$  cumpla ciertas condiciones.

En resumen: La ecuación completa [21] admite solución única si la ecuación homogénea correspondiente [20] sólo admite la solución trivial  $y(x)=0$ . En cambio, si ésta tiene soluciones distintas de la trivial, la completa sólo admite soluciones (en número finito) cuando  $f(x)$  cumple determinadas condiciones, cuyo enunciado exige conocimientos que no tienen cabida en este resumen. Esta propiedad alternativa, debida a Fredholm, recuerda la análoga en problemas de contorno enunciada en la lección 13.



## LECCIÓN 44.—MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

1. **La serie de Neumann.**—Dada la ecuación de Fredholm de segunda especie

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) y(\xi) d\xi + f(x) \quad [1]$$

en la que suponemos  $K(x, \xi)$  y  $f(x)$  funciones continuas en el intervalo de integración  $a \leq x \leq b$   $a \leq \xi \leq b$ , intentemos satisfacerla mediante una serie de la forma

$$y(x) = \sum_0^{\infty} \lambda^n u_n(x) \quad [2]$$

Si tal serie existe y es uniformemente convergente, lo que habrá que comprobar a posteriori, la sustitución de la misma en [1] y la integración término a término dará

$$\begin{aligned} & u_0(x) + \lambda u_1(x) + \lambda^2 u_2(x) + \dots + \lambda^n u_n(x) + \dots = \\ = & f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) u_0(\xi) d\xi + \lambda^2 \int_a^b K(x, \xi) u_1(\xi) d\xi + \dots + \lambda^n \int_a^b K(x, \xi) u_{n-1}(\xi) d\xi + \dots \end{aligned}$$

y la identificación de los términos en las sucesivas potencias de  $\lambda$  permitirá el cálculo de las funciones  $u_i$  por recurrencia, obteniéndose

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x) = f(x) \\ u_1(x) = \int_a^b K(x, \xi) u_0(\xi) d\xi \\ u_2(x) = \int_a^b K(x, \xi) u_1(\xi) d\xi \\ \dots \dots \dots \\ u_n(x) = \int_a^b K(x, \xi) u_{n-1}(\xi) d\xi \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

La serie queda así formalmente determinada y se llama *serie de Neumann*. Resta analizar la validez del desarrollo, es decir, su convergencia uniforme, hecho lo cual no cabe duda de que será solución puesto que se ha obtenido con la condición de satisfacer [1]. Ahora bien, recordando que  $K(x, \xi)$  es continua en el recinto completo (cuadrado)  $a \leq x \leq b$ ,  $a \leq \xi \leq b$ , su módulo tendrá un valor máximo  $M$  y, por la misma razón,

$|f(x)|$  tendrá un máximo  $N$  en  $[a, b]$  y podemos acotar sucesivamente  $u_0$  y las integrales que definen  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$

$$|u_0| \leq N, \quad |u_1| \leq NM(b-a), \quad |u_2| \leq NM^2(b-a)^2, \quad \dots \quad |u_n| \leq NM^n(b-a)^n, \quad \dots$$

con lo que la serie [2] admitirá la mayorante geométrica

$$N [1 + \lambda M(b-a) + \lambda^2 M^2(b-a)^2 + \dots + \lambda^n M^n(b-a)^n + \dots]$$

Para todo valor de  $\lambda < \frac{1}{M(b-a)}$  que haga convergente esta serie podemos asegurar, en consecuencia, la convergencia absoluta de la serie [2].

En resumen: *La solución proporcionada por la serie de Neumann [2] mediante el cuadro de funciones  $u_n$  obtenidas por [3] es válida para todo valor de  $\lambda < \frac{1}{M(b-a)}$ , siendo  $M$  el módulo máximo del núcleo en el cuadro  $a \leq x \leq b, a \leq \xi \leq b$ .*

**2. Método de iteración.**—El método anterior es sin duda el más rápido para formular la serie de Neumann y caracteriza su validez, pero resulta de interés teórico y didáctico ver la génesis de dicha serie por aplicación del método de aproximaciones sucesivas, análogo al usado en la lección 1.<sup>a</sup> para integrar una ecuación diferencial de primer orden.

Partamos de la primera aproximación  $y_0(x) \equiv 0$ . Sustituyendo en el segundo miembro de [1] resulta en el primero la segunda aproximación

$$y_1(x) = f(x) \quad [4]$$

Sustituyendo  $y_1(\xi) = f(\xi)$  en el segundo miembro obtendremos en el primero una nueva aproximación

$$y_2(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) y_1(\xi) d\xi + f(x) \quad [5]$$

Sustituyendo de nuevo  $y_2$  en el segundo miembro de [1] obtendremos

$$y_3(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) y_2(\xi) d\xi + f(x) \quad [6]$$

y análogamente

$$y_n(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) y_{n-1}(\xi) d\xi + f(x) \quad [7]$$

Si  $y_n(x)$  tiende uniformemente a un límite  $\eta(x)$ , pasando al límite en [7], será  $\eta(x)$  la solución buscada, puesto que verificará

$$\eta(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) \eta(\xi) d\xi + f(x)$$

Ahora bien, restando la fórmula recurrente [7] de la misma para  $n+1$  obtenemos

$$y_{n+1}(x) - y_n(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) [y_n(\xi) - y_{n-1}(\xi)] d\xi \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

mientras

$$y_1(x) - y_0(x) = f(x)$$

de modo que si ponemos  $y_{n+1} - y_n = \lambda^n u_n$  resulta para  $u_n$  la misma ley recurrente [3], y como ya hemos demostrado la convergencia uniforme de la serie  $\sum \lambda^n u_n$  para todo  $\lambda < 1$ :  $M(b-a)$  existirá

$$\eta_1(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} (y_{m+1} - y_0) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_0^m (y_{n+1} - y_n) = \sum_0^{\infty} \lambda^n u_n$$

con lo que resulta probada la convergencia del proceso de aproximaciones sucesivas dentro de la acotación de  $\lambda$  indicada.

Tenemos, pues, hasta ahora dos procedimientos equivalentes para llegar a la solución:

1.º Por una sucesión de aproximaciones sucesivas mediante iteración directa en la ecuación.

2.º Construyendo por iteración los términos de la serie de Neumann y sumando ésta.

**3. Núcleo resolvente.**—Queda todavía un tercer punto de vista desde donde enfocar el mismo proceso de convergencia, punto de vista de más interés conceptual que práctico (puesto que, en definitiva, todos ellos conducen a la misma serie): aplicar el proceso de iteración al núcleo de la ecuación.

Para ello sustituyamos en cada uno de los integrandos de [3] el valor de  $u_1(\xi)$  obtenido en la fórmula precedente y resultará

$$u_0(x) = f(x)$$

$$u_1(x) = \int_a^b K_1(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad \text{con} \quad K_1(x, \xi) = K(x, \xi)$$

$$\begin{aligned} u_2(x) &= \int_a^b K_1(x, t) dt \int_a^b K_1(t, \xi) f(\xi) d\xi \\ &= \int_a^b K_2(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad \text{donde} \quad K_2(x, \xi) = \int_a^b K_1(x, t) K_1(t, \xi) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_3(x) &= \int_a^b K_1(x, t) dt \int_a^b K_2(t, \xi) f(\xi) d\xi \\ &= \int_a^b K_3(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad \text{donde} \quad K_3(x, \xi) = \int_a^b K_1(x, t) K_2(t, \xi) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \int_a^b K_1(x, t) dt \int_a^b K_{n-1}(t, \xi) f(\xi) d\xi \\ &= \int_a^b K_n(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad \text{donde} \quad K_n(x, \xi) = \int_a^b K_1(x, t) K_{n-1}(t, \xi) dt \end{aligned}$$

Los núcleos iterados  $K_1(x, \xi)$ ,  $K_2(x, \xi)$ , ...  $K_n(x, \xi)$ , ..., cuyo cálculo

envuelve un proceso de integraciones sucesivas, permiten conservar bajo el integrando la *función fija*  $f(\xi)$  con lo que la solución podrá expresarse por

$$y(x) = u_0 + \lambda \sum_0^{\infty} \lambda^n u_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \sum_0^{\infty} \lambda^n \int_a^b K_{n+1}(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad [9]$$

si llamamos *núcleo resolvente* a

$$K(x, \xi, \lambda) = \sum \lambda^n K_{n+1}(x, \xi) \quad [10]$$

serie que será uniformemente convergente para los mismos valores de  $\lambda$  que hacen convergente la  $\sum u_n$  (de la que se deduce fácilmente), se tendrá expresada la solución  $y(x)$  mediante la siguiente expresión integral afectando al núcleo resolvente

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi \quad [11]$$

La conservación de la función fija  $f(\xi)$  bajo la integral nos suministra ahora un resultado muy interesante, pues nos hace ver que el término  $f(x)$  de la ecuación dada [1] es solución de la ecuación integral [11] en  $f(x)$ .

Las relaciones [1] y [11] entre  $y(x)$  y  $f(x)$  son, pues, equivalentes; cada una de ellas da explícitamente la solución de la otra mediante una expresión integral cuyo núcleo es el núcleo resolvente de la otra.

4. **Unicidad de la solución.**—Al afirmar que las expresiones [1] y [11] dan recíprocamente la forma explícita de sus respectivas soluciones, sobreentendemos, naturalmente, que esta solución es única. Veamos en qué condiciones es esto cierto. Afirmer que la ecuación [1] admite solución única, es tanto como decir que si  $y(x)$  y  $\eta(x)$  son dos funciones que verifican simultáneamente la ecuación [1] son idénticas. O lo que es lo mismo, que su diferencia  $Y(x) = y(x) - \eta(x)$  es idénticamente nula. Pero restando las identidades [1] con  $y(x)$  y  $\eta(x)$  resulta

$$Y(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) Y(\xi) dx$$

ecuación homogénea que sólo se satisface para la solución  $Y(x) \equiv 0$  (trivial) si  $\lambda$  no es ningún autovalor de la ecuación. En resumen, vemos que se puede afirmar la unicidad de la solución de la ecuación completa [1] cuando, y sólo cuando,  $\lambda$  no coincide con ninguno de los valores propios de la ecuación homogénea. Queda así demostrada una de las más importantes afirmaciones contenidas en el último párrafo de la lección anterior (Teorema alternativo de Fredholm).

5. **Método de resolución en el caso de núcleo degenerado.**—Se llaman núcleos degenerados los que pueden descomponerse en suma de produc-

tos de funciones con las variables separadas. Más concretamente, supondremos

$$K(x, \xi) = \sum_{i=1}^n u_i(x) v_i(\xi) \quad [1]$$

con la condición de ser  $u_i(x)$  funciones linealmente independientes. Es lógica esta condición, pues de lo contrario podría expresarse una de las  $u_i$  linealmente mediante las demás, disminuyendo el número de sumandos  $n$  de la suma. Y la misma razón podemos aplicar para suponer linealmente independientes las  $v_i$ .

La ecuación de Fredholm de 2.ª especie tomará la forma

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n u_i(x) \int_a^b y(\xi) v_i(\xi) d\xi \quad [2]$$

Tratemos de satisfacerla mediante una solución de la forma

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i(x) \quad [3]$$

lo que equivale, en definitiva, a tomar como incógnitas  $\alpha_i$  los valores de las  $\int_a^b y v_i d\xi$ .

Sustituyendo tendremos

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i(x) = \sum_{i=1}^n u_i(x) \int_a^b \left[ f(\xi) + \lambda \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j(\xi) \right] v_i(\xi) d\xi$$

Pero la independencia lineal de las  $u_i(x)$  exigirá, al pasarlas todas al primer miembro, la anulación de los coeficientes de dichas  $u_i(x)$  o, lo que es lo mismo, la identidad de los coeficientes en ambos miembros. Por tanto, debe verificarse el sistema en  $\alpha_i$

$$\alpha_i - \lambda \sum_{j=1}^n \alpha_j \int_a^b u_j(\xi) v_i(\xi) d\xi = \int_a^b f(\xi) v_i(\xi) d\xi \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad [4]$$

Obsérvese que las integrales que intervienen en este sistema como coeficientes de las  $\alpha_i$  son calculables en función de los datos  $u_i, v_i, f$  del problema. Estas integrales son las llamadas *productos internos* o *escalares* de la dos funciones del integrando en el intervalo  $ab$  y se designan abreviadamente (especialmente en las obras alemanas) con la misma notación del producto escalar, así

$$\int_a^b f(\xi) \varphi(\xi) d\xi = (f \varphi)$$





$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda}{2} & -\lambda \\ -\frac{\lambda}{3} & 1 - \frac{\lambda}{2} \end{vmatrix} \quad \text{o sea} \quad \lambda^2 + 12\lambda - 12 = 0$$

Valores propios  $\lambda_1 = -6 + 4\sqrt{3}$        $\lambda_2 = -6 - 4\sqrt{3}$ .

Hallemos ahora la función propia  $y_1$  correspondiente a  $\lambda_1$ . El sistema que dará  $\alpha_1, \alpha_2$  en  $y_1 = \alpha_1 u_1(x) + \alpha_2 u_2(x)$  es [5]

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{\lambda_1}{2}\right) \alpha_1 - \lambda_1 \alpha_2 = 0 \\ -\frac{\lambda_1}{3} \alpha_1 + \left(1 - \frac{\lambda_1}{2}\right) \alpha_2 = 0 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 3 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \\ \alpha_1 = \sqrt{3} \alpha_2 \end{array} \right.$$

y podemos poner  $y_1$  en la forma  $\alpha_2 (\sqrt{3} u_1 + u_2)$  o sea

$$y_1(x) = C(x\sqrt{3} + 1) \quad \text{y análogamente} \quad y_2(x) = C_1(-x\sqrt{3} + 1)$$

**6. Generalización del método a los núcleos no degenerados.**—Toda función continua de dos variables  $K(x, \xi)$  puede aproximarse cuanto se desee mediante un polinomio entero  $P(x, \xi)$  el cual constituye siempre un núcleo degenerado. El método anterior es, pues, aplicable para resolver *aproximadamente* una ecuación de Fredholm de segunda especie. Si la aproximación se efectúa mediante desarrollos de Taylor, precisa exigir la analiticidad del núcleo o, por lo menos, su derivabilidad hasta el orden necesario a la aproximación. Si la aproximación se efectúa en *media* en el intervalo  $[a, b]$  de integración (lo que resulta más ventajoso, especialmente para intervalos grandes) se manejarán desarrollos en polinomios ortogonales y precisará tan sólo la integrabilidad del núcleo y de su cuadrado.

Un paso al límite en este proceso conduce a la determinación de los autovalores y autofunciones resolviendo sistemas lineales de infinitas ecuaciones con infinitas incógnitas. La ecuación en  $\lambda$  que define los valores propios viene entonces expresada mediante un determinante infinito. Tales tipos de determinantes se presentaron lo mismo a Fredholm que a Hilbert al querer fundamentar la teoría de las ecuaciones integrales lineales por métodos distintos de los expuestos y que no podemos desarrollar aquí.

Nos limitaremos a consignar los resultados esenciales (Schmidt-Hilbert) para *núcleos simétricos*  $K(x, \xi) = K(\xi, x)$ , en parte ya enunciados en la lección anterior.

I. *Todo núcleo real simétrico tiene, al menos, un valor propio real y, en general, un número finito de ellos.*

II. *Las funciones propias correspondientes a valores propios distintos son ortogonales.*

(II. Si  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_i(x) \dots$  es un sistema completo de soluciones propias de la ecuación homogénea

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) y(\xi) d\xi$$

de núcleo simétrico y  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \dots$ , los valores propios correspondientes, la solución de la ecuación completa

$$\eta(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) \eta(\xi) d\xi + f(x)$$

se obtiene desarrollando  $f(x)$  en serie de funciones ortogonales  $y_i$

$$f(x) = \sum_1^{\infty} C_i y_i(x)$$

y formando la serie

$$\eta(x) = f(x) + \lambda \sum_1^{\infty} \frac{C_i}{\lambda_i - \lambda} y_i(x)$$

Se observa en esta expresión que si  $\lambda$  toma alguno de los valores propios, esta solución carece de sentido, lo que está de acuerdo con la inexistencia de solución para  $\lambda = \lambda_i$  en el caso de núcleo degenerado.

NOTA.—*Líneas de influencia.*—En el ejemplo de la cuerda tensa cargada, el núcleo triangular  $K(x, \xi)$  obtenido en el § 3 de la lecc. 43 representa el descenso que experimenta el punto de abscisa  $x$  para una carga (igual a la tensión) situada en el punto  $\xi$ . Si en lugar de una cuerda consideramos una viga de longitud  $l$  apoyada en los extremos y calculamos la expresión del momento flector originado en el punto  $x$  por una carga unidad colocada en el punto  $\xi$  obtendremos la misma función  $K(x, \xi)$ .

Las curvas (quebradas) que tal núcleo representan al variar  $\xi$ , reciben el nombre de *líneas de influencia* y su consideración tiene singular interés en Mecánica aplicada a la construcción. El concepto de línea de influencia se generaliza a la representación de toda magnitud física (dependiente de dos variables lineales  $x, \xi$  en un mismo intervalo) que mida el efecto o influencia en el lugar  $x$  de una causa unidad localizada en el lugar  $\xi$ .

### EJERCICIOS

1. Resolver la ecuación integral

$$y(x) = 1 + \lambda \int_0^1 (x + \xi) y(\xi) d\xi$$

aplicando lo dicho en el § 5 de esta lección.

2. Formar la serie de Neumann correspondiente al problema anterior.
3. Resolver la ecuación del ejercicio 1.º por aproximaciones sucesivas.
4. Hallar el núcleo resolvente de la ecuación del ejercicio 1.º.
5. Se demuestra (\*) el siguiente radio de validez de la serie de Neumann obtenida en el § 1.

$$|\lambda| < \left[ \int_a^b \int_a^b K^2(x, \xi) dx d\xi \right]^{-1/2}$$

comprobar que es mayor que el indicado en dicho § 1 y calcular los valores obtenidos por una y otra acotación en la ecuación del ejercicio 1.º.

(\*) V. WIARDA: «Integralgleichungen, Cap. II, § 7.

## PRINCIPALES ERRATAS ADVERTIDAS

PAC.	LINEA	DICE	DEBE DECIR
142	-4	$(\alpha - )$	$(\alpha - 2)$
210	-11	<i>tangente común</i>	<i>tangente, propiedad común</i>
234	-2	$- 45^\circ$	$+ 45^\circ$
318	-8	$- \rho^2 r^2$	$+ \rho^2 r^2$
366	-2	$\varepsilon$	$ \varepsilon $

